

Краевой конкурс творческих работ учащихся
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Решение текстовых задач (проценты)

Шанев Евгений Витальевич,
8 кл., МБОУ «СОШ» №5, г. Чернушки

Макеева Любовь Семёновна,
учитель математики МБОУ «СОШ» №5

Пермь. 2012.

Оглавление

Введение.....	3
Основная часть	
1. Проценты	
1.1. Из истории процентов.....	4
1.2. Текстовые задачи.....	6
2. Задачи	
2.1. Задачи с процентами.....	7
2.2. Примеры задач с процентами.....	8
2.2.1. Нахождение числа по его проценту.....	8
2.2.2. Нахождение процента от числа.....	9
2.3. Задачи с процентами из ГИА.....	11
2.4. Простейшие задачи с процентами из ЕГЭ.....	12
Заключение.....	13
Библиографический список.....	14
Приложения.....	15

Введение

На итоговой аттестации по математике в 9 и 11 классах есть задачи на нахождение процента от числа или величины по заданному проценту. Мне необходима эта тема, потому что через год надо сдавать экзамен по математике (ГИА). Она актуальна, потому что задачи с процентами входят в контрольно-измерительные материалы. На ЕГЭ (единый государственный экзамен) в части В₁, В₁₃ и ГИА (государственная итоговая аттестация) нужно решить текстовую задачу, в которых встречаются смеси, сплавы, растворы и др., они решаются с помощью процентов. В своей работе я рассматриваю только простейшие задачи на заданную тему, потому что моего программного материала недостаточно для того, чтобы решить задачу на «сложные» проценты.

Объектом моей работы являются текстовые задачи с процентами. Я разобью свои задачи на группы: нахождение числа по его проценту; нахождение процента от числа и сравню способы решения.

Я постараюсь дать ответы на следующие вопросы:

- что такое проценты и кто ввел такое понятие.

Целью моей работы является:

- научиться решать более трудные задачи на проценты;
- подобрать задачи на проценты из ГИА или ЕГЭ прошедших лет.

В работе имеются биография и портрет бельгийского математика - Симона Стевина, который ввел понятие процента. Присутствует история происхождения знака %. Мною разобраны и решены 26 задачи, которые представлены в тексте. Среди них 5 задач аналогичных тем, что были приведены в контрольных измерительных материалах на ГИА.

При работе я использовал Интернет – ресурсы, журналы и книги, которые используются при подготовке к ГИА и урокам математики.

1. Проценты

1.1. Из истории процентов

Слово «процент» происходит от латинского «procentum», что буквально означает «на сотню». С этим термином связано имя - Симон Стевин.

(1548—1620) — бельгийский математик и инженер. Симон Стевин стал известен, прежде всего, своей книгой «Десятая», изданной на фламандском и французском языках в 1585 г. Именно после неё в Европе началось широкое использование десятичных дробей. Он же ввел понятие процента. В 1584 г. он опубликовал таблицы процентов (портрет в приложении).

В популярной литературе возникновение этого термина связывается с внедрением в Европе десятичной системы счисления в XV веке. Однако уже в «Дигестах Юстиниана», датируемых в V веке, мы находим вполне современное употребление процентов.

«Фиск не уплачивает проценты по заключенным им договорам, но сам получает проценты: например, от съемщиков приличных уборных, если эти съемщики слишком поздно вносят деньги; также при просрочке уплаты налогов. Когда же фиск является приемником частного лица, то обычно он уплачивает налоги.

Если должники, платившие проценты в размере меньше чем 6% в год, стали должниками фиска, то они обязаны уплачивать 6% годовых с того времени, как требование против них перешло к фиску».

По-видимому, процент возник в Европе вместе с ростовщичеством как предтеча десятичной системы счисления. Разрыв во времени заставляет вспомнить современные теории о лишних веках в общепринятой хронологии.

Употребление термина «процент» в качестве нормы русского языка начинается, вероятно, с конца XVIII века. Об этом свидетельствует сравнительный анализ текстов двух фундаментальных учебников по математике Ефима Войтяховского (первое издание 1795 год) и Т. Ф. Осиповского (первое издание 1802 год). В обоих учебниках имеется по несколько задач «на проценты по вкладу», но Е. Войтяховский оперирует исключительно сотыми долями, тогда как Т. Ф. Осиповский уже употребляет термин «процент».

Интересно происхождение обозначения процента. Существует версия, что знак % происходит от итальянского pro cento (сто), которое в процентных расчетах часто сокращенно писалось sto. Отсюда путем дальнейшего сокращения в скорописи буква t превратилась в наклонную черту «/», возник современный знак процента.

Схема возникновения знака процента

pro cento → *cento* → *cto* → *c/o* → %

1.2. Текстовые задачи

Текстовые задачи являются традиционным разделом на вступительных экзаменах. Как правило, основная трудность при решении текстовой задачи состоит в переводе её условий на математический язык уравнений. Общего способа такого перевода не существует. Однако многие задачи на вступительных экзаменах, достаточно типичны.

Стандартная схема решения таких задач включает в себя:

- 1) Выбор и обозначение неизвестных.
- 2) Составление уравнений (возможно неравенств) с использованием неизвестных и всех условий задачи.
- 3) Решение полученных уравнений (неравенств).
- 4) Отбор решений по смыслу задачи.

Текстовые задачи, обычно решаемые в школьном курсе математики, представляют собой словесные модели задач, в которых учащемуся необходимо найти значения некоторой неизвестной величины (или нескольких величин). Нахождение этого значения возможно потому, что оно однозначно определяется другими известными и неизвестными величинами и их взаимными связями с неизвестной величиной. В задаче имеются все данные для решения, но неизвестны операции, которые должны к нему привести. Основная трудность заключается в определении пути решения. При этом сложность структуры, её индивидуальность нередко скрывает математическую общность многих задач и вынуждает каждый раз строить особое рассуждение, подходящие к данному случаю.

Текстовой задачей является описание некоторой ситуации (ситуаций) на естественном языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между её компонентами или определить вид этого отношения.

Любая текстовая задача состоит из двух частей: условия и требования (вопроса). В условии сообщаются сведения об объектах и некоторых величинах, характеризующих данные объекты, об известных и неизвестных значениях этих величин, об отношениях между ними.

Требование задачи – это указание того, что нужно найти. Оно может быть выражено предложением в повелительной или вопросительной форме.

Решить задачу – это значит через логически верную последовательность действий и операций с имеющимися в задаче явно или косвенно числами, величинами, отношениями выполнить требование задачи (ответить на её вопрос).

2. Задачи

2.1. Задачи с процентами

Одним из видов тестовых задач являются задачи с процентами.

В задачах на проценты основные трудности связаны с понятием процента.

Процент – сотая часть какой - либо величины. Процент обозначается знаком %, например 4%, 57%, 100%.

Чтобы число процентов выразить в виде дроби, нужно число процентов разделить на 100, например, $50\% = \frac{50}{100} = 0,5$; $130\% = \frac{130}{100} = 1,3$.

Чтобы найти a % от b , надо b умножить на $\frac{a}{100}$, например, 5% от 40 – это $\frac{5 \times 40}{100} = 2$.

Чтобы найти процент от данного числа нужно перевести процент в дробь и умножить на это число.

Если известно, что a % числа A равны b , то $A = b \times \frac{100}{a}$, например, 10% числа A равны 5, тогда $A = 5 \times \frac{100}{10} = 50$.

Чтобы найти число по заданному проценту надо процент перевести в дробь и его величину разделить на эту дробь.

2.2. Примеры задач с процентами

2.2.1. Нахождение числа по его проценту

Задача №1.

Увеличив производительность труда на 7%, рабочий сделал за этот же срок на 98 деталей больше, чем намечалось по плану. Сколько деталей рабочий должен был сделать по плану?

Ответ: Ответ: 1400 деталей должен сделать рабочий по плану.

Задача №2.

После замены двигателя средняя скорость самолета увеличилась на 18%, что составляет 68,4 км/ч. Какова была средняя скорость с прежним двигателем?

Ответ: 380 км/ч – средняя скорость самолета.

Задача №3.

Масса вяленой рыбы составляет 55% массы свежей рыбы. Сколько нужно взять свежей рыбы, чтобы получить 231 кг вяленой?

Ответ: 420 кг свежей рыбы.

Задача №4.

При сушке картофель теряет 85,7% своей массы. Сколько нужно взять сырого картофеля, чтобы получить 71,5 т сушеного?

Ответ: 500 тонн.

Задача №5.

35% от 128,1 составляет 49% неизвестного числа. Найдите это число.

Ответ: число 91,5.

2.2.2. Нахождение процента от числа

Задача №1.

В городе состоялись выборы в городскую думу, в которых приняли участие 75% избирателей. Только 10% от числа принявших участие в выборах отдали голоса партии «зеленых». Сколько жителей проголосовало за эту партию, если в городе всего 1 миллион избирателей?

Ответ: 75 000 человек.

Задача №2.

Из 750 учащихся школы 80% занимаются в различных кружках, из них 5% - в радиокружке. Сколько учащихся занимается в радиокружке?

Ответ: 30 учащихся.

Задача №3.

Длина дистанции трехдневной велогонки была 480 км. В первый день велогонщики проехали 25% всего пути, а во второй день 55% оставшегося пути. Сколько километров проехали велогонщики в третий день?

Ответ: 162 км.

Задача №4.

Зарплата служащего составляла 1000 рублей. Затем ее повысили на 20%, а вскоре понизили на 20%. Сколько стал получать служащий?

Ответ: служащий стал получать 960 рублей.

Задача №5.

Вес тела на Луне составляет 16% веса этого же тела на Земле. Сколько будет весить на Луне космонавт, если на Земле весит 70 кг?

Ответ: 1,2 кг.

Задача №6.

«То» да «это», да половина «того» да «этого» - сколько будет процентов от трех четвертей «того» да «этого»?

Ответ: 200%.

Задача №7.

Раньше Вася решал правильно две задачи на проценты из двадцати. После изучения темы, Вася стал решать правильно 16 задач из 20. На сколько процентов поумнел Вася? За стопроцентный ум считаем 20 решённых задач.

Ответ: на 70%.

Задача №8.

Токарь выточивал за час 40 деталей. Применяв резец из более прочной стали, он стал выточивать на 10 деталей в час больше. На сколько процентов повысилась производительность труда токаря?

Ответ: на 25%.

Задача №9.

Возраст брата составляет 40% от возраста сестры. Сколько процентов составляет возраст сестры от возраста брата?

Ответ: 250%.

Задача №10.

Что произойдет с ценой товара, если сначала ее повысить на 25%, а потом понизить на 25%?

Ответ: первоначальная цена товара снизится на 6,25%.

2.3. Задачи с процентами из ГИА

Задача №1.

Магазин в первый день продал 40% имеющихся овощей. За второй день он продал 80% овощей, проданных в первый день. В третий день – оставшиеся 28 кг. Сколько килограммов овощей было в магазине первоначально?

Ответ: 100 кг

Задача №2.

Цена изделия составляла 1000 рублей и была снижена сначала на 10%, а затем еще на 20%. Какова окончательная цена товара?

Ответ: 720 рублей.

Задача №3.

Квартплата составляла 2000 рублей. Какой станет квартплата после ее увеличения на 20%?

Ответ: 2400 рублей.

Задача №4.

Цену товара повысили на 25%, затем новую цену повысили еще на 10% и, наконец, после перерасчета произвели повышение цены еще на 12%. На сколько процентов повысили первоначальную цену товара?

Ответ: 54%.

Задача №5.

Числитель дроби увеличили на 20%. На сколько процентов надо уменьшить ее знаменатель, чтобы в итоге дробь возросла вдвое?

Ответ: на 40%.

2.4. Простейшие задачи с процентами из ЕГЭ

Задача №1.

Флакон шампуня стоит 160 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?

Ответ: 8 флаконов.

Задача №2.

Шариковая ручка стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 900 рублей после повышения цены на 10%?

Ответ: 20 ручек.

Задача №3.

Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 750 рублей после понижения цены на 10%?

Ответ: 20 тетрадей.

Задача №4.

Флакон шампуня стоит 200 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 15%?

Ответ: 5 флаконов.

Задача №5.

Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 100 рублей за штуку и продает с наценкой 15%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1300 рублей?

Ответ: 11 горшков.

Заключение

Проделав эту работу, я научился решать более трудные задачи на проценты. Я понял, что такие задачи не только полезны, но и интересны, как для школьника, так и для взрослого. И я думаю, что теперь смогу решить любую задачу моего уровня на проценты. Во время работы мне пришлось знакомиться с научно-популярной литературой, выбирать материал из нее. Среди задач особое место занимает задача - «Сказка о хитром и жадном короле». В ней интересное содержание, наполненное смыслом, и простое решение.

Я систематизировал и обобщил 2 вида задач с процентами, решил, понял, осмыслил и оформил 26 задач, в том числе подобные тем, которые встречались в КИМах (контрольно-измерительных материалах) предыдущих лет. Составил презентацию, которую представил при защите своей работы.

Я думаю, что цели и задачи, поставленные передо мной, выполнены. Но на этом моя работа по данной теме не заканчивается, так как остались не решенными вопросы и задачи со «сложными» процентами, в которых используются формулы (банковские расчеты и т.д.).

Библиографический список

1. А.И. Верченко Математика в школе. – М.: Издательство ООО «Школьная пресса», 2003.
2. З.Н. Альхова, А.В. Макеева Внеклассная работа по математике. – Саратов: Лицей, 2003.
3. А.И. Верченко Математика в школе. – М.: Издательство ООО «Школьная пресса», 2006.
4. В.В. Кочагин ГИА2012. Математика: сборник заданий: 9 класс. – М.: Эксмо, 2012.
5. Н. Я. Виленкин Математика.6 класс/ - М.: Мнемозина, 2011.
6. Н. Я. Виленкин Математика. 5 класс/ - М.: Мнемозина, 2011.
7. Т. А. Корешкова ГИА 2012. Математика. Тренировочные задания. 9 класс/ М. : Эксмо, 2011.

Приложения



Симон Стевин.

Решения задач из части 2.2.1

Задача №1.

$$7\% = 0,07$$

$$\frac{98}{0,07} = 1400 \text{ (деталей)}$$

Ответ: 1400 деталей должен сделать рабочий по плану.

Задача №2.

$$18\% = 0,18$$

$$\frac{68,4}{0,18} = 380 \text{ (км/ч)}$$

Ответ: 380 км/ч – средняя скорость самолета.

Задача №3.

$$55\% = 0,55$$

$$\frac{231}{0,55} = 420 \text{ (кг)}$$

Ответ: 420 кг свежей рыбы.

Задача №4.

$$100\% - 85,7\% = 14,3\% \text{ (сушеного картофеля)}$$

$$14,3\% = 0,143$$

$$\frac{71,5}{0,143} = 500 \text{ (тонн)} \text{ – свежего картофеля}$$

Ответ: 500 тонн.

Задача №5.

$$35\% = 0,35$$

$$0,35 \times 128,1 = 44,835$$

$$49\% = 0,49$$

$$44,835 : 0,49 = 91,5$$

Ответ: число 91,5.

Решение задач из части 2.2.2

Задача №1.

Здесь мы применяем формулу: $\frac{p}{100} \times A$, где p – данный процент, A – количество избирателей. По условию, в выборах приняли участие $0,75 \times 1\,000\,000 = 750\,000$ (чел.). От них $10\% - 0,1 \times 750\,000 = 75\,000$ (чел.)

Ответ: 75 000 человек.

Задача №2.

Применив дважды ту же формулу, что и в предыдущей задаче, получаем:

$$\frac{80}{100} \times 750 = 30$$

Ответ: 30.

Задача №3.

В первый день велогонщики проехали

$$0,25 \times 480 = 120 \text{ (км).}$$

Оставшийся путь составил

$$480 - 120 = 360 \text{ (км).}$$

Тогда, по условию, во второй день велогонщики проехали

$$\frac{55}{100} \times 360 = 198 \text{ (км)}$$

В результате в третий день велогонщики проехали

$$480 - 120 - 198 = 162 \text{ (км)}$$

Ответ: 162 км.

Задача №4.

Повышение на 20% процентов означает увеличение зарплаты на 20% от 1000, поэтому увеличенная зарплата равна:

$$1000 + 1000 \times \frac{20}{100} = 1200 \text{ (руб.)}$$

Понижение зарплаты на 20% означает уменьшение ее на 20% от 1200, поэтому окончательная зарплата равна:

$$1200 - 1200 \times \frac{20}{100} = 960 \text{ (руб.)}$$

Ответ: 960 рублей.

Задача №5.

Составим пропорцию:

100 % - 70 кг (на Земле)

16 % - x кг (на Луне)

$$\frac{100\%}{16\%} = \frac{70}{x}$$

$$x = \frac{16 \times 70}{100}$$

$$x = 11,2$$

Ответ: 11,2 кг.

Задача №6.

«То» да «это» плюс половина «того» да «этого» получится полтора «того» да «этого». Это в два раза больше $\frac{3}{4}$ «того» да «этого», т.е. составляет 200% от них.

$$(\quad : \quad) \times 100\% = 200\%$$

Ответ: 200%.

Задача №7.

2 меньше 20 в 10 раз. Следовательно, количество задач в процентах будет в 10 раз меньше, чем 100%. То есть = 10%. Теперь он решает 16 задач из 20.

Считаем, во сколько раз 16 меньше 20. $\frac{20}{16} = 1,25$. Теперь делим $\frac{100\%}{1,25} = 80\%$. Но вопрос – на сколько поумнел Вася, следовательно, $80\% - 10\% = 70\%$.

Ответ: на 70%.

Задача №8.

Чтобы решить эту задачу, надо узнать, сколько, процентов составляют 10 деталей от 40. Для этого найдем сначала, какую часть составляет число 10 от

числа 40. $\frac{10}{40} = 0,25$, то есть 25%.

Ответ: 25%.

Задача №9.

Примем возраст сестры за 100%.

Возраст брата составит 40%.

Процентное отношение возраста сестры к возрасту брата равно: $\frac{100}{40} \times 100\% = 250\%$.

Ответ: 250%.

Задача №10.

Пусть цена товара x рублей, тогда

1) $x + 0,25x = 1,25x$;

2) $1,25x - 0,25 \times 1,25x = 0,9375x$

3) $x - 0,9375x = 0,0625x$

0,0625x

4) $\frac{\quad}{x} \times 100\% = 6,25\%$

Ответ: 6,25%.

Решения задач из части 2.3

Задача №1.

Обозначим за x (кг) – вес всех имевшихся в магазине овощей. Тогда в первый день магазин продал $0,4x$ (кг), а за второй – $0,8(0,4x)$ кг. Зная, что в третий день было продано 28 кг овощей, составим и решим уравнение:

$$0,4x + 0,8(0,4x) + 28 = x$$

$$0,28x = 28$$

$$x = 100$$

Ответ: 100 кг

Задача №2.

Первое снижение цены товара было на $0,1 \times 1000 = 100$ рублей. После первого снижения цена составила $1000 - 100 = 900$ рублей. Второе снижение цены товара было на $0,2 \times 900 = 180$ рублей. После второго снижения цена товара составила $900 - 180 = 720$ рублей.

Ответ: 720 рублей.

Задача №3.

2000 рублей составляют 100%,

x рублей составляет 120%.

Найдем, какой стала квартплата после увеличения:

$$x = (2000 \times 120) / 100 = 2400 \text{ (руб.)}$$

Ответ: 2400 рублей.

Задача №4.

Обозначим первоначальную цену товара за x (руб.), тогда после первого повышения цена товара стала – $1,25x$. Второе повышение цены было на $0,1 \times 1,25x$. После него цена товара стала – $1,25x + 0,1 \times 1,25x = 1,375x$. Третье повышение цены на 12% производилось от цены, полученной после второго повышения, и составило $0,12 \times 1,375x = 0,165x$. После последнего повышения цена товара составила $1,375x + 0,165x = 1,54x$. Осталось выяснить процент повышения первоначальной цены. Цена была повышена на $1,54x - x = 0,54x$, что составляет 54% от первоначальной цены.

Ответ: 54%.

Задача №5.

Пусть дана дробь $\frac{a}{b}$. По условию задачи составляем уравнение:

$$\frac{0,2a + a}{b - b \times x} =$$

$$\frac{1,2a}{b(1 - x)} = \frac{2a}{b}$$

$$\frac{0,6}{1-x} = 1$$

$$x = 0,4$$

Значит, знаменатель надо уменьшить на 40%.

Ответ: на 40%.

Сказка о хитром и жадном короле

Однажды хитрый и жадный король созвал свою гвардию и торжественно заявил: «Гвардейцы! Вы славно служите мне! Я решил повысить ваше жалованье на 20%. Но только на один месяц. А потом я уменьшу его тоже на 20%. Согласны?» «А чего ж не согласиться? – удивились гвардейцы. - Пусть хоть на один месяц!»

Так и было решено. Прошел месяц, все были довольны. «Вот здорово! – говорил гвардеец друзьям за кружкой пива. – Раньше я получал 10 долларов в месяц, а в этом месяце получил 12 долларов! Выпьем же за здоровье короля!»

Прошел еще месяц. И получил гвардеец жалованье только 9 долларов 60 центов. «Как же так? Ведь если вначале увеличить на 20%, а потом уменьшить на 20% жалованье, то оно должно остаться прежним!» «Вовсе нет, - объяснил мудрый звездочет. – Повышение твоего жалования составляло 20% от 10 долларов, т.е. 2 доллара, а понижение составляло 20% от 12 долларов, т.е. 2,4 доллара» Погрустили гвардейцы, но делать нечего - ведь сами согласились. И вот они решили обхитрить короля. Пошли они к королю и сказали: «Ваше величество! Вы, конечно, были правы, когда говорили, что повысить жалованье на 20% и понизить его потом снова на 20% - это одно и то же. И если это одно и то же, то давайте сделаем еще раз, но наоборот. Давайте сделаем так: Вы сначала понизите нам жалованье на 20%, а потом увеличите его на те же 20%». «Ну что ж, ответил король, - ваша просьба логична пусть будет по-вашему».

Задание: посчитайте, сколько теперь получил старый гвардеец по истечении первого и по истечении второго месяца. Кто же кого перехитрил?

Решение.

1) 1-й месяц – 12 долларов. 2-й месяц – 9,6 доллара

2) 1-й месяц – 7,68 доллара. 2-й месяц – 10,216 доллара.

Старый гвардеец перехитрил короля.