Краевой конкурс творческих работ учащихся

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Кубические уравнения

Рожкова Елена Александровна,

11 кл., МАОУ «Лицей №10», г. Перми

Гасанова Светлана Керимовна,

учитель математики МАОУ «Лицей №10»

Пермь. 2012.

Содержание

Введение

Я считаю, что тема «Уравнения», в том числе кубические, очень важна для математики. Множество различных алгебраических и геометрических задач сводятся к какому-либо уравнению. Линейные уравнения мы знаем с самых ранних лет, с начальной школы, с квадратными познакомимся в этом году, а вот кубические уравнения в школьном курсе математики решают в старших классах, делают это обычно графическим способом или методом разложения на множители. Мне захотелось выяснить, как можно решить кубические уравнения аналитическим способом, какие существуют формулы для их решения и когда математики нашли эти формулы. Перед собой я поставила **цель**: узнать о кубических уравнениях больше, чем позволяет школьная программа, научиться их решать. Для достижения цели необходимо решить следующие **задачи:**

- получить сведения об истории изучения решения кубических уравнений
- узнать способы решения кубических уравнений
- познакомиться с формулами для их решения

I.История изучения решения кубических уравнений

1.1. Что такое кубическое уравнение?

Кубическое уравнение – это уравнения вида

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

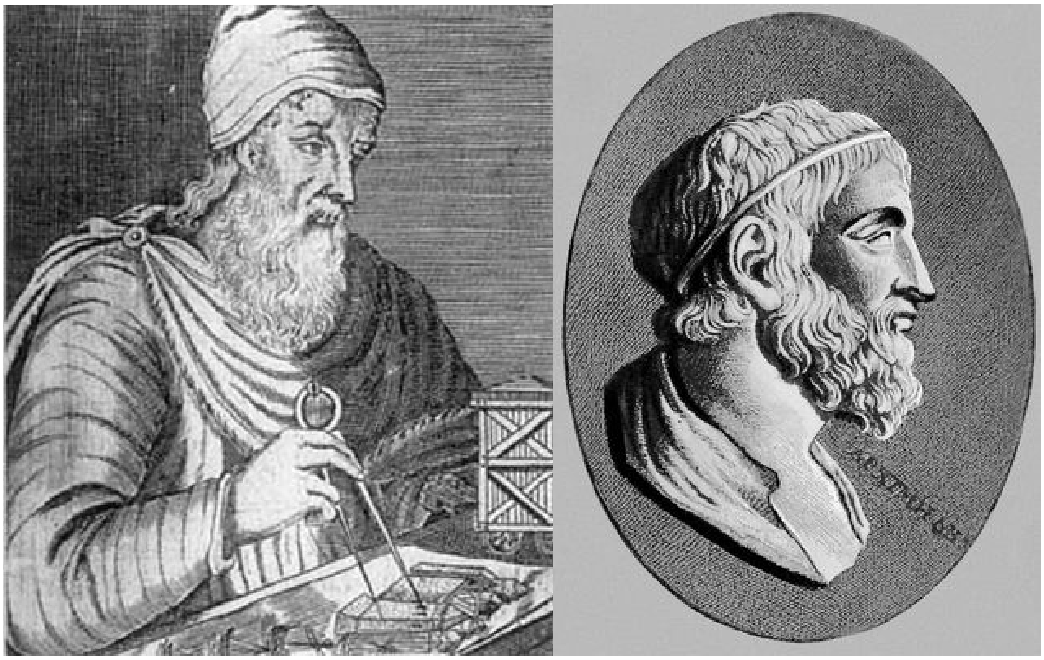
Это кубическое уравнение называется неприведённым, существуют также приведённые кубические уравнения:

$$x^3 + px + q = 0$$

Если квадратные уравнения умели решать ещё математики Вавилонии и Древней Индии, то кубические, оказались «крепким орешком».

1.2. Арабские геометры-алгебраисты и решение кубических уравнений.

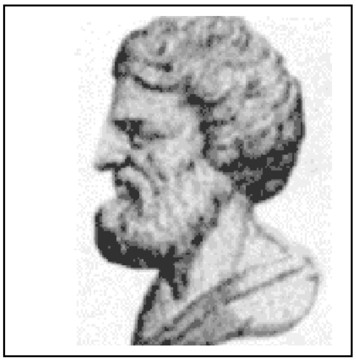
Первый импульс к изучению кубических уравнений связан с задачей Архимеда, изложенной в его трактате «О шаре и цилиндре», задача состояла в нахождении сечения сферы с плоскостью так, чтобы отношение объёмов двух полученных сферических сегментов было равно заданному. Геометрическое решение этой задачи с помощью пересечения двух конических сечений принадлежит Евтокию Аскалонскому (около 500 год), который опирался на рукопись Архимеда, решившего задачу. Архимед также провёл её полное исследование.



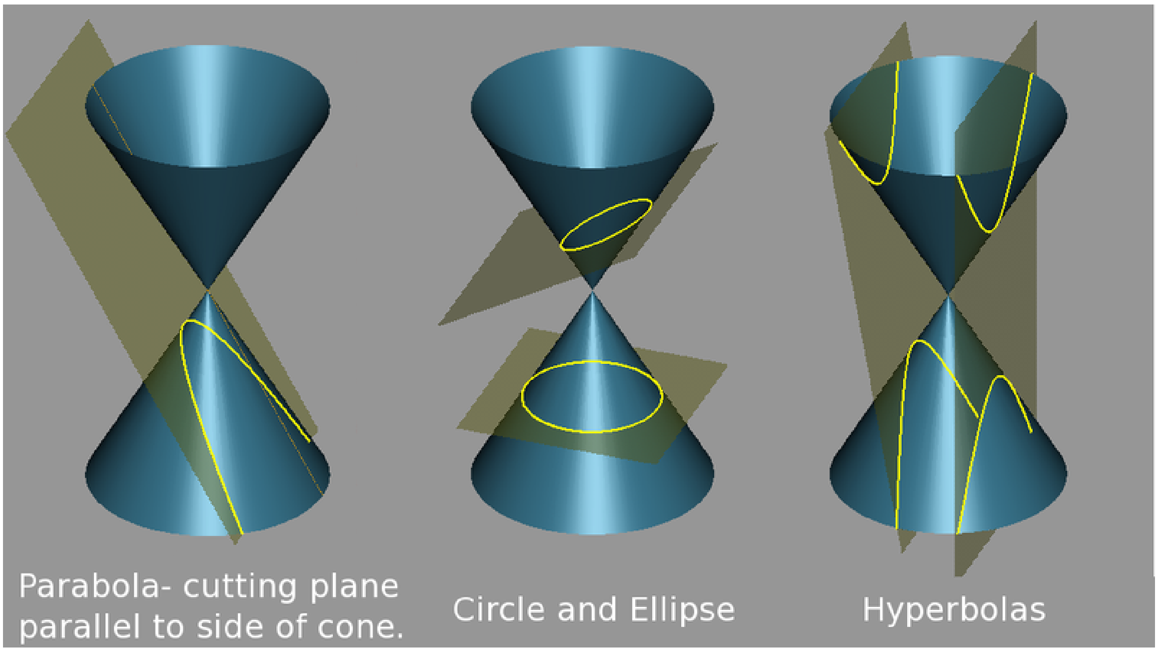
Архимед (около 287 - 212 до н. э.)

Первым, кто снова заинтересовался этой задачей был ал-Махани. Он стремился в первую очередь придать ей алгебраическую форму, а именно «равенство куба и числа квадрату», т. е. форму уравнения типа $\mathbf{x^3 + r = px^2}$. Но ему не удалось построить корень этого уравнения. Многие математики X века, среди которых были Абу Джафар ал-Хайзен, Ибн ал-Хайсам и другие, вернулись к ряду задач, унаследованных от александрийцев: удвоение куба, трисекция угла, построение правильных многоугольников, вписанных в окружность, в частности с семью и девятью сторонами. Но все эти задачи приводят к уравнениям третьей степени и, следовательно, неразрешимы при помощи циркуля и линейки, что было доказано Вантцелем в 1837 году.

Таким образом, задачи этого рода были вызовом арабским геометрам и служили предметом споров; им пришлось обратиться не к прямой и окружности, а к другим кривым – к коническим сечениям Аполлония.



Аполлоний (262 до н. э. — 190 до н. э)



Конические сечения: парабола, эллипс, гипербола


Ибн ал-Хайсам (965-1093)

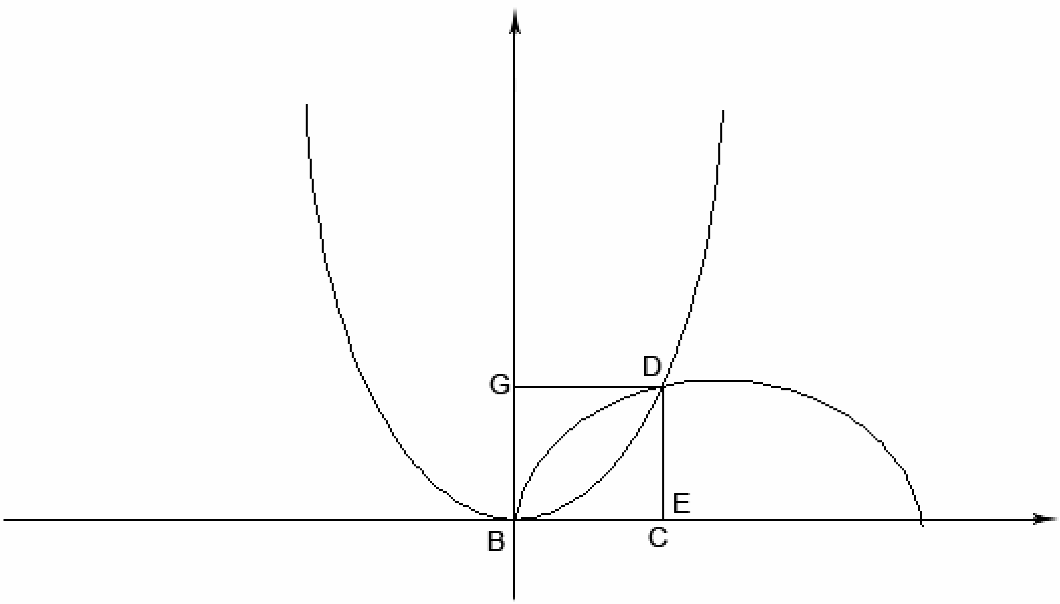
Ибн ал-Хайсам, известный в Западной Европе под именем Альгазен, выходец из Басры в Ираке, жил в Каире. Он был математиком, физиком, астрономом и врачом. Его работы в области оптики, физиологии зрения, отражения и преломления света оказали значительное влияние на учёных Запада, в частности на Кеплера, Декарта, Гюйгенса. Он решил указанную задачу Архимеда при помощи параболы и гиперболы, и одновременно с этим нашёл её приближенное решение. Однако в этих решениях ещё отсутствуют алгебраические выражения.

Многочисленность, а также важность задач, сводящихся к уравнениям третьей степени, вызывали необходимость создания более систематической теории таких уравнений.

Эта теория принадлежит математику Ал-Хайями.

В трактате «Рисала» Ал-Хаями объяснил, что алгебра-это теория уравнений, правая и левая часть которых многочлены. Неизвестные величины могут быть и целыми числами, и непрерывными величинами, и их нахождение требует как численных решений, так и геометрических. Ал-Хаями признавал неудачу своей попытки найти решение кубических уравнений «в радикалах», но высказал пожелание: «быть может, кто-нибудь из тех, кто придёт после нас это осуществит». Что касается геометрических решений, то Ал-Хаями указывал, что в случае кубических уравнений следует опираться на две первые книги аполлониевых «Конических сечений», поскольку евклидовых «Начал» недостаточно.

В трактате Ал-Хаями содержалась классификация уравнений и геометрических построений корней, при помощи которых определяется число и наличие положительных корней. Уравнения исследовались в общем виде, однако выражены были целиком в словесной форме.



Ал-Хаями решил уравнение $\mathbf{x^2 + ax = b}$ с помощью пересечения окружности $\mathbf{x^2 + y^2 = qx}$ и параболы $\mathbf{x^2 = py}$.

Абсцисса точки пересечения этих кривых, не совпадающей с началом координат, есть корень данного уравнения. Точно также этот метод применялся для решения другого уравнения $\mathbf{x^3 = ax + b}$.

Некоторые другие моменты, связанные с геометрической теорией кубических уравнений ал-Хаями, но практически отсутствующие в его книге, более ясно проявились у одного из его последователей Шараф ад-Дина ат-Туси: речь идёт об исследовании свойств кривых для установления их пересечений, их непрерывности, выпуклости, асимптотического поведения.

Долгое время никто не мог найти общий метод для решения кубических уравнений, и даже в конце XV математик Лука Пачоли в своём знаменитом учебнике «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности» ставил эту задачу в один ряд с задачей о квадратуре круга. И всё же усилиями итальянских алгебраистов такой метод был найден.

1.3. Вклад итальянских алгебраистов эпохи Возрождения в решение кубических уравнений.

В 1500 году гражданин Болоньи, очень известный профессор математики Сципион дель Ферро (1456-1526)
дал формулу решения уравнения $\mathbf{x^3 + ax = b}$, где $\mathbf{a, b>0}$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Свой способ решения кубических уравнений дель Ферро изложил в рукописи, которую передал своему зятю и преемнику по кафедре Аннибалу дела Наве. Этот же способ он сообщил своему математических поединках и диспутах.

На одном из диспутов Антонио Фиоре предложил учителю математики из Бешиа Жуану де Кои задачи на решение кубических уравнений, и тот обратился за помощью к своему другу Николо Тарталье. Тарталья сумел продвинуться в решении этих задач (среди которых были, например, кубические уравнения $\mathbf{x^3 + 6x^2=5}$ и $\mathbf{x^3 + 6x^2 + 8x = =1000}$) и публично заявил об этом. Фиоре, сочтя это заявление пустой похвальбой, вызвал Тарталью на поединок.

Николо Тарталья (1499-1557)

Буквально накануне поединка Тарталья нашёл формулу для решения кубического уравнения $\mathbf{x^3 + ax = b}$, где $\mathbf{a, b > 0}$.
Это позволило ему решить все предложенные задачи. Фиоре, не ожидавший такого поворота, не смог справиться с задачами Тартальи. Чуть позже Тарталья нашёл способ для решения уравнений вида $\mathbf{x^3 = ax + b}$, где $\mathbf{a, b > 0}$. Тарталья обнаружил также, что решение уравнения $\mathbf{x^3 + b = = ax}$ позволяет решить уравнение

$$\mathbf{x^3=ax + b},$$

поскольку положительные корни одного из них равны модулям отрицательных корней другого. Ученику Антонио Фиоре, который использовал его при составлении задач на кубические уравнения для участия в публичных диспутах.

Джироламо Кардано (1501-1576)

В 1536 году об открытии Тартальи узнал Джироламо Кардано, известный математик и врач. Он затратил громадные усилия для того, чтобы выманить этот секрет у Тартальи. Только в 1559 году, клятвенно пообещав хранить секрет в тайне, Кардано получил правило, записанное в стихах из 25-ти строк. Не без труда разобравшись в этом правиле (несколько раз Кардано обращался за помощью к Тарталье), хитрец нарушил обещание и опубликовал формулу в своей книге «Великое искусство». Книга стала знаменитой. И теперь формула, открытая Тартальей, известна как «формула Кардано».

Эта история привела к обострению отношений между Кардано и Тартальей. Последний пытался отстоять свой приоритет. Имущественное и общественное положение Тартальи и Кардано было разным. Бедняк Тарталья не имел поддержки, к тому же на стороне Кардано начал выступать его ученик Луиджи Феррари, уже овладевший методом решения уравнений четвёртой степени. В 1547 году в Милане состоялся поединок между Тартальей и Феррари, где более искушённый в дискуссиях Феррари, по-видимому, одержал победу.

II.Решение кубических уравнений

2.1. Упрощение

Если кубическое уравнение вида

$$\mathbf{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}, \text{ где } \mathbf{a \neq 0},$$

разделить на **a**, то коэффициент при $\mathbf{x^3}$ станет равен 1. Поэтому в дальнейшем будем исходить из уравнения

$$\mathbf{x^3 + Px^2 + Qx + R = 0}. \ (1)$$

Так же как в основе решения квадратного уравнения лежит формула квадрата суммы, решение кубического уравнения опирается на формулу куба суммы:

$$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}.$$

Чтобы не путаться в коэффициентах, заменим здесь **a** на **x** и перегруппируем слагаемые:

$$\mathbf{(x + b)^3 = x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3}. \ (2)$$

Мы видим, что надлежащим выбором **b**, а именно взяв **b = P/3**, можно добиться того, что правая часть этой формулы будет отличаться от левой части уравнения (1) только коэффициентом при **x** и свободным членом. Сложим уравнения (1) и (2) и приведём подобные:

$$(\mathbf{x + b})^3 + (\mathbf{Q} - 3\mathbf{b}^2)\mathbf{x} + \mathbf{R} - \mathbf{b}^3 = 0$$

Если здесь сделать замену $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{b}$, получим кубическое уравнение относительно **y** без члена с $\mathbf{y}^2$:

$$\mathbf{y}^3 + \mathbf{py} + \mathbf{q} = 0$$

Мы показали, что в кубическом уравнении (1) с помощью подходящей подстановки можно избавиться от члена, содержащего квадрат неизвестного. Поэтому теперь будем решать приведённое кубическое уравнение, уравнение вида

$$\mathbf{x}^3 + \mathbf{px} + \mathbf{q} = 0. \quad (3)$$

2.1.Формула Кардано.

Давайте ещё раз обратимся к формуле куба суммы, но запишем её иначе:

$$(\mathbf{a + b})^3 = \mathbf{a}^3 + \mathbf{b}^3 + 3\mathbf{ab}(\mathbf{a + b}).$$

Сравните эту запись с уравнением (3) и попробуйте установить связь между ними. Даже с подсказкой это не просто. Надо отдать должное математикам эпохи Возрождения, решившим кубическое уравнение, не владея буквенной символикой. Подставим в нашу формулу $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$:

$$\mathbf{x}^3 = \mathbf{a}^3 + \mathbf{b} + 3\mathbf{abx}, \text{ или}$$

$$\mathbf{x}^3 - 3\mathbf{abx} - (\mathbf{a}^3 + \mathbf{b}^3) = 0.$$

Теперь уже ясно: для того, чтобы найти корень уравнения (3), достаточно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{a}^3 + \mathbf{b}^3 = -\mathbf{q} \\ 3\mathbf{ab} = -\mathbf{p}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{a}^3 + \mathbf{b}^3 = -\mathbf{q} \\ \mathbf{a}^3\mathbf{b}^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3, \end{cases}$$

и взять в качестве **x** сумму **a** и **b**. Заменой $\mathbf{u} = \mathbf{a}^3$, $\mathbf{v} = \mathbf{b}^3$ эта система приводится к совсем простому виду:

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \mathbf{v} = -\mathbf{q} \\ \mathbf{uv} = -\left(\frac{p}{3}\right)^3. \end{cases}$$

Дальше можно действовать по-разному, но все «дороги» приведут к одному и тому же квадратному уравнению. Например, согласно теореме Виета, сумма корней приведённого квадратного уравнения равна коэффициенту при **x** со знаком минус, а произведение – свободному члену. Отсюда следует, что **u** и **v** – корни уравнения

$$\mathbf{t^2 + qt - (p/3)^3 = 0.}$$

Выпишем эти корни:

$$\mathbf{t}_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Переменные **a** и **b** равны кубическим корням из $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$, а искомое решение кубического уравнения (3) – сумма этих корней:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Эта формула известна как **формула Кардано.**

Если коэффициенты кубического уравнения—действительные числа, то вопрос о характере его корней зависит от знака выражения $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$,

- если $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, то уравнение имеет три различных корня, один из них действительный;
- если $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, то все три корня действительны, два из них равны;
- если $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, то все три корня действительные и различные.

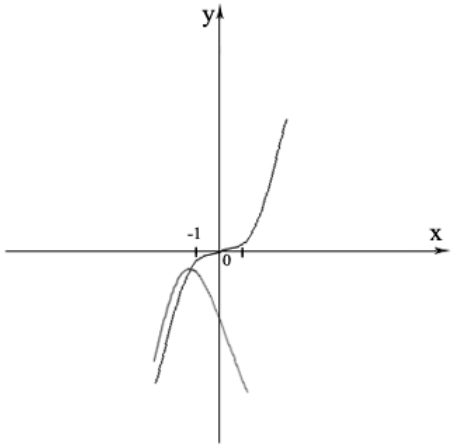
III. Примеры решения уравнений

Рассмотрим решение кубических уравнений

1) $x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0$

1способ. Графический.

Преобразуем уравнение $x^3 = -4x^2 - 6x - 3$. Построим графики функций $y = x^3$ и $y = -4x^2 - 6x - 3$.



Видим, что уравнение имеет один корень, его значение можно найти подстановкой.

2 способ. Воспользуемся теоремой: все рациональные корни приведенного уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

Перечислим делители свободного члена: $\pm 1, \pm 3$. Подставляя числа в уравнение, получим корень $x_1 = -1$. Разделим многочлен $x^3 + 4x^2 + 6x + 3$ на двучлен $x + 1$. Получим квадратный трехчлен $x^2 + 3x + 3$. Уравнение $x^2 + 3x + 3 = 0$ действительных корней не имеет.

3 способ. Воспользуемся формулой Кардано.

Выполним замену $x = y - \frac{4}{3}$, получим уравнение $y^3 + \frac{2}{3}y - \frac{7}{27} = 0$

найдем значение выражения $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{81}{27^2 \cdot 4}$, тогда

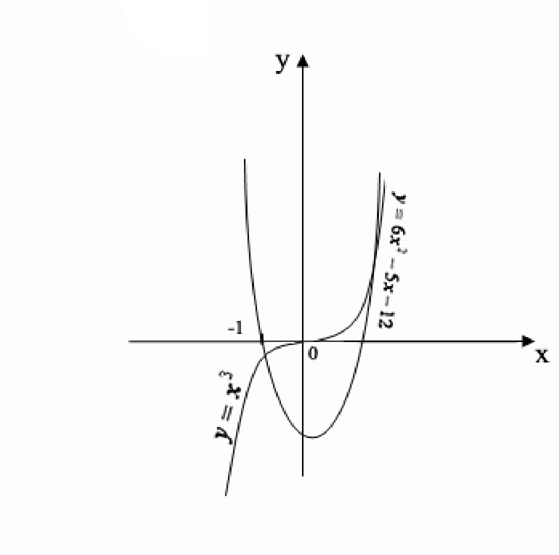
$$y = \sqrt[3]{\frac{7}{54} + \sqrt{\frac{81}{27^2 \cdot 4}}} + \sqrt[3]{\frac{7}{54} - \sqrt{\frac{81}{27^2 \cdot 4}}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

тогда $x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1$. Других действительных корней нет.

2) $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$

<u>1способ</u>. Графический.

Преобразуем уравнение $x^3 = 6x^2 - 5x - 12$. Построим графики функций $y = x^3$ и $y = 6x^2 - 5x - 12$.



Видим, что уравнение имеет три корня, их значения можно найти подстановкой.

<u>2 способ</u>. Воспользуемся теоремой: все рациональные корни приведенного уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

Рассмотрим делители свободного члена: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

Подставляя числа в уравнение, получим корень (-1). Разделим многочлен $x^3 - 6x^2 + 5x + 12$ на двучлен $x + 1$. Получим квадратный трехчлен $x^2 - 7x + 12$. Уравнение $x^2 - 7x + 12 = 0$ имеет два действительных корня $x_2 = 4$ и $x_3 = 3$.

<u>3 способ</u>. Воспользуемся формулой Кардано.

Выполним замену $x = y + 2$, получим уравнение $y^3 - 7y + 6 = 0$ найдем значение выражения $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{100}{27}$, тогда уравнение имеет три различных действительных корня. Преобразуем уравнение $y^3 - 6y - y + 6 = 0$, $y(y^2 - 1) - 6(y - 1) = 0$, $(y - 1)(y^2 + y - 6) = 0$, отсюда $y_1 = -3$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$.

Выполним обратную замену, получим $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$

Заключение

Перед собой я поставила цель: узнать о кубических уравнениях больше, чем позволяет школьная программа, научиться их решать. Для достижения цели я решила следующие задачи:

- получить сведения об истории изучения решения кубических уравнений
- узнать способы решения кубических уравнений
- познакомиться с формулами для их решения

Я поняла, насколько сложен вывод формулы для решения кубических уравнений и как долго к этому шли математики древности, математики эпохи Возрождения. Для них такие уравнения поначалу являлись новшеством. Огромный вклад в их изучение сделали арабы, ещё больший – итальянцы.

Я уверена, то, что я проделала в этой работе, обязательно поможет мне в будущем, ведь тема уравнений, в том числе кубических, всегда была и будет актуальной.

Список литературы

1. Ами Даан-Дальмедико, Жанна Пейффер «Пути и лабиринты: очерки из истории математики»
2. М.Аксенова «Энциклопедия для детей Аванта+. Математика»
3. Математический энциклопедический словарь./гл. ред. Ю.В. Прохоров.— М.: Сов. энциклопедия, 1988
4. Виленкин Н.Я.и др. Алгебра и математический анализ для 10 класса: Уч. Пособие—М.: Просвещение, 1995