

Краевой конкурс творческих работ учащихся  
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

**Моделирование синтеза яда для уничтожения колонии бактерий**

Ларионова Анна Алексеевна,  
11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Шабрыкина Наталья Сергеевна,  
доцент ПНИПУ, к.ф.-м. н.

Пермь. 2012.

## Оглавление

Оглавление.....	2
Введение .....	3
Концептуальная постановка задачи .....	4
Математическая постановка задачи .....	5
Решение и результаты .....	6
Выводы и заключения.....	10
Приложение .....	11

## **Введение**

Бактерии – одноклеточные растительные организмы. От этих бактерий, можно сказать, зависит вся наша земная жизнь. Бактерии живут всюду: в воздухе и на земле, в воде и в почве, в растениях и в животных. Невидимые простым глазом бактерии очень сильно влияют на нашу жизнь. Есть полезные бактерии, без которых жить на земле было бы гораздо труднее. Однако, есть и вредные бактерии. Попадая в организм человека или животного, они вызывают опасные заболевания – заражение крови, воспаление легких, ангину и др. Что бы лечить эти заболевания, нужно уничтожать вредные бактерии в организме. Для этого ученые стали синтезировать яд, который может уничтожать вредные бактерии.

В работе будут рассмотрены общие модели синтеза яда и зависимость численности бактерий от его количества. Будут выбраны оптимальные условия для полного уничтожения бактерий.

## **Концептуальная постановка задачи**

Рассматривается колония бактерий, которую пытаются уничтожить с помощью яда. Целью данной работы является построение модели процесса уничтожения бактерий.

В данной работе будут приняты следующие допущения:

- бактерии умирают только при действии яда, то есть они не умирают естественной смертью;
- количество яда не ограничено и яд может синтезироваться до бесконечного количества;
- уничтожение бактерий не приводит к растратам яда;
- количество вырабатываемого яда зависит от количества бактерий.

## Математическая постановка задачи

При рассмотрении процесса изменения количества бактерий учитывается их размножение и истребление. Бактерии размножаются со скоростью, пропорциональной их количеству, в то же время вырабатывается яд, истребляющий бактерии со скоростью, пропорциональной количеству бактерий и количеству яда. Скорость выработки яда пропорциональна количеству бактерий.

Исходя из выше сказанного, запишем дифференциальные уравнения, описывающие представленную динамику:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) - \beta N(t)M(t) \quad (1)$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = \varphi N(t) \quad (2)$$

где  $N(t)$  - зависимость количества бактерий от времени,  $M(t)$  - зависимость количества яда от времени,  $\alpha$  - коэффициент размножения бактерий,  $\beta$  - коэффициент истребления,  $\varphi$  - коэффициент выработки яда. Первое уравнение показывает изменение количества бактерий, а второе количества яда в какой-то момент времени.  $\alpha N(t)$  - показывает на сколько увеличилось число бактерий,  $\beta N(t)M(t)$  - показывает на сколько уменьшилось число бактерий,  $\varphi N(t)$  - показывает на сколько увеличилось количество яда.

## Решение и результаты

Решения были выполнены с помощью математического пакета Maple аналитически. Тест программы приведен в приложении. В связи со сложностью полученного решения оно не представлено в докладе.

На рис. 1 представлен график зависимости количества бактерий от количества яда. На рис. 1 представлен график зависимости количества бактерий и количества яда от времени. Оба графика сделаны при начальных условиях  $N_0=500$ ,  $M_0=1$  и коэффициентах  $\alpha=100$ ,  $\beta=50$ ,  $\varphi=10$ .

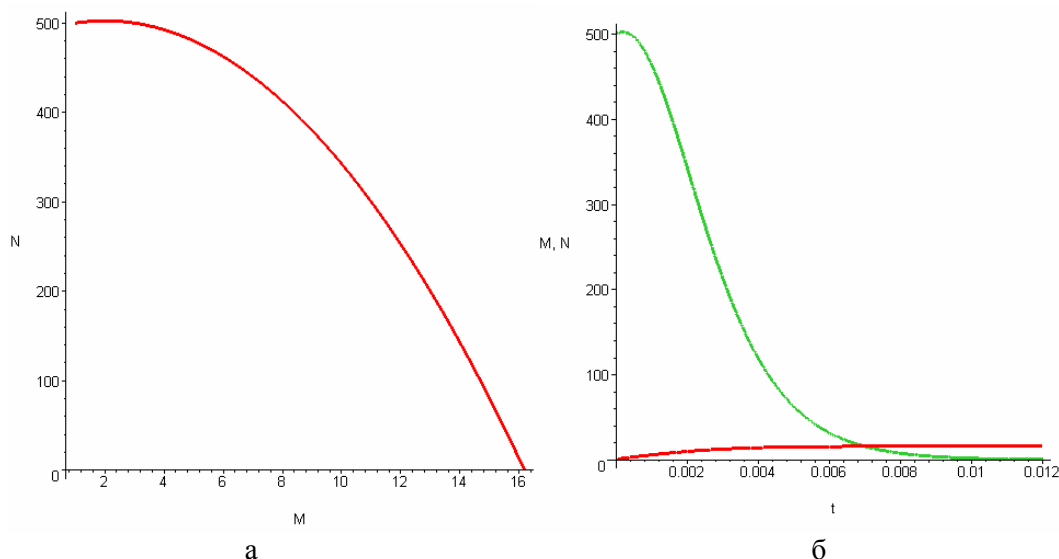


Рис.1. Зависимость количества бактерий от количества яда (а) и количества яда (красная линия.) и количества бактерий(зеленая линия) от времени (б).

На графике зависимости количества бактерий от количества яда с течением времени (рис. 1) можно увидеть, что чем больше яда, тем меньше число бактерий. В начале скорость уничтожения бактерий больше чем в конце, потому что количество яда увеличивается.

На графике зависимости количества бактерий от времени (рис. 1б) видно, что численность бактерий сокращается до нуля и все оставшееся время будет равен нулю, так как количество яда неисчерпаемо. В то же время яд вырабатывается до того количества, которое необходимо для полного уничтожения бактерий. После полного уничтожения яд

перестанет вырабатываться и его количество останется таким же, как и на тот момент времени, когда все бактерии были истреблены. Это можно увидеть на графике зависимости изменения количества яда от времени(рис. 1б).

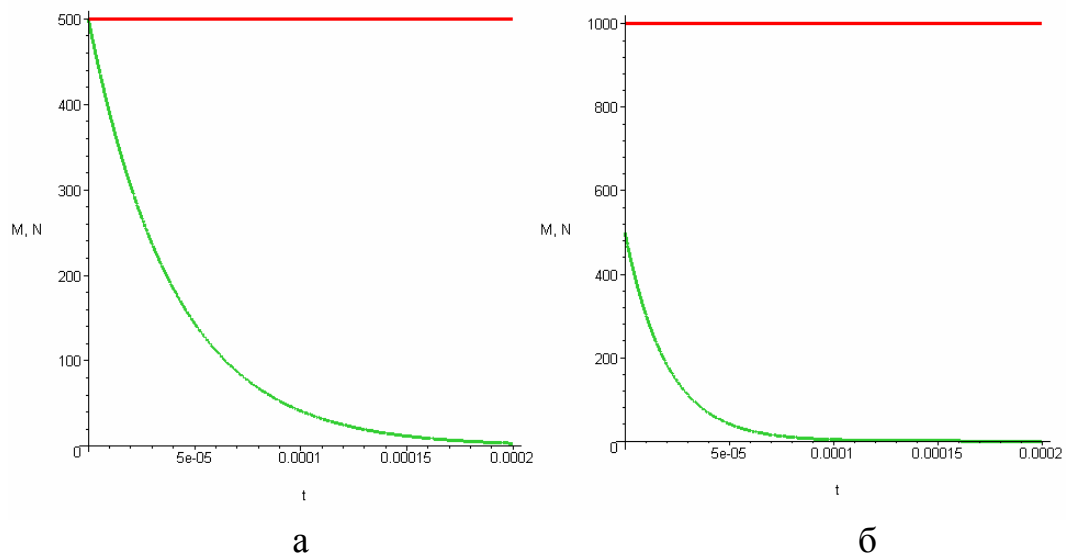


Рис.2. Зависимость количества яда(красная линия) и количества бактерий(зеленая линия) от времени(а,б). а) при начальных условиях  $N_0 = M_0 = 500$  и коэффициентах  $\alpha = 100$ ,  $\beta = 50$ ,  $\varphi = 10$ ; б) при начальных условиях  $N_0 = 500$ ,  $M_0 = 1000$  и коэффициентах  $\alpha = 100$ ,  $\beta = 50$ ,  $\varphi = 10$ ;

Сравнивая три графика (рис. 1б, рис. 3а, рис. 3б) можно увидеть, что чем больше количество яда тем меньше затрачивается время на полное уничтожение колонии бактерий. На рисунке 3 видно, что график зависимости количества яда от времени(красная линия) – это прямая. Из этого следует вывод, что чем больше количество яда, по сравнению с количеством бактерий, тем меньше его вырабатывается.

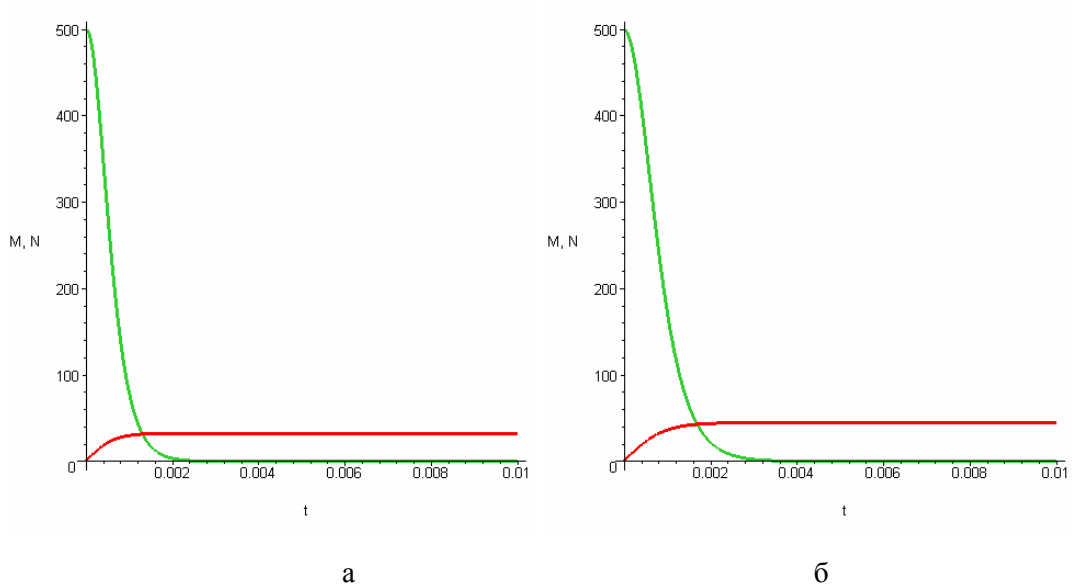
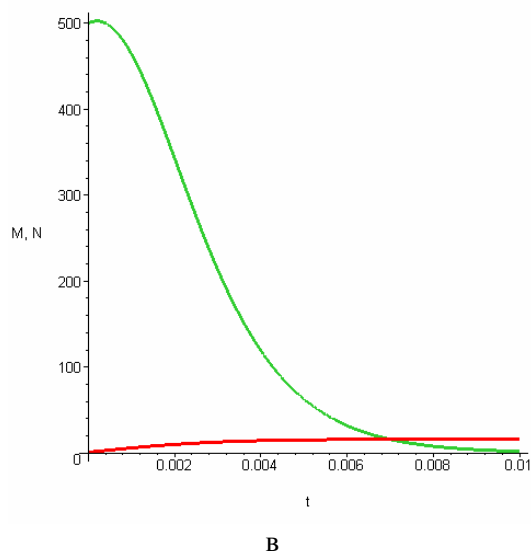


Рис.3. Зависимость количества яда(красная линия) и количества бактерий(зеленая линия) от времени(а,б,в) а) при начальных условиях  $N_0 = 500$ ,  $M_0 = 1$  и коэффициентах  $\alpha = \beta = \varphi = 100$ ; б) при начальных условиях  $N_0 = 500$ ,  $M_0 = 1$  и коэффициентах  $\alpha < \beta < \varphi$  и  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 50$ ,  $\varphi = 100$ ,



в) при начальных условиях  $N_0 = 500$ ,  $M_0 = 1$  и коэффициентах  $\alpha > \beta > \varphi$  и  $\alpha = 100$ ,  $\beta = 50$ ,  $\varphi = 10$ .

Сравнивая три этих графика, можно сказать, что от коэффициентов зависит конечное количество яда и время для полного истребления всей колонии бактерий. В результате получаются такие зависимости, во-первых, что чем больше коэффициент пропорциональности  $\alpha$ , тем меньше требуется яда для полного истребления бактерий, во-вторых, чем меньше



коэффициент пропорциональности  $\varphi$ , тем меньше затрачивается яда, и в-третьих, что, для меньшего времени, требуется чтобы коэффициенты были приближенно равны.

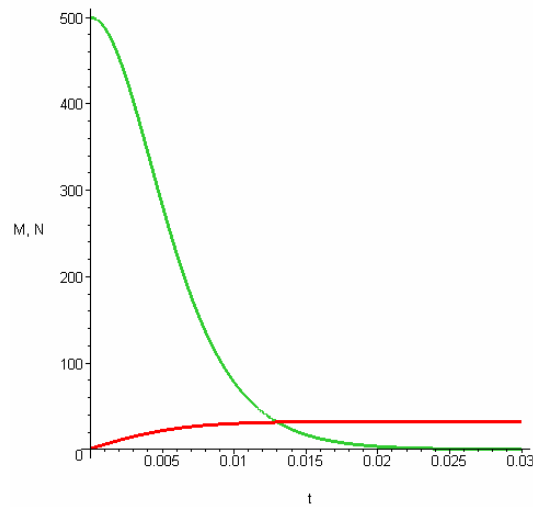


Рис.4. Зависимость количества яда(красная линия) и количества бактерий(зеленая линия) от времени. При начальных условиях  $N_0 = 500$ ,  $M_0 = 1$  и коэффициентах  $\alpha = \beta = \varphi = 10$ .

Отличие рис. 4 от рис. 3. состоит в том, что на рис. 3 коэффициенты равны сотне, а на рис. 4 – десяти. А это значит, что чем больше коэффициенты пропорциональности, тем меньше затрачивается времени на уничтожение бактерий.

## Заключения

В данной работе была построена модель синтеза яда для уничтожения колонии бактерий. Получены зависимости изменения численности колонии бактерий и количества яда от времени. Исследовано влияние начальных условий и коэффициентов.

В результате исследования было установлено, что для более быстрого уничтожения требуется, чтобы все коэффициенты были равны между собой и были как можно больше.

Для меньших затрат яда, коэффициент пропорциональности  $\varphi$  численно должен быть как можно меньше и начальные условия должны быть как можно больше приближенно равны.

Так как существует такое допущение, что количество яда не ограничено, в любом случае колония бактерий будет полностью уничтожена.

## Приложение

### *Текст программы*

Аналитическое решение:

```
> restart;  
> with(plots):  
> alpha:=0.5; beta:=7; phi:=0.05; N0:=200; M0:=150;  
> eq:=diff(N(t),t)=N(t)*(alpha-beta*M(t));  
> ep:=diff(M(t),t)=N(t)*phi;  
> numsol:=dsolve({eq,ep,N(0)=N0,M(0)=M0},{N(t),M(t)});  
> N:=eval(N(t),numsol);  
> M:=eval(M(t),numsol);  
> plot(M,t=0..0.02,color=green);  
> plot(N,t=0..0.01,color=blue);  
> plot([N,M,t=0..0.02],color=red);  
> plot([M,N],t=0..0.02,numpoints=50000,thickness=3);
```