Краевой конкурс творческих работ учащихся
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

Математическая модель заноса автомобиля

Овчинников Евгений Иванович,
11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,
Микрюкова Ирина Романовна,
11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми

Волегов Павел Сергеевич,
доцент ПНИПУ, к.ф.-м. н.

Пермь. 2012.

Содержание

Введение

Высокий темп современной жизни вызывает у человека потребность в быстром и безопасном перемещении на большие расстояния с относительно небольшими затратами. Удовлетворить данную потребность могут такие транспортные средства, как самолет, поезд, автомобиль и т.д.

Однако наиболее доступным средством передвижения для личного пользования является автомобиль. На данный момент насчитывается около 750 миллионов автомобилей, находящихся в работоспособном состоянии и используемых по прямому назначению. Увеличивается мощность двигателя, прочность ходовой составляющей, поэтому растет и максимальная скорость, развиваемая автомобиля.

Но модернизируется далеко не весь автомобиль. Как и сто лет назад, покрышки для автомобилей делают из резины, а на дороги укладывают асфальт. Передвижение на автомобиле далеко не безопасно. Несмотря на заметный рост уровня безопасности, количество дорожно-транспортных происшествий каждым годом не только не убывает, но даже растёт.

Всем известно, какими печальными могут стать последствия ДТП для жизни и здоровья людей. Нередко ДТП случаются по причине того, что «водитель не справляется с управлением». Одной из возможных причин потери управления на дороге является занос.

Занос представляет собой боковое скольжение задней или передней оси автомобиля при продолжающемся поступательном движении. Определяющим фактором правильного поведения при выводе автомобиля из заноса является привод автомобиля. Существует три разновидности приводов:

- Задний привод – конструкция трансмиссии автомобиля, при которой крутящий момент, создаваемый двигателем, передается на задние колеса (рис.1) [1].

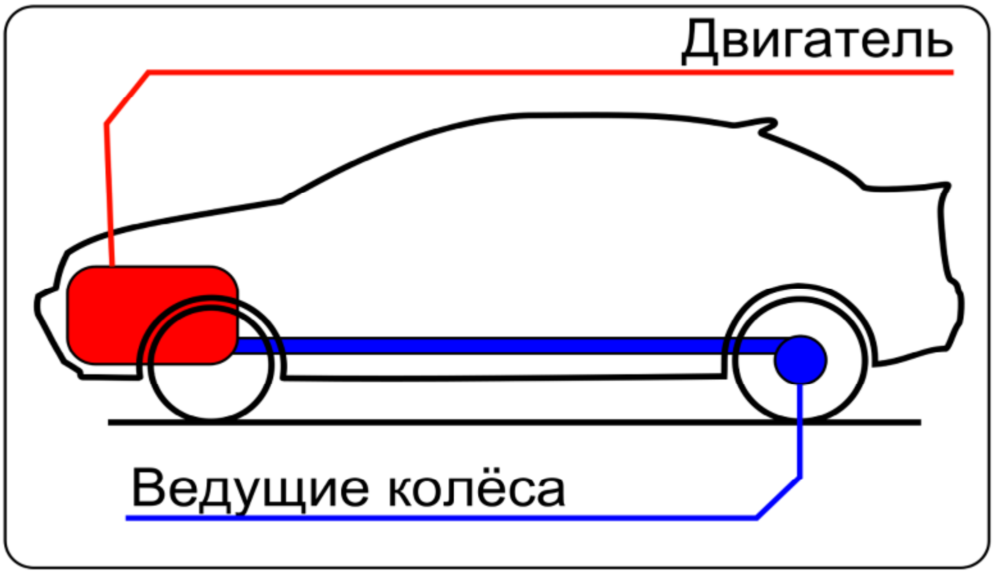

Рис. 1. Схема заднего привода

- Передний привод – компоновка и конструкция трансмиссии автомобиля, при которой создаваемый двигателем крутящий момент передается на передние колёса (рис.2) [2].

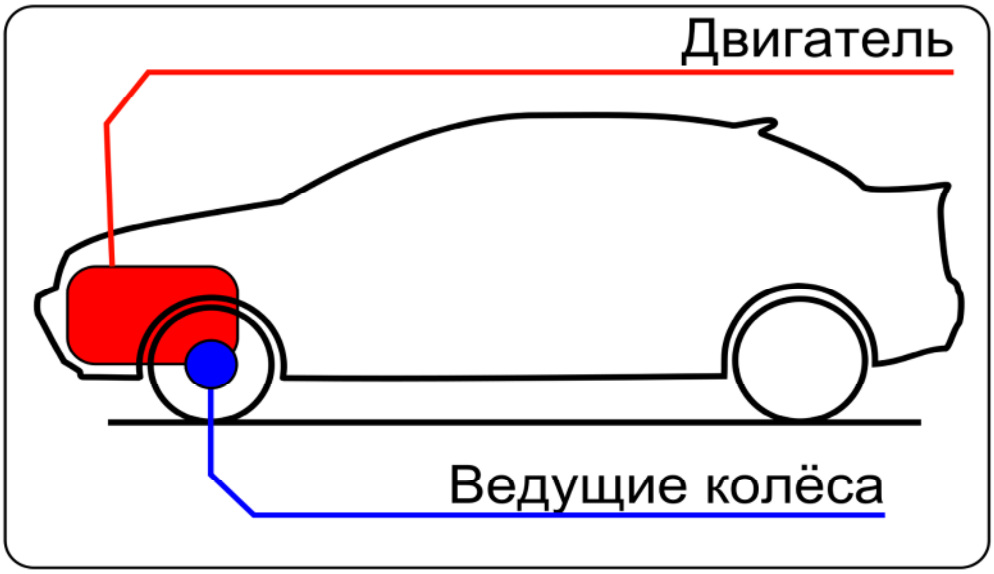

Рис.2. Схема переднего привода

- Полный привод – конструкция трансмиссии автомобиля, при которой крутящий момент, создаваемый двигателем, передаётся на все колеса (рис.3) [3].

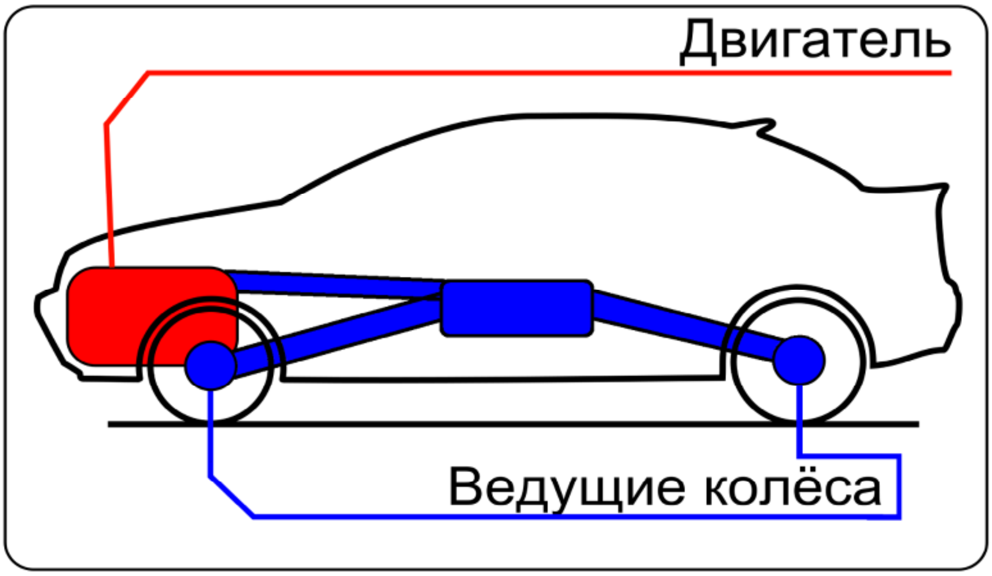

Рис.3. Схема полного привода

Если передние колёса первыми теряют сцепление с поверхностью, говорят о недостаточной поворачиваемости. В этом случае автомобиль движется по прямой, не слушаясь руля (рис. 4).

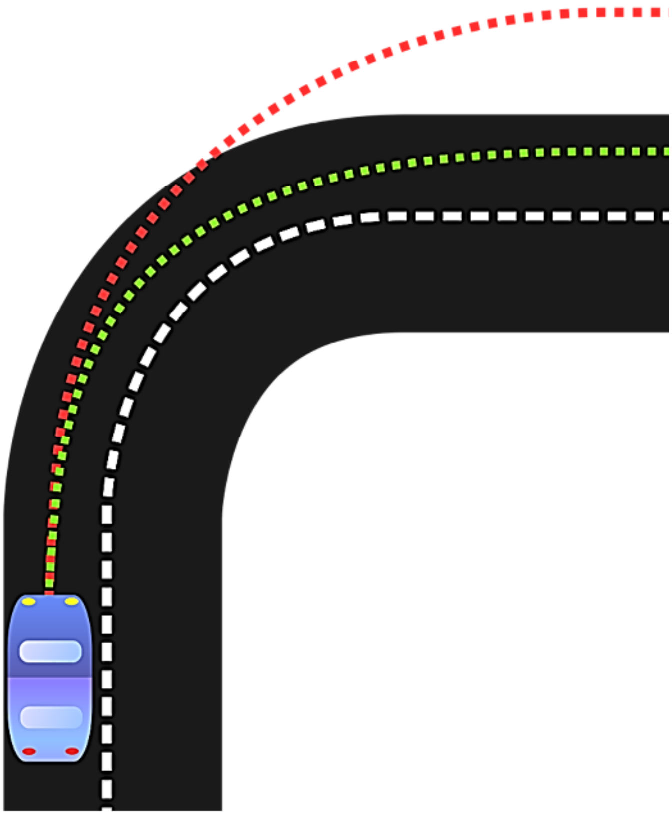

Рис.4. Траектории при недостаточной и нейтральной поворачиваемости

Если задние колёса первыми теряют сцепление с дорогой, говорят об избыточной поворачиваемости. В этом случае у автомобиля сносит заднюю ось, вплоть до разворота (рис. 5).

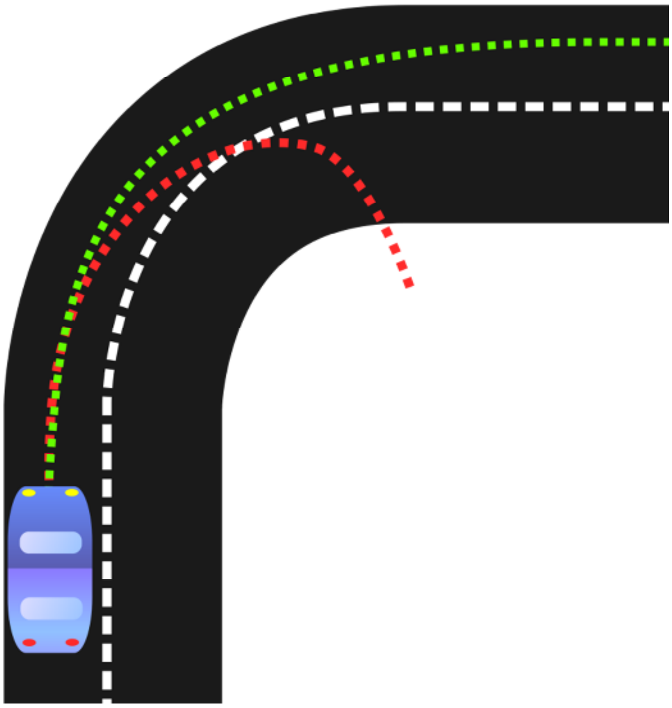

Рис.5. Траектории при избыточной и нейтральной поворачиваемости

Поворачиваемость того или иного типа определяется множеством параметров: на поворачиваемость влияет, например, кривизна и скорость прохождения поворота. Чем меньше кривизна поворота и, следовательно, больше скорость прохождения такого поворота, тем более избыточную поворачиваемость испытывает автомобиль. Наоборот, на крутых, медленных поворотах автомобиль испытывает недостаточную поворачиваемость.

Таким образом, **актуальным** остается вопрос: автомобиль с каким приводом может развить наибольшую скорость без потери сцепления с дорогой или наиболее эффективно позволит выйти из заноса.

Сформулируем **цель** настоящего исследования:

Требуется разработать и исследовать математическую модель, описывающую движение автомобиля по дороге. Модель должна позволять:

- строить траектории движения колёс автомобиля;
- строить траекторию движения центра масс тела;
- решать основную задачу механики: определение координат, как центра масс тела, так и его колёс в произвольный момент времени.

Объектом моделирования является абсолютно твердое тело (в общем случае) произвольной формы, имеющее точки опоры (колёса).

Входные данные:

- привод автомобиля (задний, передний, полный);
- масса автомобиля, расположение центра масс автомобиля;
- тип дорожного покрытия;
- тип покрышек;
- коэффициенты сил трения скольжения и качения, возникающих между покрышками и поверхностью дороги;
- скорость автомобиля в начальный момент времени;
- вращающий момент, передаваемый от двигателя на ось автомобиля.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующий комплекс задач:

- связать реакцию подвески с линейной скоростью автомобиля, радиусом поворота, координатами центра масс;
- связать угловую скорость вращения колес с вращающим моментом и линейной скоростью автомобиля, сформулировать критерий потери контакта профиля колеса и поверхности дороги;
- записать уравнения движения автомобиля как абсолютно твердого тела, исследовать траектории движения автомобиля при различных условиях движения.

Глава 1. Концептуальная постановка задачи

Объект моделирования – абсолютно твердое тело с четырьмя точками опоры, имеющее произвольную форму.

Был выдвинут следующий ряд гипотез:

- движение автомобиля описывается уравнениями классической механики Ньютона, так как скорость движения тела много меньше скорости света;
- корпус автомобиля является абсолютно твёрдым телом;
- объект моделирования имеет четыре точки касания с поверхностью;
- точки касания лежат в одной горизонтальной плоскости и являются вершинами прямоугольника;
- движение тела происходит в одной плоскости;
- тело имеет три степени свободы (рис. 6);

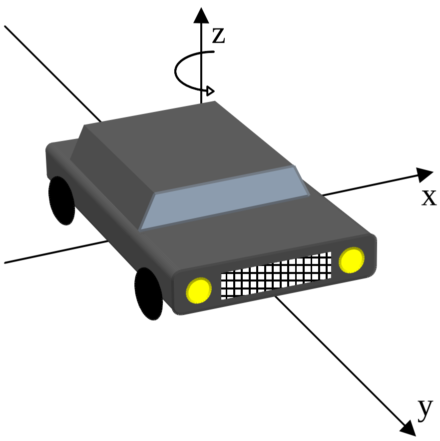

Рис. 6. Степени свободы автомобиля

- задние колёса имеют по две степени свободы, а передние – по три (рис. 7);

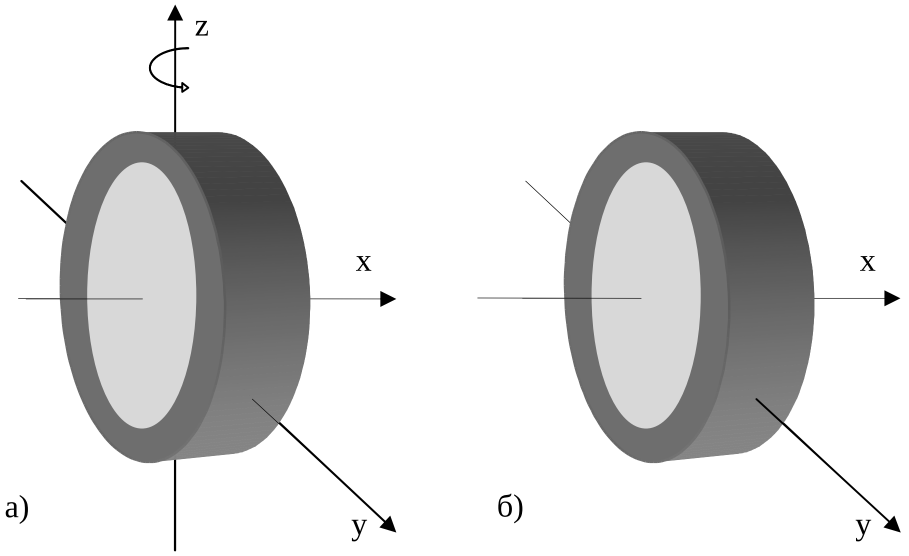

Рис. 7. Степени свободы колёс: а) переднее; б) заднее

- профили передних колёс в любой момент времени параллельны друг другу;
- во время движения на колёса действует сила трения качения, в момент заноса возникает трение скольжения;
- будем считать, что коэффициент трения качения при движении не зависит от скорости;
- сила сопротивления воздуха отсутствует.

Глава 2. Математическая постановка задачи

§1. Определение силы реакции опоры

Требуется связать реакцию подвески с линейной скоростью автомобиля, радиусом поворота и координатами центра масс. Рассмотрим абсолютно твёрдое тело массой m, шириной l, закреплённое на горизонтальной опоре с помощью четырёх пружин с коэффициентом жёсткости k. На тело действует горизонтальная сила, равная по модулю и направлению центробежной силе инерции, возникающей при входе со скоростью V реального автомобиля в поворот, имеющий радиус R. Центр масс системы имеет координаты y_c, x_c.

На тело действуют четыре силы упругости со стороны пружин, центробежная сила и сила тяжести. Силы упругости приложены к концам пружин и направлены в сторону сокращения деформации. Точка приложения силы тяжести и центробежной силы – центр масс тела (рис.8).

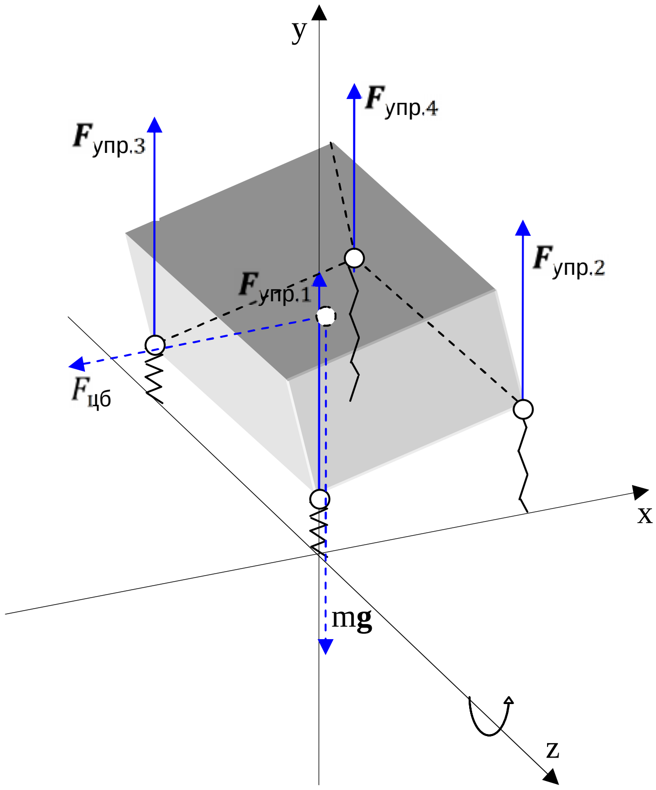

Рис. 8. К выводу реакций опоры.

Второй закон Ньютона и уравнение моментов относительно оси z для статики тела при действии центробежной силы выглядят следующим образом:

$$\vec{M}_{F_{цб}} + \vec{M}_{F_{k_1}} + \vec{M}_{F_{k_2}} + \vec{M}_{F_{k3}} + \vec{M}_{F_{k_4}} + \vec{M}_{g} = \vec{0}; \quad (1)$$

$$\vec{y}_C \times \vec{F} + \vec{0} \times \vec{F}_1 + \vec{0} \times \vec{F}_3 + \vec{l} \times \vec{F}_2 + \vec{l} \times \vec{F}_4 + \vec{x} \times m\vec{g} = \vec{0}; \quad (2)$$

$$\vec{F}_{k_1} = \vec{F}_{k_3}; \quad (3)$$

$$\vec{F}_{k_2} = \vec{F}_{k_4}; \quad (4)$$

$$z: y_C F + 2lF_2 - x\, mg = 0; \quad (5)$$

$$F_{k_2} = \frac{x_C mg - y_C F}{2l}; \quad (6)$$

$$\vec{F}_{цб} + 2\vec{F}_{k_1} + 2\vec{F}_{k_2} + m\vec{g} = \vec{0}; \quad (7)$$

$$x: 2F_{k_1} + 2F_{k_2} - mg = 0; \qquad (8)$$

$$F_{k_1} = \frac{mg}{2} - F_{k_2}; \qquad (9)$$

$$F_{k_1} = \frac{mg}{2} - \frac{x_C mg - y_C F}{2l}; \qquad (10)$$

$$F_{k_1} = \frac{lmg - x_C mg + y_C F}{2l}; \qquad (11)$$

$$F_{k_1} = \frac{(l - x_C)mg + y_C F}{2l}; \qquad (12)$$

Выражение для модуля центробежной силы:

$$F_{цб} = m\omega^2 R; \qquad (13)$$

$$F_{цб} = \frac{mV^2}{R}; \qquad (14)$$

Таким образом, выражения для сил упругости приобретут следующий вид:

$$F_{k_1} = \frac{(l - x_C)mg + \frac{y_C mV^2}{R}}{2l}; \qquad (15)$$

$$F_{k_2} = \frac{x_C mg - \frac{y_C mV^2}{R}}{2l}; \qquad (16)$$

По третьему закону Ньютона модуль силы давления, действующей со стороны тела на пружину, равен модулю силы упругости, действующей со стороны пружины на тело (рис.9).

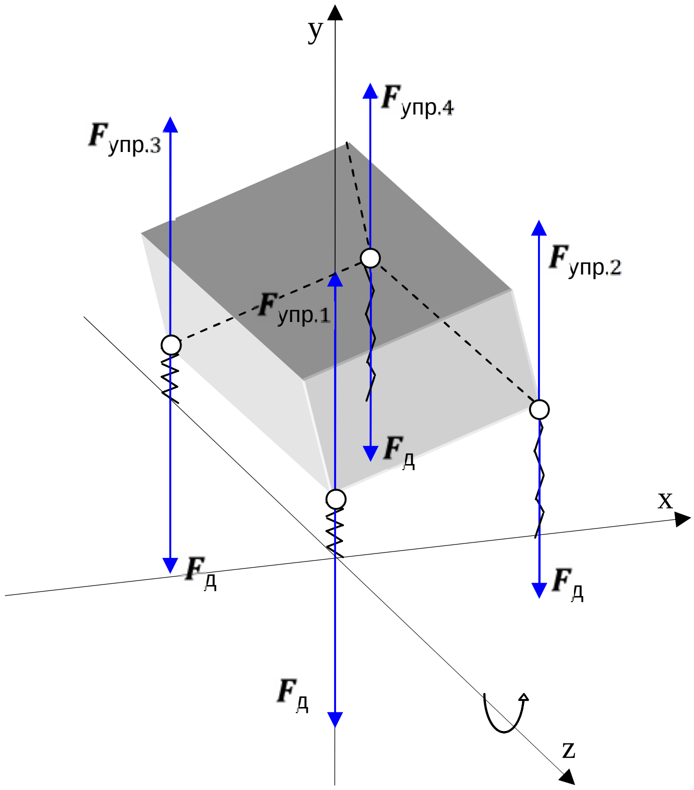

Рис. 9. К выводу реакций опоры.

$$F_{\partial_1} = F_{k_1}; \tag{17}$$

$$F_{\partial_2} = F_{k_2}; \tag{18}$$

$$F_{\partial_1} = \frac{(l - x_C)mg + \dfrac{y_C mV^2}{R}}{2l}; \tag{19}$$

$$F_{\partial_2} = \frac{x_C mg - \dfrac{y_C mV^2}{R}}{2l}. \tag{20}$$

Рассмотрим в качестве механической системы пружины. На них действует силы давления со стороны тела и силы реакции опоры со стороны поверхности (рис.10).

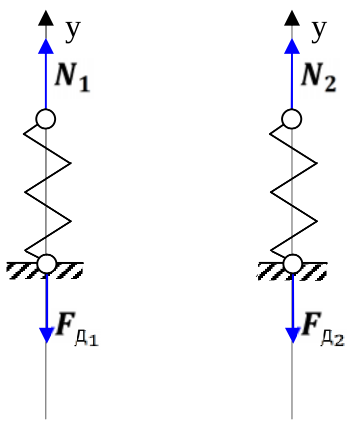

Рис. 10. Силы, действующие на пружины

Второй закон Ньютона для статики пружин:

$$\vec{N}_1 + \vec{F}_{\partial_1} = \vec{0}; \tag{21}$$

$$\vec{N}_2 + \vec{F}_{\partial_2} = \vec{0}; \tag{22}$$

$$F_{\partial_1} - N_1 = 0; \tag{23}$$

$$F_{\partial_1} = N_1; \tag{24}$$

$$N_1 = N_3 = \frac{(l - x_C)mg + \dfrac{y_C m V^2}{R}}{2l}; \tag{25}$$

$$F_{\partial_2} - N_2 = 0; \tag{26}$$

$$F_{\partial_2} = N_2; \tag{27}$$

$$N_2 = N_4 = \frac{x_C mg - \dfrac{y_C m V^2}{R}}{2l}; \tag{28}$$

Проверить полученные выражения на разумность можно, предположив, что тело покоится, тогда центробежной силы не возникает. На тело действуют сила тяжести и четыре силы упругости (рис. 11).

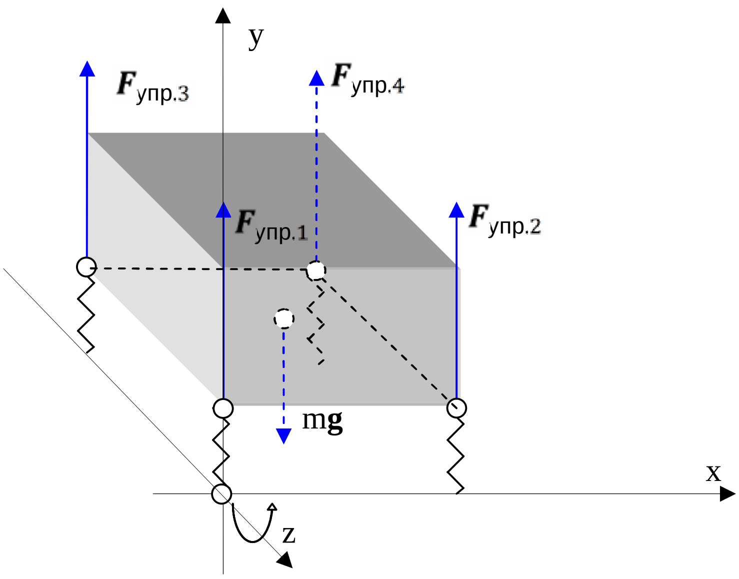

Рис. 11. К выводу реакций опоры

Из уравнения моментов и второго закона Ньютона для статики тела находятся силы упругости, равные силам давления и силам реакции опоры.

$$\vec{M}_{k_1} + \vec{M}_{k_2} + \vec{M}_{k_3} + \vec{M}_{k_4} + \vec{M}_g = \vec{0}; \qquad (29)$$

$$\vec{0} \times \vec{F}_{k_1} + \vec{0} \times \vec{F}_{k_3} + \vec{l} \times \vec{F}_{k_2} + \vec{l} \times \vec{F}_{k_4} + \vec{x}_C \times m\vec{g} = \vec{0}; \qquad (30)$$

$$z: 2lF_{k_2} - x_C mg = 0; \qquad (31)$$

$$N_2 = N_4 = F_{\partial_2} = F_{k_2} = \frac{mgx_C}{2l}; \qquad (31)$$

$$\vec{F}_{k_1} + \vec{F}_{k_2} + \vec{F}_{k_3} + \vec{F}_{k_4} + m\vec{g} = \vec{0}; \qquad (32)$$

$$y: 2F_{k_1} + 2F_{k_2} - mg = 0; \qquad (33)$$

$$F_{k_1} = \frac{mg - 2F_{k_2}}{2}; \qquad (34)$$

$$F_{k_1} = \frac{mg}{2} - F_{k_2}; \qquad (35)$$

$$F_{k_1} = \frac{mg}{2} - \frac{x_C mg}{2l}; \qquad (36)$$

$$N_1 = N_3 = F_{\partial_1} = F_{k_1} = \frac{mg(l - x_C)}{2l}; \qquad (37)$$

Формулы (31) и (37) совпадают с выражениями, получаемыми при обнулении скорости в формулах (28) и (25). Отсюда следует вывод, что задача решена корректно.

§2. Определение скорости

Требуется связать линейную скорость движения точки колеса, лежащей на расстоянии R от центра колеса, с угловой скоростью вращения колеса и вращающим моментом, передаваемым колесу от двигателя. Создадим схему движения колеса под действием момента M, будем считать, что колесо деформирует поверхность при движении, получим следующую схему (рис. 12).

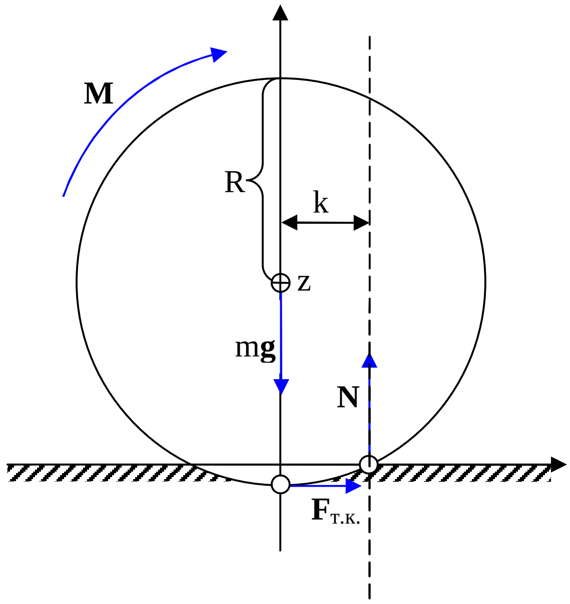

Рис. 12. К выводу скорости

Запишем уравнение моментов для колеса:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{внеш.} + \vec{M}_{тр.кач.}; \qquad (39)$$

Спроецируем его на ось z:

$$I\varepsilon_z = M_{\;.} - kN; \qquad (40)$$

Коэффициент k есть коэффициент трения качения, в реальной ситуации он зависит от линейной скорости точек колеса, но колебания его значений настолько малы, что ими можно пренебречь, однако, стоит отметить, что в случае, когда линейная скорость точек колеса равна 0, коэффициент k также равен 0.

Из проекции уравнения моментов на ось z получим дифференциальное уравнение:

$$V'(t) = \frac{M(t) - kmg}{rm}; \qquad (41)$$

В общем случае решение уравнения (41) зависит от конкретного вида функций M(t), так как вращающий момент зависит только лишь от характеристик автомобиля, можно задать его прямо пропорциональным времени с коэффициентом пропорциональности a, тогда получим M(t)=at. Пусть начальная скорость автомобиля U, тогда получим следующее решение дифференциального уравнения (41) относительно t:

$$V(t) = \frac{t(-2gkm + at)}{2mR} + U; \qquad (42)$$

Представлен график зависимости V(t) при параметрах g=10 м/с^2, U=0 м/с, k=0.0025, a=250 Нм/с, m=1250 кг, r=0.4 м (рис. 13):

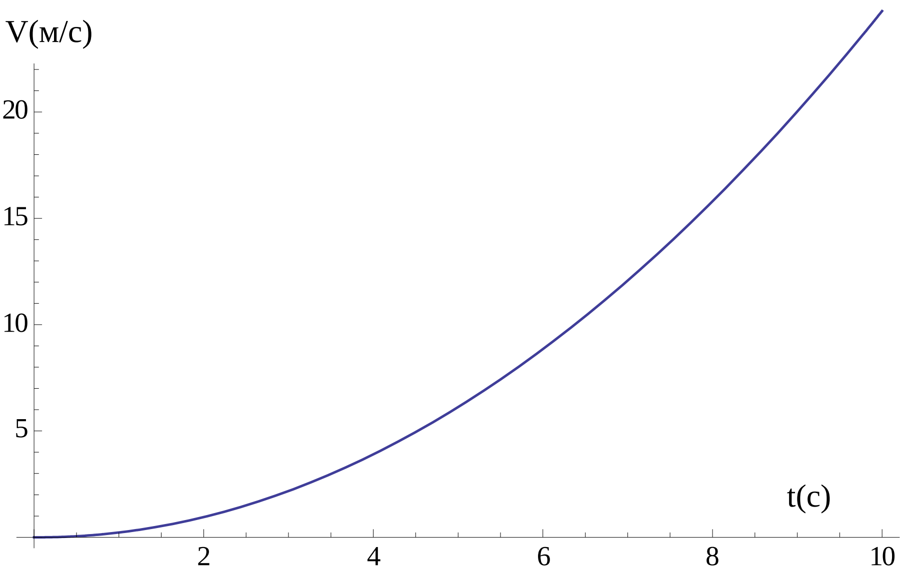

Рис. 13. К выводу скорости

§3. Уравнения движения автомобиля как абсолютно твердого тела

Рассмотрим автомобиль массой m, имеющий форму прямоугольника длиной d и шириной l. Центр масс данного тела движется по окружности с начальным радиусом R и находится на расстоянии x_C от левого крыла и z_C от переднего бампера. Профили передних колёс повёрнуты на угол φ относительно задних (рис. 14).

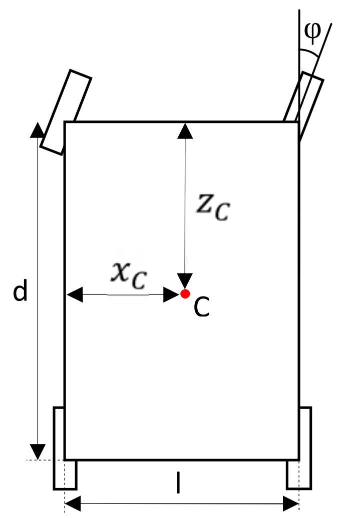

Рис. 14. К выводу уравнения движения

Сила тяжести, сонаправленная с ускорением свободного падения, и центробежная сила инерции, направленная по нормали от центра окружности, приложены к центру масс тела. К передним колёсам приложены две силы трения качения, направленные параллельно колёсам передней оси в сторону движения автомобиля, и две силы сцепления, направленные перпендикулярно силам трения. На задние колёса действуют две силы тяги, параллельные профилям колёс, и две силы сцепления, направленные к центру окружности (рис. 15).

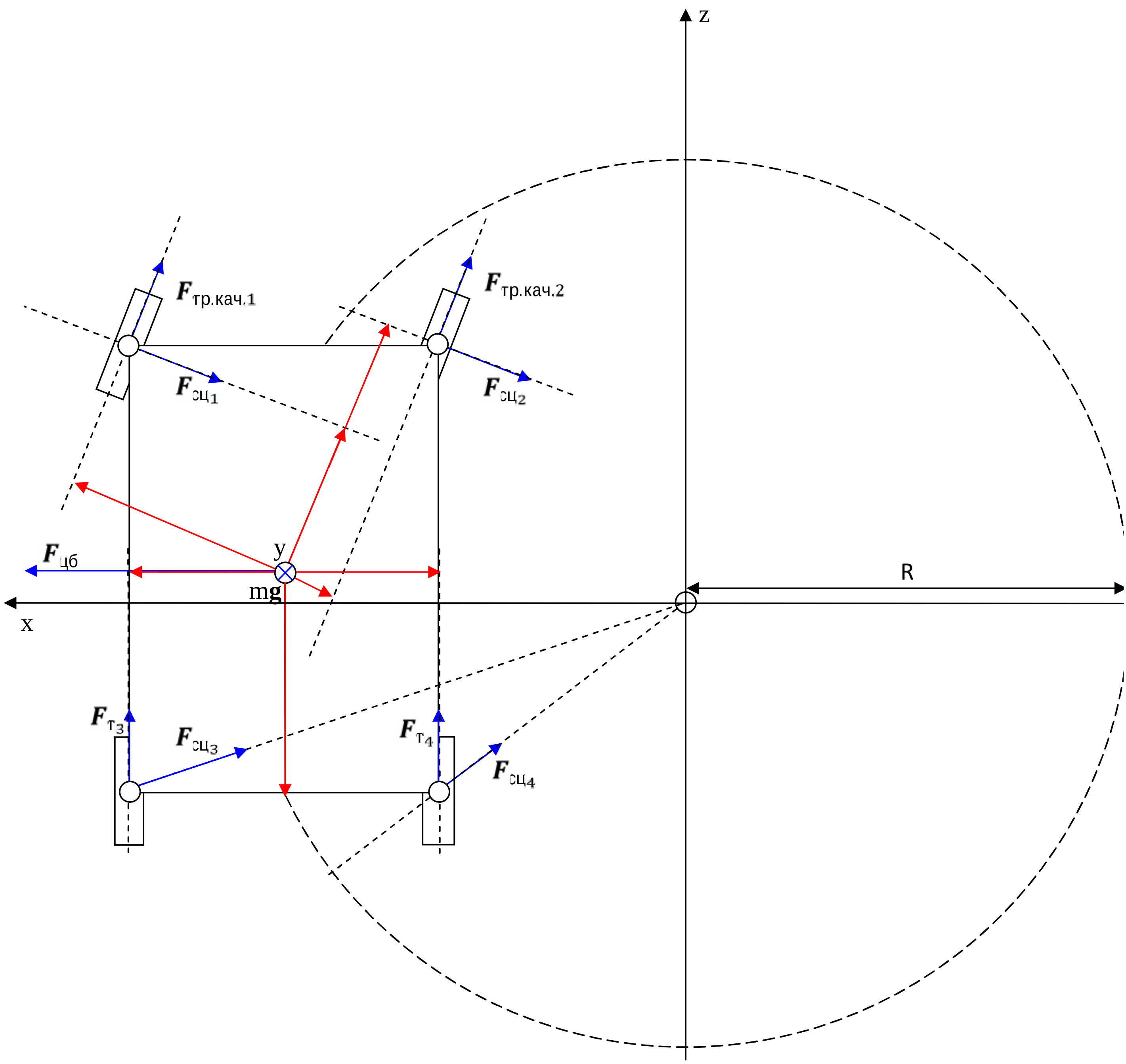

Рис. 15. К выводу уравнения движения

Запишем уравнение моментов относительно оси у, проходящей через центр масс и направленной вертикально вверх.

$$\vec{M}_{mg}+\vec{M}\ +\vec{M}_{\cdot\ \cdot 1}+\vec{M}_{\cdot\ \cdot 2}+\vec{M}_{1}+\vec{M}_{2}+\vec{M}_{3}+\vec{M}_{4}+\vec{M}_{3}+\vec{M}_{4}=I\vec{\varepsilon}\ ; \qquad (43)$$

$$\begin{gathered}
y:((z_C-x_C sin\varphi cos\varphi)sin\varphi+x_C cos\varphi)F_{тр.кач._1}+(l-x_C-x_C sin\varphi cos\varphi)cos\varphi F_{тр.кач._2}+\\
+((z_C-x_C sin\varphi cos\varphi)cos\varphi)F_{сц_1}+((l-x_C-x_C sin\varphi cos\varphi)sin\varphi+z_C cos\varphi)F_{сц_2}+\\
+\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(x_C+R+d-z_C+\sqrt{(R+x_C)^2+(d-z_C)^2})(x_C+R+\sqrt{(R+x_C)^2+(d-z_C)^2})}}{\frac{1}{2}\sqrt{(R+x_C)^2+(d-z_C)^2}}\cdot\\
\cdot\sqrt{((2x_C+d-z_C+\sqrt{(R+x_C)^2+(d-z_C)^2})((x_C+R+d-z_C)F_{\ 3}}+\\
+\frac{2R(d-z_C)}{\sqrt{(-l+R+x_C)^2+(d-z_C)^2}}F_{сц_4}+x_C F_{m_3}+(l-x_C)F_{m_4}=I\varepsilon_y
\end{gathered}\ ; \qquad (44)$$

$$\begin{gathered}
((z_C-x_C sin\varphi cos\varphi)sin\varphi+x_C cos\varphi)\frac{kN_1}{r}+(l-x_C-x_C sin\varphi cos\varphi)cos\varphi\frac{kN_2}{r}+\\
+((z_C-x_C sin\varphi cos\varphi)cos\varphi)\kappa N_1+((l-x_C-x_C sin\varphi cos\varphi)sin\varphi+z_C cos\varphi)\kappa N_2+\\
+\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(x_C+R+d-z_C+\sqrt{(R+x_C)^2+(d-z_C)^2})(x_C+R+\sqrt{(R+x_C)^2+(d-z_C)^2})}}{\frac{1}{2}\sqrt{(R+x_C)^2+(d-z_C)^2}}\cdot\\
\cdot\sqrt{((2x_C+d-z_C+\sqrt{(R+x_C)^2+(d-z_C)^2})((x_C+R+d-z_C)\kappa N_3}+\\
+\frac{2R(d-z_C)}{\sqrt{(-l+R+x_C)^2+(d-z_C)^2}}\kappa N_4+x_C\frac{M}{r}+(l-x_C)\frac{M}{r}=mR^2\gamma''_t
\end{gathered}\ ; \qquad (45)$$

Получим дифференциальное уравнение:

$$\gamma''_t = ((z_C - x_C sin\varphi cos\varphi) sin\varphi + x_C cos\varphi)\frac{k(l-x_C)mg + \frac{y_C mV^2}{R}}{2lmR^2 r} + (l - x_C - x_C sin\varphi cos\varphi) cos\varphi \cdot$$

$$\cdot \frac{kx_C mg - \frac{y_C mV^2}{R}}{2lmR^2 r} + \frac{((z_C - x_C sin\varphi cos\varphi) cos\varphi)\kappa(l-x_C)mg + \frac{y_C mV^2}{R}}{2lmR^2} +$$

$$+ \frac{((l - x_C - x_C sin\varphi cos\varphi) sin\varphi + z_C cos\varphi)\kappa(x_C mg - \frac{y_C mV^2}{R})}{2lmR^2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(x_C + R + d - z_C + \sqrt{(R+x_C)^2 + (d-z_C)^2})(x_C + R + \sqrt{(R+x_C)^2 + (d-z_C)^2}))}}{\frac{1}{2} mR^2 \sqrt{(R+x_C)^2 + (d-z_C)^2}} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{((2x_C + d - z_C + \sqrt{(R+x_C)^2 + (d-z_C)^2})((x_C + R + d - z_C)\kappa} \frac{(l-x_C)mg + \frac{y_C mV^2}{R}}{2l} +$$

$$+ \frac{2R(d-z_C)}{mR^2 \sqrt{(-l+R+x_C)^2 + (d-z_C)^2}} \kappa \frac{x_C mg - \frac{y_C mV^2}{R}}{2l} + x_C \frac{M}{mR^2 r} + (l - x_C)\frac{M}{mR^2 r};$$

(46)

Заключение

Была поставлена задача разработки и исследования математической модели заноса автомобиля. Выполнены содержательная и концептуальная постановки задачи, а также частично математическая постановка. Для разработки модели были решены следующие задачи:

- Определена сила реакции опоры автомобиля в зависимости от радиуса поворота и линейной скорости автомобиля.
- Определена линейная скорость точки колеса в зависимости от вращающего момента двигателя.
- Получено представление о том, когда колесо теряет сцепление с поверхностью дороги.

Планируется:

- Связать угол поворота колес с радиусом поворота и линейной скоростью.
- Вывести условие потери контакта между колесом и поверхностью дороги.

- Связать момент потери контакта колеса и дорожного покрытия с законом движения автомобиля как абсолютно твердого тела.
- Завершить решение задачи, описанной в *§3*, чтобы получить уравнение движения автомобиля как абсолютно твердого тела.

Список литературы

1. http://ru.wikipedia.org/wiki/%C7%E0%E4%ED%E8%E9_%EF%F0%E8%E2%EE%E4
2. http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%E5%F0%E5%E4%ED%E8%E9_%EF%F0%E8%E2%EE%E4
3. http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%EE%EB%ED%FB%E9_%EF%F0%E8%E2%EE%E4