

Краевой конкурс творческих работ учащихся
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Многогранники

Максимова Дарья,

8 кл., МАОУ «СОШ №17» г. Соликамск,

Аксаева Татьяна Николаевна,

учитель математики МАОУ «СОШ №17»

Пермь. 2012.

Актуальность: расширить свой кругозор в разновидностях многогранников, областях их применения

Объект исследования - раздел математики - геометрия

Предмет исследования - многогранники

Цель: Знакомство с многогранниками, их классификацией

Задачи:

1. Изучить необходимую литературу
2. Узнать об истории многогранников
3. Уточнить признаки классификации многогранников
4. Уметь моделировать многогранники

Гипотеза: если, узнаем историю изучения многогранников, их классификацию, сможем моделировать их на практике, находить в окружающем мире

Содержание

Введение.....	4
Многогранники	
Глава 1. История и понятие многогранников.....	6
Глава 2. Доказательство существования только пяти правильных многогранников.....	11
Глава 3. Связь геометрии и природы.....	12
Глава 4. Области применения многогранников:	
4.1 Многогранники в живописи.....	14
4.2 Многогранники в архитектуре.....	16
Глава5. Практическая часть.....	18
Заключение.....	19
Литература.....	20

Геометрия - наука, изучающая формы, размеры и взаимное расположение геометрических фигур. Она возникла и развивалась в связи с потребностями практической деятельности человека.

Первые геометрические понятия возникли в доисторические времена.

Разные формы материальных тел наблюдал человек в природе: формы растений и животных, гор и извилин рек, круга и серпа Луны и т. п.

Однако он не только пассивно наблюдал природу, но осваивал и использовал ее богатства. В процессе практической деятельности накапливались геометрические сведения.

Начало геометрии было положено в древности при решении чисто практических задач. Со временем, когда накопилось большое количество геометрических фактов, у людей появилась потребность обобщения, уяснения зависимости одних элементов от других, установления логических связей и доказательств. Постепенно создавалась геометрическая наука.

Геометрические знания примерно в объеме современного курса средней школы были изложены еще 2200 лет назад в “Началах” Евклида. Конечно, изложенная в “Началах” наука геометрия не могла быть создана одним ученым. Известно, что Евклид в своей работе опирался на труды десятков предшественников, среди которых были Фалес и Пифагор, Демокрит и Гиппократ, Архит, Теэте



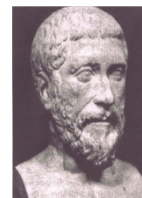
Фалес



Демокрит



Гиппократ



Пифагор

В своей книге [Евклид](#) дал полное математическое описание правильных многогранников. Он описывает структуру тетраэдра, октаэдра, куба, икосаэдра додекаэдра в данном порядке.

Многогранники имеют красивые формы, например, правильные, полуправильные и звездчатые многогранники. Они обладают богатой историей, которая связана с именами таких ученых, как Пифагор, Евклид, Архимед.

С древнейших времен представления о красоте связаны с симметрией. Наверное, этим объясняется интерес человека к многогранникам - удивительным символам симметрии, привлекавшим внимание выдающихся мыслителей.

Мы можем наблюдать, что многогранники встречаются и окружают нас повсюду.

Теория многогранников является современным разделом математики.

Безусловно, недостаточно узнавать и видеть многогранники в окружающем мире. Интересно уточнить их классификацию, разновидность, связь с миром людей. Этим и обусловлен выбор темы «Мир многогранников»

Глава 1. История и понятие многогранников

Многогранником называется тело, граница которого является объединением конечного числа многоугольников.

Многогранником называется поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело.

Первые упоминания о многогранниках известны еще за три тысячи лет до нашей эры в Египте и Вавилоне. Достаточно вспомнить знаменитые египетские пирамиды и самую известную из них – пирамиду Хеопса. Это правильная пирамида, в основании которой квадрат со стороной 233 м и высота которой достигает 146,5 м. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса – немой трактат по геометрии.

Правильные многогранники известны с древнейших времён. Их орнаментные модели можно найти на [резных каменных шарах](#), созданных в период позднего [неолита](#), в [Шотландии](#), как минимум за 1000 лет до Платона. В костях, которыми люди играли на заре цивилизации, уже угадываются формы правильных многогранников.

В значительной мере правильные многогранники были изучены [древними греками](#). Некоторые источники (такие как [Прокл Диадок](#)) приписывают честь их открытия [Пифагору](#). Другие утверждают, что ему были знакомы только тетраэдр, куб и додекаэдр, а честь открытия октаэдра и икосаэдра принадлежит [Теэтету Афинскому](#), современнику Платона. В любом случае, Теэтет дал математическое описание всем пяти правильным многогранникам и первое известное доказательство того, что их ровно пять.

Начиная с 7 века до нашей эры в Древней Греции, создаются философские школы. Большое значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удалось получать новые геометрические свойства.

Одной из первых и самых известных школ была Пифагорейская, названная в честь своего основателя Пифагора.

Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма, на языке



математики - это правильный невыпуклый или звездчатый пятиугольник. Пентаграмме присваивалось способность защищать человека от злых духов.

Пифагорейцев поражала красота, совершенство, гармония этих фигур. Они считали правильные многогранники божественными фигурами и использовали в своих философских сочинениях:

первоосновам бытия - огню, воде, земле, воздуху, придавалась форма соответственно тетраэдра, икосаэдра, куба, октаэдра, а вся Вселенная имела форму додекаэдра. Позже учение пифагорейцев о правильных многогранниках изложил в своих трудах другой древнегреческий ученый, философ - идеалист Платон. С тех пор правильные многогранники стали называться платоновыми телами.

Платон также считал, что мир строится из четырёх «стихий» - огня, земли, воздуха и воды, а атомы этих «стихий» имеют форму четырёх правильных многогранников. Тетраэдр олицетворял огонь, поскольку его вершина устремлена вверх, как у разгоревшегося пламени; икосаэдр - как самый обтекаемый - воду; гексаэдр - самая устойчивая из фигур - землю, а октаэдр - воздух. В наше время эту систему можно сравнить с четырьмя состояниями вещества - твёрдым, жидким, газообразным и пламенным. Пятый многогранник - додекаэдр символизировал весь мир и почитался главнейшим.

Это была одна из первых попыток ввести в науку идею систематизации.

Почему правильные многогранники получили такие имена? Это связано с числом их граней. Тетраэдр имеет 4 грани, в переводе с греческого "тетра" - четыре, "эдрон" - грань. Гексаэдр (куб) имеет 6 граней, "гекса" - шесть; октаэдр - восьмигранник, "окто" - восемь; додекаэдр - двенадцатигранник, "додека" - двенадцать; икосаэдр имеет 20 граней, "икоси" - двадцать.

Правильным многогранником называется многогранник, у которого все грани правильные равные многоугольники, и все двугранные углы равны. Но есть и такие многогранники, у которых все многогранные углы равны, а грани - правильные, но разноименные правильные многоугольники.

Многогранники такого типа называются равноугольно-полуправильными многогранниками. Впервые многогранники такого типа открыл Архимед. Им подробно описаны 13 многогранников, которые позже в честь великого ученого были названы телами Архимеда. Архимедовы тела частично получаются из Платоновых тел в результате их усечения. Усеченное тело есть не что иное, как тело с отрезанной верхушкой. Так могут быть получены первые пять архимедовых тел: усеченный тетраэдр, усеченный октаэдр, усеченный икосаэдр, усеченный куб, усеченный додекаэдр. Вторая группа архимедовых тел представлена двумя многогранниками, являющимися результатом пересечения двух платоновых тел подходящих размеров и расположенных так, что их центры совпадают. Это кубookтаэдр - результат пересечения куба и октаэдра и икосадодекаэдр - результат пересечения икосаэдра и додекаэдра. В результате усечения кубookтаэдра и икосододекаэдра получены следующие два многогранника – ромбокубookтаэдр и ромбоикосододекаэдр. Дальнейшее видоизменения могут превратить их в два других многогранника- усеченный кубookтаэдр и усеченный икосододекаэдр. Последние два архимедовых тел- «курносый» куб и «курносый» додекаэдр.

Термин курносый означает, что каждую грань многогранника окружили треугольники, что каждое ребро заменили парой треугольников, а в каждой вершине добавили еще один многоугольник.

Существует еще один многогранник-14, который некоторые ученые причисляют к полуправильным псевдоромбооктаэдр. Спорный вопрос заключается в том, что в нем нарушена симметрия, поэтому он не соответствует некоторым определениям полуправильных многогранников.

Иоганн Кеплер - немецкий математик, астроном, оптик, для которого правильные многогранники были любимым предметом изучения, предположил, что существует связь между 5 правильными многогранниками и 6 открытыми к тому времени планетами солнечной системы.

Согласно этому предположению в сферу орбиты Сатурн можно вписать куб,

в который вписывается сфера орбиты Юпитера. В нее вписывается тетраэдр, описанный около сферы орбиты Марс. В сферу орбиты Марс вписывается додекаэдр, в который вписывается сфера орбиты Земля, а она описана около икосаэдра, в который вписана сфера орбиты Венера, сфера этой планеты описана около октаэдра, в который вписывается сфера Меркурия.

Другим выдающимся вкладом Кеплера в геометрию многогранников является открытие им двух звездных правильных тел. Кеплер открыл малый додекаэдр, названный им колючим или ежом, и большой додекаэдр. Всего их четыре; два других нашел французский математик Луи Пуансон в 1809 г. большой звездчатый додекаэдр и большой икосаэдр, они называются также телами Кеплера-Пуансо

Следующий серьезный шаг в науке о многогранниках был сделан в XVIII веке Леонардом Эйлером (1707-1783), который без преувеличения «поверил алгеброй гармонию». Теорема Эйлера о соотношении между числом вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, доказательство которой Эйлер опубликовал в 1758 г. в «Записках Петербургской академии наук», окончательно навела математический порядок в многообразном мире многогранников.

$$\text{Вершины} + \text{Грани} - \text{Рёбра} = 2.$$

Многогранник	Вершины Грани		Рёбра
Тетраэдр	4	4	6
Куб	8	6	12
Октаэдр	6	8	12
Додекаэдр	20	12	30
Икосаэдр	12	20	30

В соответствии с традицией, идущей от древних математиков, среди всех многогранников лучшие те, которые имеют своими гранями правильные многоугольники.

Глава 2. Доказательство существования только пяти правильных многогранников.

Опираясь на определение правильных многогранников и основную их характеристику, что сумма углов многогранников при любой вершине не превышает и не равна 360, доказали, что существует только пять правильных многогранников.

Рассмотрим доказательство. В каждой вершине тетраэдра сходятся 3 грани, значит, сумма трех углов по 60 градусов будет равна 180. Если добавить к вершине тетраэдра еще один треугольник, то в сумме получится 240-это октаэдр. Добавление пятого треугольника дает сумму углов 300- получается икосаэдр. Если допустить добавление шестой грани, то сумма углов станет равной 360. Что противоречит основной характеристики многогранников.

Многогранник исчезнет, и все углы развернутся на плоскости в полный круг. Три квадратные грани имеют угол 270-это вершина куба. Добавление еще одного квадрата увеличит угол до 360- это также не соответствует выпуклому многограннику.

Три пятиугольные грани дают угол $324(3 \cdot 108)$ - вершина додекаэдра. Если добавим еще один пятиугольник, получим больше 360.

Для шестиугольников уже три грани дают угол развертки $360(3 \cdot 120)$, поэтому можно сделать вывод, что гранями правильных многоугольников могут быть лишь треугольники, четырехугольники, пятиугольники, выпуклого многогранника с гранями, имеющими шесть и более углов, не существует.

Таким образом, существует лишь пять выпуклых правильных многогранников - тетраэдр, октаэдр и икосаэдр с треугольными гранями, куб (гексаэдр) с квадратными гранями и додекаэдр с пятиугольными гранями.

Если наблюдать и рассматривать многогранные формы, то можно не только почувствовать их красоту, но и обнаружить некоторые закономерности, возможно, имеющие прикладное значение.

Некоторые из правильных и полуправильных тел встречаются в природе, мы можем их наблюдать и находить в архитектуре и живописи.

Глава 3. Связь геометрии и природы

Правильные многогранники – самые выгодные фигуры, поэтому они широко распространены в природе. Подтверждением тому служит форма некоторых кристаллов. Например, кристаллы поваренной соли имеют форму куба. При производстве алюминия пользуются алюминиево-калиевыми кварцами, монокристалл которых имеет форму правильного октаэдра. Получение серной кислоты, железа, особых сортов цемента не обходится без сернистого колчедана. Кристаллы этого химического вещества имеют форму додекаэдра.

Алмаз (октаэдр), шеелит (пирамида), хрусталь (призма).

Правильные многогранники встречаются так же и в живой природе. Например, скелет одноклеточного организма феодарии (*Circjgjnja icosahedra*) по форме напоминает икосаэдр.

Большинство феодарий живут на морской глубине и служат добычей коралловых рыбок. Но простейшее животное защищает себя двенадцатью иглами, выходящими из 12 вершин скелета. Оно больше похоже на звёздчатый многогранник.

Пчёлы - удивительные создания.

Пчелиные соты представляют собой пространственный паркет и заполняют пространство так, что не остается просветов. Как не согласиться с мнением пчелы из сказки «Тысяча и одна ночь»: «Мой дом построен по законам самой строгой архитектуры. Сам Эвклид мог бы поучиться, познавая геометрию сот».

Икосаэдр оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно формы вирусов. Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень - икосаэдр.

Впрочем, многогранники - отнюдь не только объект научных исследований. Их формы - завершенные и причудливые, широко используются в искусстве.

Глава 4. Области применения многогранников

4.1 Многогранники в живописи

Титан Возрождения, живописец, скульптор, ученый и изобретатель Леонардо да Винчи (1452-1519) — символ неразрывности искусства и науки, а следовательно, закономерен его интерес к таким прекрасным, высокосимметричным объектам, как выпуклые многогранники вообще и усеченный икосаэдр в частности.

Знаменитый художник, увлекавшийся геометрией Альбрехт Дюрер (1471- 1528), в известной гравюре «Меланхолия» на переднем плане изобразил додекаэдр

Ярчайшим примером художественного изображения многогранников в XX веке являются, конечно, графические фантазии Маурица Корнелиса Эшера (1898-1972), голландского художника, родившегося в Леувардене. Мауриц Эшер в своих рисунках как бы открыл и интуитивно проиллюстрировал законы сочетания элементов симметрии, т.е. те законы, которые властвуют над кристаллами, определяя и их внешнюю форму, и их атомную структуру, и их физические свойства.

Правильные геометрические тела - многогранники - имели особое очарование для Эшера. В его многих работах многогранники являются главной фигурой и в еще большем количестве работ они встречаются в качестве вспомогательных элементов.

На гравюре "Четыре тела" Эшер изобразил пересечение основных правильных многогранников, расположенных на одной оси симметрии, кроме этого многогранники выглядят полупрозрачными, и сквозь любой из них можно увидеть остальные.

Изящный пример звездчатого додекаэдра можно найти в его работе "Порядок и хаос". В данном случае звездчатый многогранник помещен внутрь стеклянной сферы. Аскетичная красота этой конструкции контрастирует с беспорядочно разбросанным по столу мусором.

Наиболее интересная работа Эшера - гравюра "Звезды", на которой можно увидеть тела, полученные объединением тетраэдров, кубов и октаэдров.

Если бы Эшер изобразил в данной работе лишь различные варианты многогранников, мы никогда бы не узнали о ней. Но он по какой-то причине поместил внутрь центральной фигуры хамелеонов, чтобы затруднить нам восприятие всей фигуры.

На картине художника Сальвадора Дали «Тайная Вечеря» Христос со своими учениками изображён на фоне огромного прозрачного додекаэдра.

Форму додекаэдра, по мнению древних, имела ВСЕЛЕННАЯ, т.е. они считали, что мы живём внутри свода, имеющего форму поверхности правильного додекаэдра.

Геометрия появляется всюду, где нужна хотя бы малейшая точность в определении формы и размеров. Поэтому архитектурные сооружения яркий тому пример.

4.2 Многогранники в архитектуре

С точки зрения формы архитектура всегда была преимущественно кубической. Изредка встречались и другие Платоновы тела, то есть призмы, конусы, пирамиды, сферы, но все же куб имел подавляющее преимущество. По сути дела куб лежал в основе любой архитектурной формы нескольких последних тысячелетий.

Примером применения в архитектуре других Платоновых тел может служить Великая пирамида в Гизе. Великая пирамида была построена как гробница Хуфу, известного грекам как Хеопс. Он был одним из фараонов, или царей древнего Египта, а его гробница была завершена в 2580 году до н.э. Позднее в Гизе было построено еще две пирамиды, для сына и внука Хуфу, а также меньшие по размерам пирамиды для их цариц. Она имеет форму правильного тетраэдра и является древнейшим из Семи чудес древности.

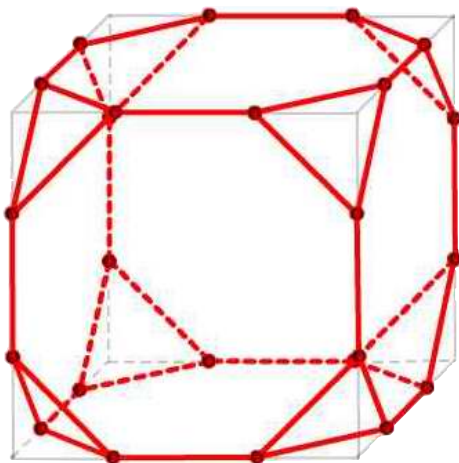
Также примером архитектурных сооружений с использованием многогранников является Фаросский маяк. Маяк был построен на маленьком острове Фарос в Средиземном море, около берегов Александрии. Он состоял из трех мраморных башен, стоявших на основании из массивных каменных блоков. Первая башня была прямоугольной, в ней находились комнаты, в которых жили рабочие и солдаты. Над этой башней располагалась меньшая, восьмиугольная башня со спиральным пандусом, ведущим в верхнюю башню. Верхняя башня формой напоминала цилиндр, в котором горел огонь, помогавший кораблям благополучно достигнуть бухты. На вершине башни стояла статуя Зевса Спасителя. Общая высота маяка составляла 117 метров. Ещё один маяк, конструкция которого состоит из Платоновых тел – это Александрийский маяк. Он был построен в III веке до н.э., чтобы корабли могли благополучно миновать рифы на пути в александрийскую бухту. Это был первый в мире маяк, и простоял он 1500 лет.

Использование многогранников в архитектурных сооружениях можно наблюдать и в нашем городе. В первую очередь это конечно церкви, но наряду с историческими памятниками существуют и современные здания с яркими многогранниками.

Глава 5. Практическая часть

По схемам разверткам собрала некоторые многогранники: гексаэдр, тетраэдр, икосаэдр, додекаэдр, октаэдр.

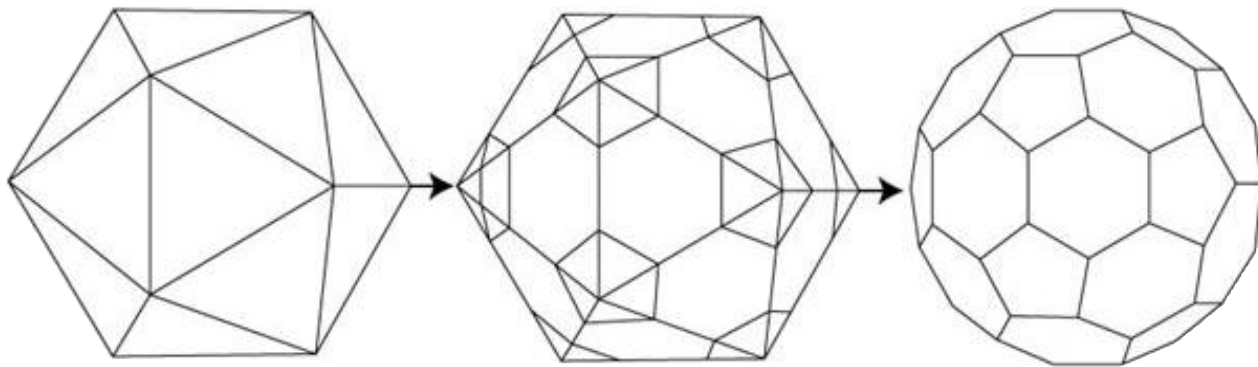
Несмотря на то, что названия многогранников не идеальны, в них есть определенная логика, которую пыталась проследить при превращении правильного многогранника в усеченный. Термин "усеченный" означает, что многогранник был получен в процессе отсечения от правильного многогранника правильных пирамид с вершинами, лежащими на ребрах и в вершине многогранника, например, как можно получить усеченный куб,



архимедова усеченный икосаэдр из платонова икосаэдра

Заключение

Проделанная исследовательская работа помогла узнать и убедиться в том, что



многогранники на протяжении всей истории человечества не переставали

восхищать пытливые умы симметрией, мудростью и совершенством своих форм.

Сделать вывод, что многогранные формы окружают нас в повседневной жизни повсюду: спичечный коробок, книга, комната, молочные пакеты в форме тетраэдра или параллелепипеда. Почти все сооружения, возведённые человеком, от древнеегипетских пирамид до современных небоскрёбов, имеют форму многогранников. Проследила доказательство существования только пяти правильных многогранников.

Через практическую деятельность собрала по схемам разверткам несколько многогранников, попыталась понять, как можно получить усеченные многогранники по чертежам.

Литература

1. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика. – М: Аванта плюс, 2002.
2. Энциклопедия для детей. Я познаю мир. Математика. – М: Издательство АСТ, 1999.
3. Ворошилов А.В. Математика и искусство. - М. просвещение, 1992. – 352
4. Рыбников К.А. История математики: Учебник. - М.: Изд-во МГУ, 1994. - 495 с
5. Интернет Ресурсы:

<http://www.nips.riss-telecom.ru/poly/>

Мир многогранников

<http://www.sch57.msk.ru:8101/collect/smogl.htm>

История математики

<http://mschool.kubsu.ru/>

Библиотека электронных учебных пособий

<http://www.ega-math.narod.ru/>

Статьи по математике

<http://dondublon.chat.ru/math.htm>

Популярная математика

<http://www.uic.ssu.samara.ru/~nauka/index.htm>

«В мире науки»