

Краевой конкурс творческих работ учащихся
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

Математическое моделирование полета самолёта

Лоевец Дмитрий, Тельканов Михаил
11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Волегов Павел Сергеевич,
доцент ПНИПУ, к.ф.-м. н.

Пермь. 2012.

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Концептуальная постановка задачи.....	4
Глава 2. Математическая постановка задачи.....	7
Глава 3. Методы решения.....	11
Глава 4. Результаты моделирования.....	12
Список литературы.....	13

Введение

На сегодняшний день самым распространенным видом перемещения являются авиаперелёты.

По статистике 87-90% всех авиаперелётов сопровождается попаданиями лайнера в турбулентные зоны [<http://www.tutu.ru/2read/thinking/turbulence/>]. Турбулентность – это физическое свойство атмосферы, в которой постоянно изменяются давление, температура, направление и скорость ветра. Из-за этого воздушные массы становятся неоднородными по своему составу и плотности. И когда самолет проходит через них с очень большой скоростью, в салоне создается вибрация, которая и вызывает неприятные ощущения [<http://www.tutu.ru/2read/thinking/turbulence/>]. При этом пассажиры испытывают дискомфорт и неудобства. Кроме того, при резких перепадах давления самолёт может сорваться в штопор. Данная проблема достаточно актуальна, так как на сегодняшний день в воздухе находятся свыше 3500 самолётов или около 350 тыс. человек одновременно.



Рис.1. Самолет в зоне турбулентности

Целью работы является построение математической модели поведения самолёта в воздухе и исследование с её помощью горизонтальной и вертикальной устойчивости самолёта в зависимости от внешних факторов.

Задачи:

1. Необходимо определить силу давления воздуха, действующую на крыло на протяжении всего полета, в том числе изменение давления вблизи профиля крыла в момент прохождения зоны турбулентности.
2. Рассмотреть задачу в двумерной постановке, получить уравнения движения самолета и исследовать их решения на устойчивость.
3. Для проведения численных расчетов требуется найти значения параметров модели соответствующих реальной модели самолета.

Устойчивость — способность системы сохранять текущее состояние при наличии внешних воздействий.

Угол атаки летательного аппарата – угол между хордой крыла и проекцией его скорости V на ось X плоскости OXY системы координат, связанной с самолётом; считается положительным, если проекция V на нормальную ось OY отрицательна [http://ru.wikipedia.org/wiki/Угол_атаки].

Глава 1. Концептуальная постановка задачи

Объектом данного исследования является самолёт (параметры для расчётов соответствуют «Boeing 737» (рис. 3) и перечислены в табл.1).



Рис.2. Самолет Boeing 737

Табл. 1. Технические характеристики Boeing 737-300

Параметр, единица измерения	Значение (диапазон значений)
Длина	33,25 м
Размах крыла	28,88 м
Ширина фюзеляжа	3,76 м
Число мест	123 – 149
Максимальная взлётная масса	61 250 кг
Крейсерская скорость	807 км/ч
Минимальная скорость в полёте	350 км/ч
Дальность полёта	4400 км

Рассмотрим более подробно геометрию крыла самолета (рис. 3).

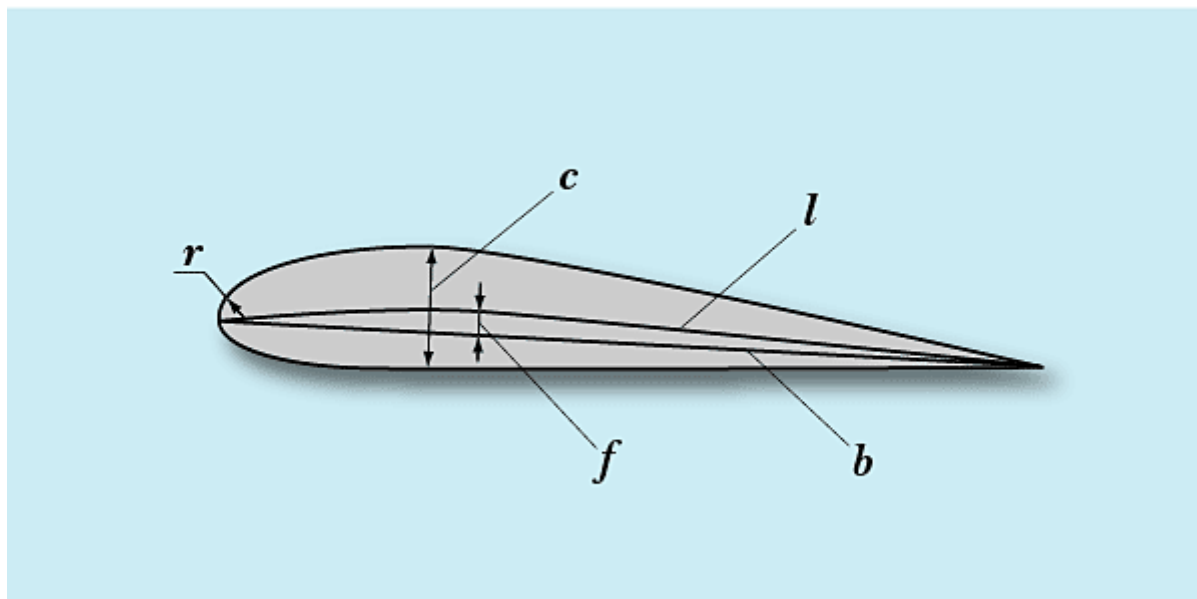


Рис. 3. Геометрия крыла самолета [http://www.rcdesign.ru/articles/avia/wings_profile]

Максимальное расстояние между крайними точками профиля – b , называется **хордой** профиля. Наибольшая высота профиля – c , называется **толщиной профиля**, а ее расстояние от передней точки – координатой максимальной толщины. Линию, точки которой равноудалены от верхней и нижней образующих профиля – l , называют **средней линией** профиля. Ее максимальное расстояние от хорды – f , называется **кривизной профиля**, а удаление от передней точки – координатой максимальной кривизны. Носик профиля образован некоей кривой линией, минимальный радиус которой обозначают – r , это **радиус скругления носика профиля**. Поскольку качественно надо сравнивать разные профили разных размеров, договорились все указанные величины измерять относительно хорды профиля. Зачастую при этом даже опускают слово «относительная». Просто, если толщина профиля указана в %, то всем ясно, что это отношение реальной толщины к величине хорды профиля. На данном рисунке верхняя линия, образующая профиль одной формы, а нижняя – другой. Такой профиль называется **несимметричным**. Если же, одна образующая, является зеркальным отражением другой, то профиль называется **симметричным**; кривизна симметричного профиля равна нулю.

Для упрощения построения математической модели примем следующую совокупность гипотез:

1. Так как скорость самолёта много меньше скорости света, то его движение описывается законами классической механики Ньютона.
2. Для удобства разобьём полёт на 3 части: взлет, полет на эшелоне и посадка. В этом случае можно допустить равномерное уменьшение или увеличение высоты.
3. Самолёт летит по прямой траектории на постоянной высоте (полет на эшелоне), круги при заходе на посадку не учитываются.
4. Самолет – абсолютно твердое тело, колебания крыльев в процессе полета не учитываются.
5. Система отсчета, относительно которой рассматривается движение – инерциальная.
6. Масса пассажиров и груза по сравнению с массой самолёта очень мала.
7. Уменьшение массы самолёта вследствие выработки топлива не учитывается.
8. Оледенением крыла вследствие низких температур можно пренебречь.
9. Крыло – одно целое и его элементы неподвижны.
10. $\alpha \in [1..7]$ где α – угол атаки крыла.

Глава 2. Математическая постановка задачи

Во время полёта на крылья самолёта действуют 4 силы: силы тяги двигателей, сопротивление воздуха, сила тяжести и подъёмные силы крыльев.

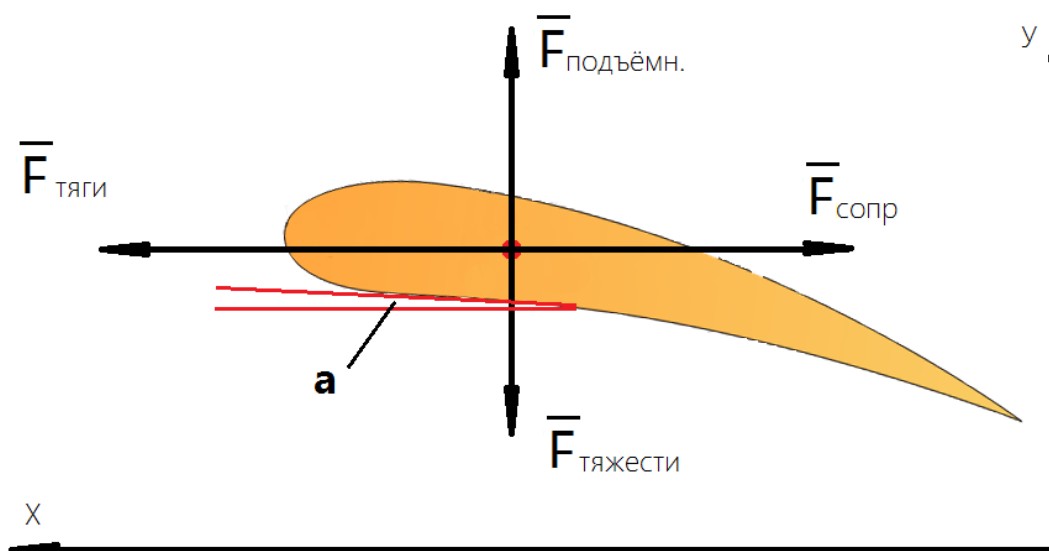


Рис.4 Силы, действующие на крыло. Буквой а обозначен угол атаки.

Запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{под}} + \vec{F}_{\text{тяги}} + \vec{F}_{\text{сопр}}. \quad (1)$$

Спроецируем второй закон Ньютона на оси координат:

$$x: ma_x = F_{\text{тяги}} - F_{\text{сопр}}, \quad (2)$$

$$y: ma_y = F_{\text{под}} - mg, \quad (3)$$

где $F_{\text{тяги}}$ – сила тяги, $F_{\text{под}}$ – подъемная сила.

Отдельным вопросом моделирования является вопрос о выводе выражения для подъемной силы. Со времен Н.Е. Жуковского не существует точного выражения для силы, действующей на крыло со стороны набегающего потока воздуха. В первом приближении будем использовать гипотезу о том, что в процессе полета возникает вихревое движение воздуха вокруг профиля крыла. Вследствие такого относительного движения скорость потока над и под крылом различна, а значит и возникает перепад давления, приводящий к возникновению подъемной силы. Ниже приведем приближенный вывод подъемной силы.

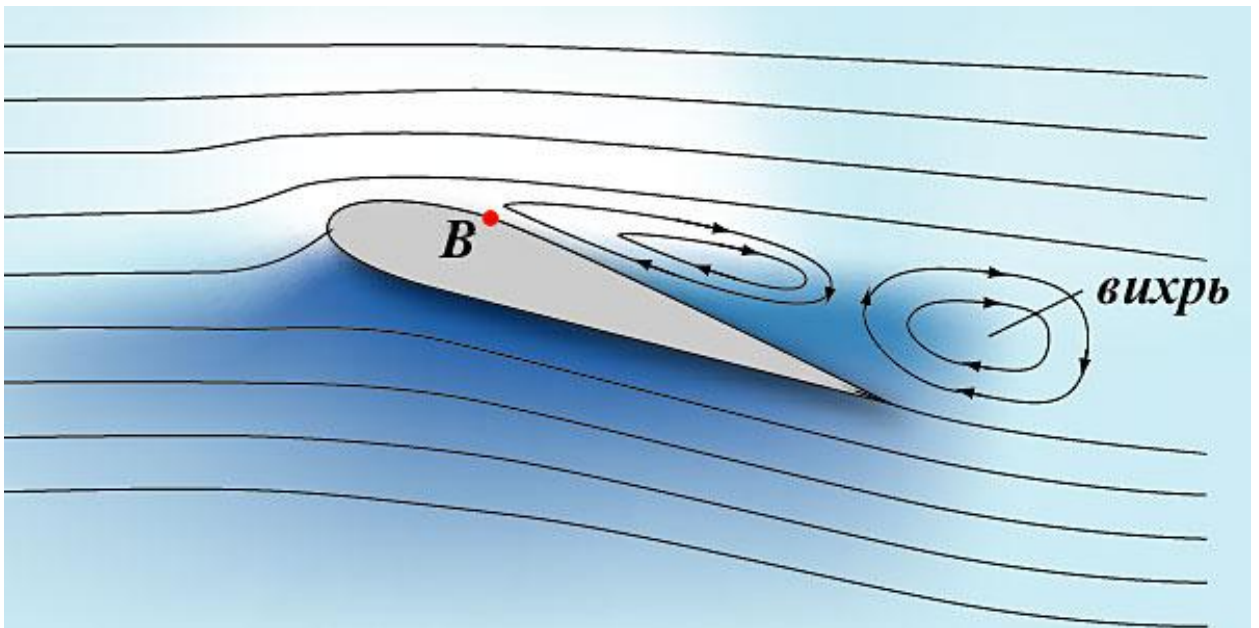


Рис.5. Вихрь (точкой В обозначен момент срыва воздушного потока)

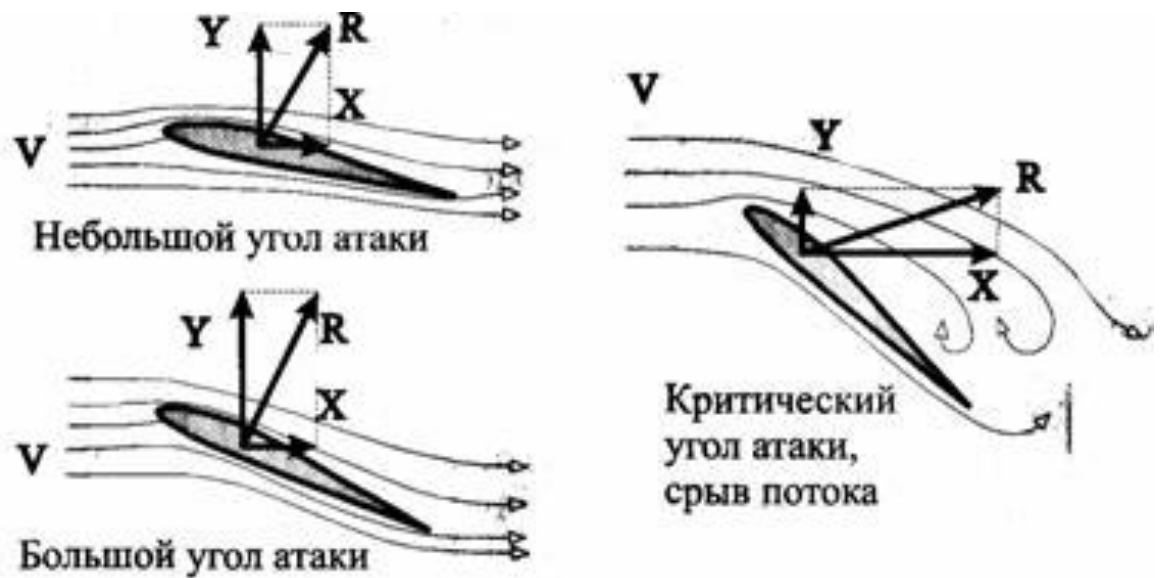


Рис.6. Различные углы атаки (x –лобовое сопротивление, y – подъемная сила)

[<http://www.skycentre.net/images/publication/paraplan/image044.jpg>]

Из рисунка видно, что при слишком больших углах атаки непосредственно за крылом начинают образовываться вихри, которые негативно влияют на аэродинамику самолёта. Максимальный угол при котором завихрений ещё нет называется критическим.

$$V_{над} = V \cos(\alpha) + U, \quad (4)$$

$$V_{под} = V \cos(\alpha) - U, \quad (5)$$

где $V_{\text{над}}$ – модуль скорости воздуха над крылом, $V_{\text{под}}$ – модуль скорости воздуха под крылом, U – модуль скорости циркулирующего потока.

Используя уравнение Бернулли, выразим формулу для расчета перепада давления вокруг крыла:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{1}{2} \rho ((V \cos(\alpha) + U)^2 - (V \cos(\alpha) - U)^2) = \\ &= \frac{1}{2} \rho 2U 2V \cos(\alpha) = 2\rho VU \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда выражение для подъемной силы примет следующий вид:

$$F_{\text{под}} = \Delta p S = 2\rho S V U \cos(\alpha), \quad (7)$$

В литературе так же можно встретить следующее выражение для подъемной силы [http://ru.wikipedia.org/wiki/Лобовое_сопротивление]:

$$F_{\text{подъемн}} = C_y \frac{\rho V^2 S}{2}. \quad (8)$$

Безразмерный коэффициент подъемной силы определяется выражением:

$$C_y = 2 * \frac{P}{(1 - \frac{2}{\lambda})} * (a - a_0), \quad (9)$$

C_y - коэффициент подъемной силы, α – угол атаки, α_0 - угол нулевой подъемной силы, P - профильное сопротивление.

Данное уравнение довольно сложно, к тому же оно не показывает явным образом зависимость подъемной силы от угла атаки.

Для силы лобового сопротивления применим следующее выражение:

$$F_{\text{сопр}} = \beta * U^2 + \frac{1}{\pi * \lambda} \frac{\gamma^2}{\rho * U^2 * S} \quad (10)$$

где λ - удлинение крыла (отношение размаха к хорде), γ - подъемная сила, U - плотность среды, S - площадь крыла, β – коэффициент вязкости среды.

Глава 3. Методы решения

Запишем проекции второго закона Ньютона на оси координат в развёрнутом виде:

$$x: ma_x = F_{\text{тяги}} - \frac{(8\rho SU^2 \cos^2 \alpha + \beta U^2 \pi \lambda)}{\pi \lambda}, \quad (11)$$

$$y: ma_y = 2\rho USV \cos \alpha - mg, \quad (12)$$

Уравнения (11)-(12) представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка относительно зависимостей координат $x(t)$, $y(t)$, для однозначного решения которых систему уравнений нужно снабдить начальными условиями. Тогда окончательно получим:

$$\begin{cases} mx''(t) = F_{\text{тяги}} - \frac{(8\rho SU^2 \cos^2 \alpha + \beta(x'(t)^2 + y'(t)^2)\pi \lambda)}{\pi \lambda} \\ my''(t) = 2\rho US(x'(t)^2 + y'(t)^2) \cos \alpha - mg \end{cases}, \quad (13)$$

Используем следующие начальные данные:

$$\begin{aligned} y(0) &= 8000 \text{ м}, \quad x(0) = 0 \text{ м}, \\ y'(0) &= V_0 \sin \alpha, \quad x'(0) = V_0 \cos \alpha, \\ V_0 &= 200 \text{ м/с}, \quad \alpha = \frac{\pi}{36}. \end{aligned}$$

Решив систему уравнений (13) в пакете символьных вычислений Mathematica, можно получить зависимости координат от времени.

Для нахождения скорости циркуляции потоков воздуха и динамической плотности среды решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = F_{\text{тяги}} - \frac{(8\rho SU^2 \cos^2 \alpha + \beta V^2 \pi \lambda)}{\pi \lambda} \\ 0 = 2\rho USV \cos \alpha - mg \end{cases} \quad (14)$$

В результате решения системы (14) были получены следующие параметры:

$$\rho = 1.2, u = 55.89$$

где ρ – динамическая плотность среды, u – модули скорости циркуляции воздуха.

Глава 4. Результаты моделирования

После окончательного решения получены следующие зависимости:

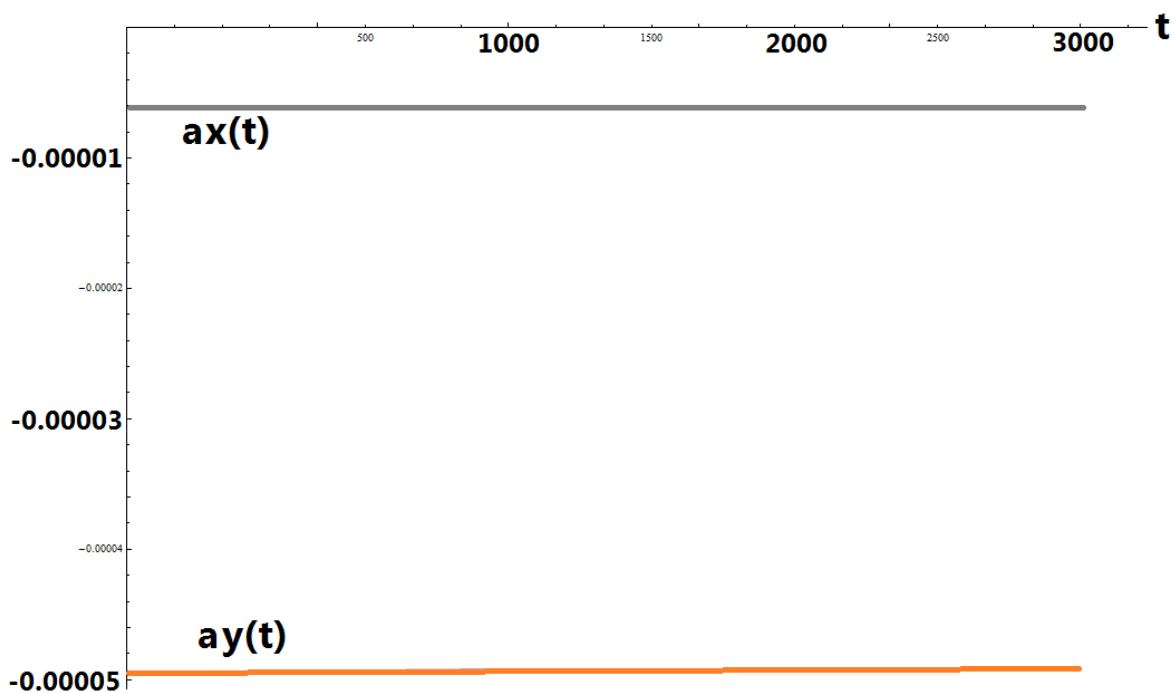


Рис. 7. Зависимость ускорений от времени

Как видно на рисунке 7, у самолёта присутствует очень малое ускорение (0.005 см/сек по оси Y и 0.0006 см/сек по оси X). Оно может быть вызвано погрешностью вычислений либо неточным подбором исходных параметров.

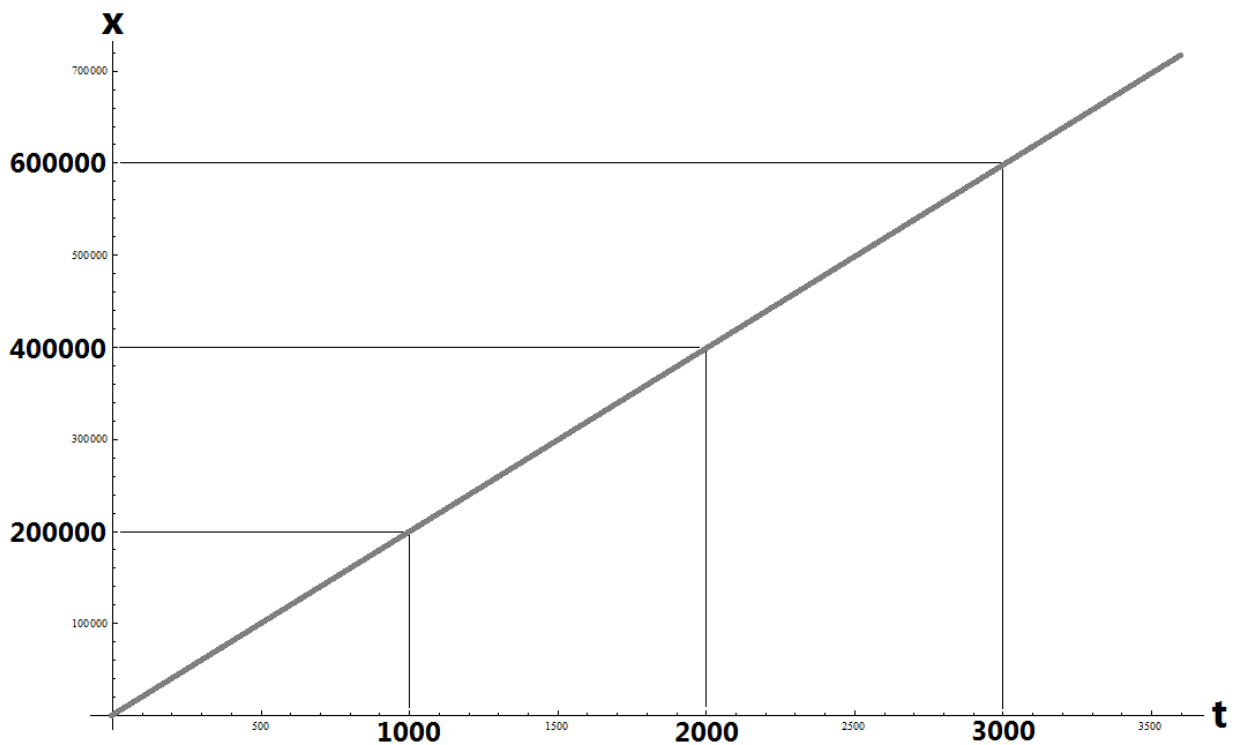


Рис. 8. Зависимость координаты X от времени

На рисунке 8 хорошо видна линейная зависимость координаты X от времени. Как следствие, скорость самолёта постоянна, ускорения практически нет (см. рис. 7).

Список использованной литературы

1. Мякишев Г.Я. Физика: Механика. 10 кл.
2. Википедия [ru.wikipedia.org]