Краевой конкурс творческих работ учащихся

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

Моделирование распространения эпидемии простуды

Рогожников Алексей Витальевич,

11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Шабрыкина Наталья Сергеевна,

доцент ПНИПУ, к.ф.-м. н.

Пермь. 2012.

Введение

Большинство жителей, крупных городов ежедневно испытывают страх в связи с возможностью заразится каким-либо инфекционным заболеванием. Считают, что за последние годы опасность заразится инфекционными заболеваниями увеличилась в несколько раз.

Самые опасные заболевания: ОРВИ, ветрянка, разные виды гриппа, желудочно-кишечные инфекции, чесотка.

В этих условиях особое значение приобретают опережающие научные исследования по анализу и прогнозу вероятных сценариев развития эпидемий опасных инфекционных заболеваний, которые могут появиться в результате чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера.

Концептуальная постановка задачи

Рассматривается процесс распространения простуды среди изолированной группы людей фиксированного размера. С помощью решения данной задачи можно выявить: время полного излечивания или заражения людей, развитие эпидемии, определить, как изменяется со временем численность каждой из групп для различных: коэффициентов, размера группы и начального числа инфицированных, выявить характерные сценарии развития эпидемии.

Параметры, которые будем использовать в модели: начальное количество инфицированных и подверженных людей, коэффициенты заражения и излечивания.

Допущения:

• Группа людей изолирована от внешнего мира.

• Болезнь передаётся только при контакте с инфицированным человеком.

• Во время проведения исследования количество людей остаётся постоянным.

Математическая постановка

Математическая модель эпидемии представляет собой систему дифференциальных уравнений, составленную на основе заданных условий:

- Болезнь может передаваться только при непосредственном контакте с инфицированным человеком
- Изменение числа инфицированных увеличивается пропорционально количеству подверженных
- Количество подверженных изменяется таким образом, чтобы общая численность группы сохранялась
- Каждый человек из рассматриваемой группы может быть отнесён к одной из двух категорий, численность которых зависит от времени:
    - Подверженные инфекции (могут быть инфицированы)
    - Инфицированные

Эпидемический процесс:

$$\frac{dS(t)}{dt} = I(t) \cdot \left(\beta - \alpha \cdot S(t)\right) \tag{1}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = I(t) \cdot (\alpha \cdot S(t) - \beta) \tag{2}$$

где: t – время развития инфекционного процесса; $S(t)$ – подверженные инфекции (могут быть инфицированы); $I(t)$ – инфицированные; α – коэффициент передачи болезни; β – коэффициент излечивания; $I(0)$ – начальное количество инфицированных людей; $N(0)$ – численность группы;

А также для решения дифференциальных уравнений были заданы начальные условия:

N(0)=1500

I(0):=100

$S(0)=1400$

$\alpha=0.0002$

$ß=0.1$

Методы решения

Задача была решена аналитически с помощью математического пакета Maple. Исходный код программы представлен в приложении. Конечным аналитическим решением является формула:

$$S(t)=\frac{-\dfrac{e^{\left(\left(-\mathrm{I}_0+\beta-S_0\alpha\right)t\right)}\left(-\mathrm{I}_0+\beta-S_0\alpha\right)\left(\beta-S_0\alpha\right)}{\left(-1+\dfrac{e^{\left(\left(-\mathrm{I}_0+\beta-S_0\alpha\right)t\right)}\left(\beta-S_0\alpha\right)}{\mathrm{I}_0\alpha}\right)\mathrm{I}_0\alpha}}{\alpha} \qquad (3)$$

$$I(t)=\frac{\left(\dfrac{\left(e^{\left(\left(-\mathrm{I}_0+\beta-S_0\alpha\right)t\right)}\right)^2\left(-\mathrm{I}_0+\beta-S_0\alpha\right)^2\left(\beta-S_0\alpha\right)^2}{\left(-1+\dfrac{e^{\left(\left(-\mathrm{I}_0+\beta-S_0\alpha\right)t\right)}\left(\beta-S_0\alpha\right)}{\mathrm{I}_0\alpha}\right)^2\mathrm{I}_0^2\alpha^2}-\dfrac{e^{\left(\left(-\mathrm{I}_0+\beta-S_0\alpha\right)t\right)}\left(-\mathrm{I}_0+\beta-S_0\alpha\right)^2\left(\beta-S_0\alpha\right)}{\left(-1+\dfrac{e^{\left(\left(-\mathrm{I}_0+\beta-S_0\alpha\right)t\right)}\left(\beta-S_0\alpha\right)}{\mathrm{I}_0\alpha}\right)^2\mathrm{I}_0^2\alpha^2}\right)\left(-1+\dfrac{e^{\left(\left(-\mathrm{I}_0+\beta-S_0\alpha\right)t\right)}\left(\beta-S_0\alpha\right)}{\mathrm{I}_0\alpha}\right)\mathrm{I}_0}{e^{\left(\left(-\mathrm{I}_0+\beta-S_0\alpha\right)t\right)}\left(-\mathrm{I}_0+\beta-S_0\alpha\right)\left(\beta-S_0\alpha\right)} \qquad (4)$$

Результаты решения

В результате решения поставленной задачи получается график зависимости численности подверженных и инфицированных людей от времени (Рис. 1).

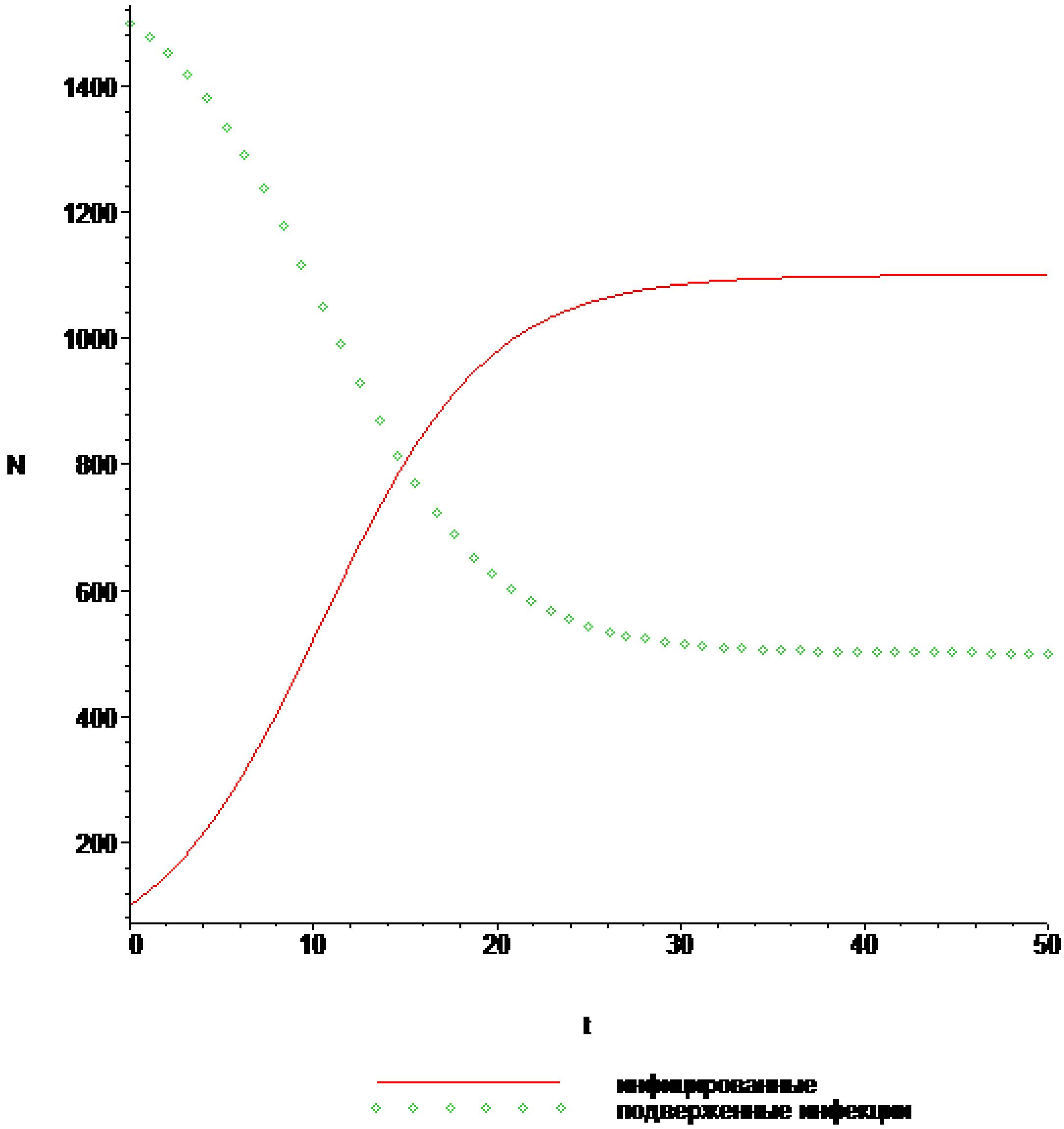

Рис. 1. График зависимости численности инфицированных и подверженных инфекции людей от течения времени.

Из Рис.1. следует, что число инфицированных людей увеличивается пропорционально уменьшению подверженных инфекции. За первые пятнадцать дней число обеих групп сравняется, а через последующие ещё пятнадцать дней будут такие же прогнозы как за первый интервал времени пока число инфицированных не дойдёт до 1100 человек, а подверженных инфекции – 500. После первых тридцати дней это число будет сохраняться.

При изменении начальных условий α=0.002 и ß=0.5 получается следующая ситуация:

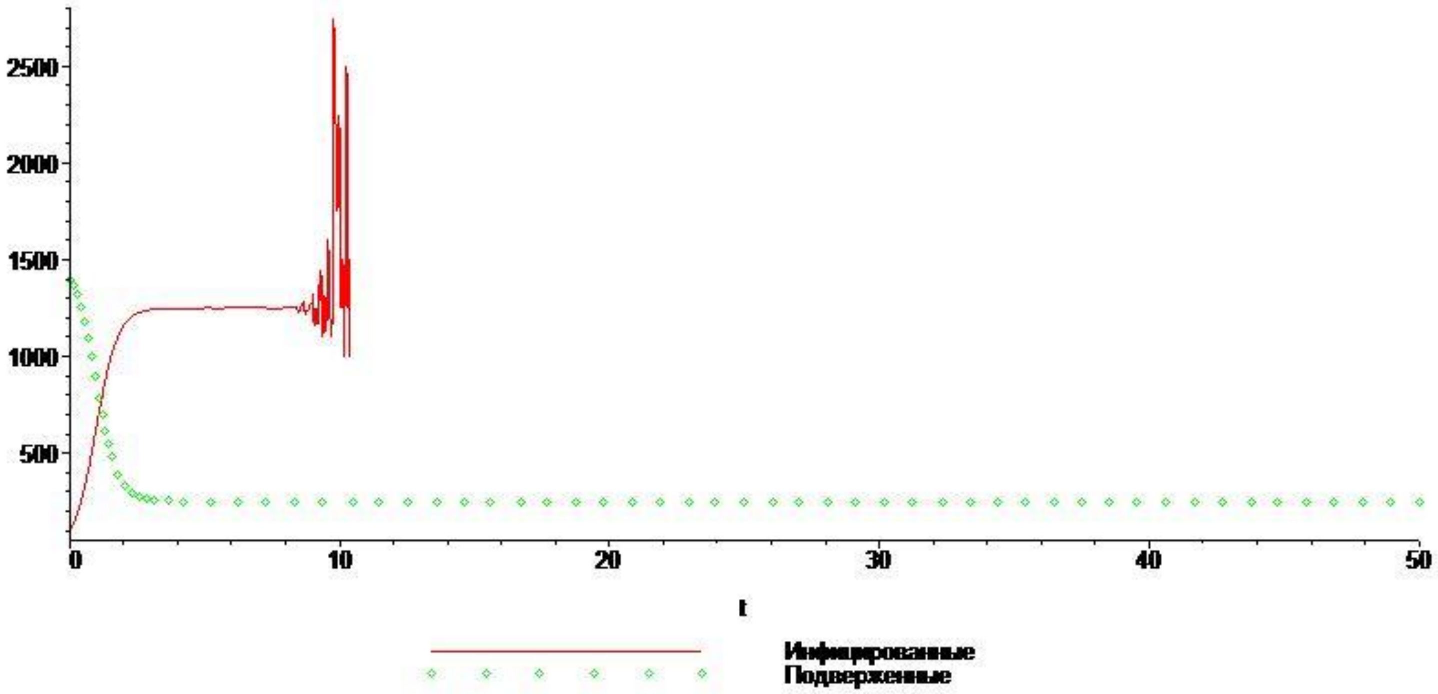

Рис.2. График зависимости численности инфицированных и подверженных инфекции людей от течения времени.

Из Рис. 2. видно, что данная модель не совсем адекватна. После 10 дней все инфицированные умирают и количество подверженных инфекции людей упало до 250 человек, что запрещено допущениями, описанными в «Концептуальной постановке задачи»

Изменяя количество подверженных и инфицированных людей до 500 и 1000 соответственно и α=0.000002, ß=0.7, получается рисунок №3.

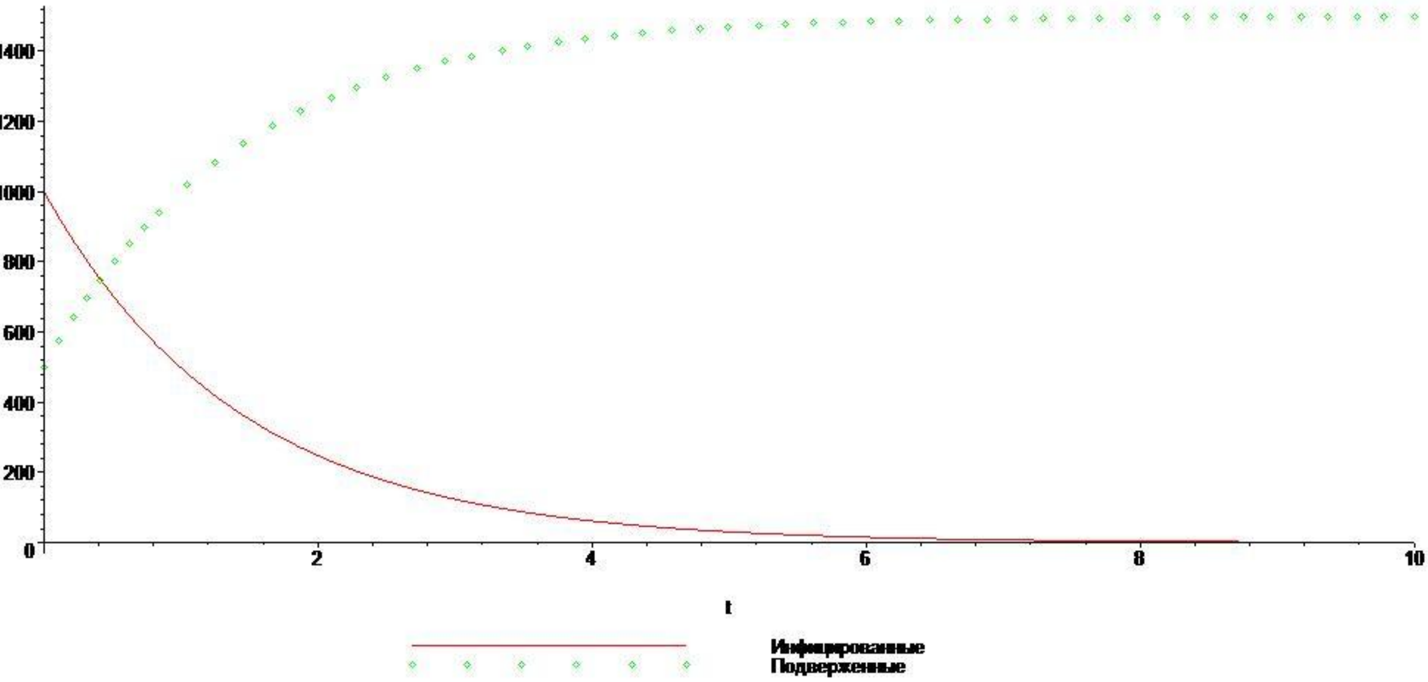

Рис.3. График зависимости численности инфицированных и подверженных инфекции людей от течения времени.

Из Рис. 3. следует, что при коэффициенте излечения (ß) большем во много раз чем коэффициент заражения (α), эпидемия спадает быстрее. Эпидемия проходит всего за 9 дней.

Заключение

Выше была приведена модель распространения эпидемии, которая показывала процесс распространения простуды среди изолированной группы людей фиксированного размера на основе зависимостей. По этой модели видно, что после первых пятнадцати дней число инфицированных превзойдёт число подверженных. Конечно, данная модель не учла всех тонкостей, например, болезнь передаётся только при контакте с инфицированным человеком или группа людей изолирована от внешнего мира, иначе эту модель рассматривать было бы гораздо сложнее.

В ходе работы были установлены зависимости численности подверженных и инфицированных людей от времени и отображены на график, из которого видно, что, чем резче возрастает функция инфицированных людей от времени, тем эпидемия распространяется быстрее и наоборот.

Приложение

```
alpha:=0.0002;
beta:=0.1;
N0:=1500;
I0:=100;
S0:=N0-I0;
Eq1:=diff(S(t),t)=i(t)*(beta-alpha*S(t));
Eq2:=diff(i(t),t)=i(t)*(alpha*S(t)-beta);
Sol:=dsolve({Eq1,Eq2, i(0)=I0, S(0)=S0}, {i(t), S(t)});
It:=eval(i(t), Sol):
St:=eval(S(t), Sol):
plot([It,St],t=0..90,color=[red,green],style=[polygon,point],
legend=["Инфицированные","Подверженные"]);
```