Краевой конкурс творческих работ учащихся
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Особенности решения уравнений в целых числах

Селькова Мария Александровна,

11 кл., МАОУ СОШ № 11, г. Чайковский

Беркутова Татьяна Владимировна,

учитель математики МАОУ СОШ № 11

Пермь. 2012.

Содержание:

1.Введение.

Решение алгебраических уравнений в целых числах с целыми коэффициентами более чем с одним неизвестным представляет собой одну из труднейших и древнейших математических задач. Этими задачами много занимались самые выдающиеся математики древности, например, греческий математик Пифагор (VIвек до н.э.), александрийский математик Диофант (III век н.э.), П. Ферма (XVII в.), Л.Эйлер(XVIII век), Ж.Л.Лагранж(XVIII век), П.Дирихле (XIX век), К.Гаусс(XIX век), П.Чебышев(XIX в.) и многие другие.

Решение уравнений в целых числах является важной задачей и для современной математики. Теоретический интерес уравнений в целых числах достаточно велик, так как эти уравнения тесно связаны со многими проблемами теории чисел.

Ещё в начальной школе на уроках математики перед нами часто ставили задачу выяснить, при каких допустимых значениях буквы обе части того или иного равенства принимают одинаковые числовые значения. На равенство в этом случае мы смотрели как на уравнение относительно указанной неизвестной величины. В восьмом классе мы познакомились с решением квадратных уравнений с одной переменной. Но, готовясь к олимпиадам, рассматривая материалы Единого государственного экзамена, мы встречаемся с заданиями, в которых предлагаются уравнения с двумя переменными.

Поэтому я считаю, что моя тема актуальна для старшеклассников, сдающих экзамен по математике.

Так же эта тема актуальна для поступающих в ВУЗы физико-математической направленности, для тех, кто увлекается математикой и для тех, кто готовиться участвовать в олимпиадах.

Появилось желание узнать решаемы ли такие уравнения, и какие способы используются для их решения, все ли они имеют алгоритм решения и где применяются.

Рассматривая различные источники, мы отмечаем, что проблема решения уравнений в целых числах решена до конца только для уравнений с одним неизвестным, для уравнений первой степени и для уравнений второй степени с двумя неизвестными. Для уравнений выше второй степени с двумя или более неизвестными достаточно трудной является даже задача существования целочисленных решений.

Проблема ещё в том, что не каждый знает особенности решений некоторых уравнений.

Так же есть много подходов к решению уравнений в целых числах, но не каждый может или понимает как ими пользоваться. Решение уравнений более чем с одним неизвестным наиболее сложная проблема.

Решение уравнений в целых числах в литературе рассматривается только для уравнений второй степени с двумя неизвестными. Для решения уравнений выше второй степени с двумя и более неизвестными трудными являются задачи нахождения всех решений в целых числах и установления существования конечного или бесконечного множества таких решений.

Часто встречаются задания, где надо решить задачи или в целых числах, или только в натуральных.

В своей работе я рассмотрела задания из материалов олимпиад и заданий С6 из ЕГЭ.

Цель работы

Рассмотреть особенности решения уравнений в целых числах.

Задачи

1. Научиться решать уравнения в целых числах разными способами.
2. Применять разные способы решения уравнений в целых числах на практике.
3. Ознакомить одноклассников, как решаются такие уравнения.

Область исследования :

Уравнения в целых числах

Предмет исследования:

Способы решения уравнений в целых числах.

Гипотеза.

Рассмотрение достаточно большого числа уравнений в целых числах позволит сделать вывод о наличии некоторого алгоритма решения данных уравнений или отсутствии такового.

2.Особенности решения уравнений в целых числах

Решением уравнения с одним неизвестным называется значение неизвестного, при котором уравнение превращается в верное числовое равенство.

Соответственно решением уравнения с несколькими неизвестными называется набор значений неизвестных, при подстановке которых в уравнение оно превращается в верное числовое равенство. Часто решения уравнения с одним неизвестным называют корнями уравнения.

1)Уравнения с одним неизвестным.

Рассмотрим уравнение первой степени с одним неизвестным

$$a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

Пусть коэффициенты уравнения a_1 и a_0 - целые числа. Ясно, что решение этого уравнения

$$x = -\frac{a_0}{a_1}$$

будет целым числом только в том случае, когда a_0 нацело делится на a_1. Таким образом, уравнение (1) не всегда разрешимо в целых числах; так, например, из двух уравнений $3x - 27 = 0$ и $5x + 21 = 0$ первое имеет целое решение $x = 9$, а второе в целых числах неразрешимо.

Уравнения второй степени с одним неизвестным.

С тем же обстоятельством мы встречаемся и в случае уравнений, степень которых выше первой: квадратное уравнение $x^2 + x - 2 = 0$ имеет целые решения $x_1 = 1$, $x_2 = -2$; уравнение x2-2x-2=0 в целых числах неразрешимо, так как его корни x1,2=1±3, иррациональны.

Рассмотрим задачи, где задаётся конкретное условие о целых значениях корней.

Задача 1. Квадратный трехчлен $x2+ax+b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Доказать что число $a+b+1$ - составное.

Решение:

$fx=x2+ax+b$ в

$x1,2>2$

По теореме Виета:

$x2+ax+b$

$x1+x2=-ax1x2=b$

$a+b+1=-(x1+x2)+ x1x2+1=x1x2-x1-x2+1== x1x2-1-x2-1=x1-1(x2-1)$

Из условия следует, что каждая скобка не равна 1, -1 или 0.

То есть число $a+b+1$ - составное.

<u>Задача 2.</u> Найти все такие целые a и b, что корни уравнения $x^2+(2a+9)x+3b+5=0$ являются различными целыми числами, а коэффициенты 2a+9 и 3b+5 - простыми числами.

Решение.

Воспользуемся свойствами корней квадратного уравнения: $x_1x_2=3b+5$. По условию 3b+5 - простое число, а x_1 и x_2 - целые. Из свойств простых чисел получаем, что есть лишь 2 случая: $x_1=1$, $x_2=3b+5$ и $x_1=-1$ и $x_2=-(3b+5)$. Значения x_1 и x_2 можно поменять местами, т.к. порядок в данном случае не имеет значения. Снова воспользуемся свойствами корней квадратного уравнения: $x_1+x_2=2a+9$. Но так как среди корней один по модулю равен 1 (1 или -1), а второй по модулю равен 3b+5, то получаем, что 2a+9 отличается от 3b+5 на 1. Следовательно, одно из этих четное, а второе - нечетное. По условию же они оба являются простыми. Известно лишь одно четное простое число - 2. Второе отличается от него на 1, т.е. равно 3 (1 не является простым числом). Получаем, что коэффициенты уравнения равны 2 и 3. Получаем 2 уравнения:

1) $x^2+2x+3=0$

2) $x^2+3x+2=0$

Первое не имеет решение. А корни второго: -1 и -2. Оба являются целыми числами. Значит уравнение имеет вид $x^2+3x+2=0$

$2a+9=3$; $a=-3$

$3b+5=2$; $b=-1$

Ответ: $a=-3$, $b=-1$

2) Нахождение целых корней уравнения с целыми коэффициентами.

Нахождение целых корней алгебраических уравнений с целыми коэффициентами основано на следующей теореме.

Пусть a0xn+a1xn-1+…+an=0 – уравнение с целыми коэффициентами. Если число x0=pq, где p и q – целые числа и дробь pq несократима, является корнем уравнения, то p есть делитель свободного члена an , а q – делитель коэффициента при старшем члене a0.

Мы не ставим своей целью доказательство данной теоремы. Наша задача показать, как данная теорема применяется при решении уравнений в целых числах.

1) Если в уравнении отсутствует свободный член, то есть $a_0 = 0$, то выносится за скобки x в максимально возможной степени и получается

уравнение меньшей степени со свободным членом не равным 0 и корень x=0.

2) Первый корень находится методом подбора. Перебираются все делители свободного члена, пока не будет найден первый корень $x = x_1$. После этого левая часть уравнения делится столбиком на $x - x_1$ и получается уравнение меньшей степени. Это действие повторяется, пока не будет получено квадратное уравнение, которое решается по формуле.

Пример: $x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = 0$

Корнями могут быть делители свободного члена, который равен 12. Это числа: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12. Проверим их. Первое же число x=1 является корнем уравнения.

Поделим левую часть уравнения на x-1: $(x^3 + 6x^2 + 5x - 12):(x - 1) = x^2 + 7x + 12$.

Получили квадратное уравнение, решив которое находим еще 2 корня: -3 и -4. Как видно, оба они являются делителями 12.

Ответ: 1, -3, -4

ТАКИМ ОБРАЗОМ:

Зная один корень многочлена, можно разложить его на множители, т.е. если ɑ - корень многочлена a0xn+a1xn-1+…+an , то

a0xn+a1xn-1+…+an=x-ɑ(b0xn-1+b1xn-2+…+ bn-1).

На конкретном примере рассмотрим другой подход к разложению многочлена на множители при решении уравнений в целых числах

Задача 1. Решить уравнение в целых числах.

y3-5y2+2y+16=0

Решение: поскольку старший коэффициент равен 1, q=1. Свободный член имеет делители 1, 2, 4, 8, 16. Таким образом, если это уравнение имеет целый корень, то этот корень будет среди чисел ±1, ±2, ±4, ±8, ±16. Подставляя их в левую часть, найдем y1=2. Следовательно, левая часть разлагается на множители, один из которых (у - 2).

Произвести это разложение можно с помощью метода, который назовем методом группировки. Суть его в том, чтобы представить многочлен в виде суммы пар слагаемых таким образом, чтобы из каждой пары можно было выделить множитель (у - 2). Поскольку первый член равен y3, то в качестве второго слагаемого следует взять -2y2, в результате чего образуется пара y3-2y2, в которой можно вынести множитель у – 2. Таким образом, от второй члена мы «заняли» -2y2, остается -3y2. Прибавляем 6у, получим пару -3y2 + 6у = -3у(у - 2) и т.д. В результате будем иметь:

y3-5y2+2y+16=(y3-2y2) + (-3y2 + 6у) + (-8у+16) = (у – 2)(y2- 3у –8).

Таким образом, для нахождения остальных корней надо решить уравнение y2 - 3у – 8=0. Его корни: y2=3+412 , y3=3-412, но y2 и y3 не целые числа, поэтому корнем уравнения будет 2.

<u>Ответ: у = 2</u>

Задача2 . Найти целые корни уравнения

$$2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 = 0.$$

Решение. Свободный член уравнения имеет следующие делители

±1, ±3, ±7, ±21.

Выпишем также положительные делители старшего коэффициента: 1, 2. Следовательно, для рационального корня уравнения получаем следующие возможные значения:

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 7,\ \pm 21,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{7}{2},\ \pm\frac{21}{2}.$$

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что из этого множества только числа -3 является его решением (целым числом).

Задача 3. Решить в целых числах уравнение

$$x^8 + x^7 + x + 1 = 0.$$

Решение. Делители свободного члена уравнения: ±1. Положительные делители старшего коэффициента: 1. Следовательно, все целые корни уравнения находятся среди чисел {-1,1}. Подставляя $x = \pm 1$ заключаем, что только $x = -1$ является корнем этого уравнения.

4) Решение уравнений в целых числах с двумя и более неизвестными.

Так как проблема решения уравнений с двумя и более неизвестными и степенью выше двойки решена не до конца я приведу только несколько примеров решения таких уравнений.

Задача 1. Решить в натуральных числах уравнение

1m+1n=125,

где m>n, m≠0, n≠0.

Решение:

m+nmn=125,

25m + n=mn,

25m + 25n=mn (1)

При n=25 данное уравнение

$1m+1n=125$, примет вид $1m+125=125$, что невозможно.

из уравнения (1) выразим m

$25m+25n-mn=0$

$m25-n+25n=0$

$m=25nn-25=25+625n-25$

Из чего видно, что m является натуральным числом при $n>25$ и при $m=25+625n-25$, где $625n-25$ – целое число.

625 делится на степени 5.

Рассмотрим, при каких значениях n, m примет целые значения.

1. при $m=650$, $n-25=1$

$n=26$

2. при $m=150$, $n-25=5$,

$n=30$

3. при $m=25$, $n-25=25$,

$n=50$, $25<50$, следовательно, чем больше значение выражения $n-25$, тем больше n и тем меньше m. Поэтому дальше рассматривать уравнения нет смысла, т.к. условие $m>n$ выполняется только в первых двух случаях.

Ответ: $m=650$, $n=26$ и $m=150$, $n=30$.

Задача 2. Решить в целых числах уравнение

$m4-2n2=1$

Решение:

$2n2=m4-1=m-1m+1(m2+1)$

Пусть $m=2t+1$, тогда

$2n2=m4-1=m-1m+1m2+1=2t2t+24t2+4t+2$

2n2=8tt+12t+2t+1

n2=4tt+12t+2t+1

Пусть n=2z, тогда

4z2=4tt+12t+2t+1

z2=tt+12t+2t+1

t, t+1, 2t+2t+1=2tt+1+1попарно взаимно просты, а их произведение равно полному квадрату, следовательно, t=0, иначе t+1 не будет квадратом!

z=0, n=0, m=±1

Ответ: n=0, m=±1

Задача 3. Решить в целых числах уравнение

$$4x - 6y + 11z = 7.$$

Решение. Разделив с остатком -6 на 4, получим -6 = 4(-2) + 2. Представим исходное уравнение в виде

$$4(x - 2y) + 2y + 11z = 7.$$

После замены $x' = x - 2y$ это уравнение запишется следующим образом

$$4x' + 2y + 11z = 7.$$

Учитывая, что $11 = 2\cdot 5 + 1$, преобразуем последнее уравнение:

$$4x' + 2(y + 5z) + z = 7.$$

Положив $y' = y + 5z$, получим

$$4x' + 2y' + z = 7.$$

Это уравнение имеет следующее решение: x', y' - произвольные целые числа, $z = 7 - 4x' - 2y'$. Следовательно $y = y' - 5z = 20x' + 11y' - 35$, $x= x' + 2y = 41x' + 22y' - 70$.

Таким образом, решение исходного уравнения имеет вид

$$x = 41x' + 22y' - 70$$
$$y = 20x' + 11y' - 35$$
$$z = 7 - 4x' - 2y',$$

где x', y' - произвольные целые числа.

Задача 4. Решить в целых числах уравнение

$$x + y = xy.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(x - 1)(y - 1) = 1.$$

Произведение двух целых чисел может равняться 1 только в том случае, когда оба они равны 1. Т. е. исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 = 1, \\ y - 1 = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 = -1, \\ y - 1 = -1, \end{cases} \end{array}\right.$$

с решениями (0,0) и (2,2).

Задача 5. Решить в целых числах уравнение

$$\boldsymbol{y^3 - x^3 = 91.}$$

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде

$$(y - x)(y^2 + xy + x^2) = 91.$$

Делителями числа 91 являются ±1, ±91. Так как $y^2 + yx + x^2 \geq y^2 - 2|y||x| + x^2 = (|y| - |x|)^2 \geq 0$, то исходное уравнение равносильно совокупности

$y - x = 1,$

$y^2 + yx + x^2 = 91,$ $\Leftrightarrow$

$y - x = 91,$

$y^2 + yx + x^2 = 1,$

$\Leftrightarrow$ y $+ 1,$

$x^2 + x - 30 = 0,$

$\begin{cases} y = x + 91, \\ x^2 + 91x + 30\cdot 99 = 0, \end{cases}$ $x \in \varnothing.$

Таким образом, целочисленными решениями исходного уравнения являются пары (-6,-5) и (5,6).

Задача 5. Решить в натуральных числах уравнение

$$\boldsymbol{y^2 - x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 1.}$$

Решение. Заметим, что

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x(x + 3))((x + 1)(x + 2)) + 1 =$$
$$= ((x^2 + 3x - 1) - 1)((x^2 + 3x + 1) + 1) + 1 = (x^2 + 3x+1)^2.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению

$$y^2 = (x^2 + 3x + 1)^2$$

или

$$y = x^2 + 3x + 1.$$

Таким образом, множество всех решений имеет вид

$\{(x , x^2 + 3x + 1) \mid x \in \mathbf{N}\}$.

***Задача 6. Решите в целых числах уравнение* 3n+8=x2**

Решение:

Если $n=0$, то $x2=9$, получаем $x1=3$, $x2=-3$

Если $n>1$, то так как $x2=33n-1+2+2$, то 2 остаток при делении $x2$ на 3 следовательно правая часть не может равняться квадрату целого числа, поэтому при $n>1$ - решений нет.

При $n<0$, $3n+8=x2$ не имеет решений, так как $x2$ – целое число, а $3n+8$ – дробное.

Ответ: ± 3

Заключение.

В работе рассмотрены различные подходы к решению уравнений в целых числах:

- разложение на множители способом деления многочлена на двучлен и способом группировки,
- оценка и сравнение правой и левой частей равенства между собой или с другим выражением,
- введение новой переменной,
- преобразование, в результате которого появляется полный квадрат и др.

Любые достижения при решении уравнений степени выше первой с тремя и более неизвестными обычно получаются с большим трудом. Это не случайно. Нет общего метода - алгоритма, который бы позволил распознавать, разрешимо или нет в целых числах каждое из таких уравнений.

Таким образом, каждое уравнение имеющие степень два и выше с двумя и более переменными не имеют определенного порядка решения и способа решения таких уравнений.

Список литературы:

1. И.Ф. Шарыгин «Факультативный курс по математике»;
2. М.И. Башмаков «Уравнения и неравенства»;
3. А.В. Шевкин, Ю.О. Пукас «ЕГЭ задания С6»
4. http://www.referat.ru/referats/view/11635
5. http://www.svyato.net/matematika/pr_uravneniy/26-celye-resheniya-neopredelennyx-uravnenij-stepeni-vyshe-pervoj.html

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение некоторых олимпиадных задач в целых числах.

Задача 1. Доказать, что уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

Решение. Положим $x = a + b$, $y = a - b$. Тогда $x^3 + y^3 = 2a^3 + 6ab^2$.

С учетом последнего равенства исходное уравнение принимает вид

$$2a^3 + 6ab^2 + z^3 = 2.$$

Положив $a = 1$, получим $z^3 = -6b^2$. Положим теперь $b = 6t^3$. Отсюда $z = -6t^2$, $x = 1 + 6t^3$, $y = 1 - 6t^3$. Таким образом, получено бесконечное множество решений исходного уравнения, соответствующих целочисленным значениям параметра t

Задача 2. Доказать, что уравнение

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

Решение. Нетрудно заметить, что (3,2) - одно из решений исходного уравнения. С другой стороны из тождества

$$(x^2 + 2y^2)^2 - 2(2xy)^2 = (x^2 - 2y^2)^2$$

следует, что если (x, y) - решение уравнения (17), то пара $(x^2 + 2y^2, 2xy)$ также является его решением. Используя этот факт, рекуррентно определим бесконечную последовательность (x_n, y_n) различных решений исходного уравнения:

$$(x_1, y_1) = (3,2) \quad \text{и} \quad x_{n+1} = x_n^2 + 2y_n^2, \quad y_{n+1} = 2x_n y_n, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Задача 3. Решить в целых числах уравнение

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3.$$

Решение. Заметим, что слагаемые в левой части уравнения имеют одинаковый знак, а поскольку их сумма положительна, то каждое слагаемое также положительно. Применяя неравенство Коши, получим

$$3 = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y}} = 3\sqrt[3]{xyz} \geq 3.$$

Следовательно, $xyz = 1$. Отсюда получим, что решениями могут быть только тройки (1,1,1), (1,-1,-1), (-1,-1,1), (-1,1,-1). Проверкой убеждаемся, что каждая из них действительно является решением исходного уравнения.

Задача 4. Доказать, что уравнение

$$x(x + 1) = 4y(y + 1)$$

неразрешимо в целых положительных числах.

Решение. Нетрудно заметить, что исходное уравнение равносильно уравнению

$$x^2 + x + 1 = (2y + 1)^2.$$

Следовательно, $x^2 < (2y + 1)^2 < (x + 1)^2$ или $x < 2y + 1 < x + 1$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Задача 5. Решить в целых числах уравнение

$$2x^3 + xy - 7 = 0.$$

Решение. Из условия следует, что x должен быть делителем числа 7. Т. е. возможные значения x находятся среди чисел $\{\pm 1, \pm 7\}$. Перебрав эти возможности, получаем решение уравнения: (1,5), (-1,-9), (7,-97), (-7,-99).

Задача 6. Доказать, что уравнение

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$$

не имеет решений в целых положительных числах.

Решение. Положим $d = (x, y)$, $x_1 = {}^{x}/_{d}$, $y_1 = {}^{y}/_{d}$. Так как

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2,$$

следовательно,

$$x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 = d^2x_1^2y_1^2.$$

Отсюда получаем, что

$$x_1 | y_1, \quad y_1 | x_1.$$

Учитывая, что $(x_1,y_1) = 1$, делаем вывод, что $x_1 = y_1 = 1$. Таким образом, уравнение принимает вид

$$d^2 = 3,$$

Отсюда следует требуемое утверждение.

Задача 7. Решить в целых числах уравнение

$$\boldsymbol{x + y = x^2 - xy + y^2.}$$

Решение. Положим $t = x + y$. Так как

$$x^2 - xy + y^2 \geq \frac{1}{4}(x+y)^2,$$

то должно выполняться неравенство

$$t \geq \frac{1}{4}t^2,$$

откуда $t \in [0;4]$.

Учитывая соотношение $x + y = (x + y)^2 - 3xy$, рассмотрим случаи, соответствующие целочисленным значениям t из отрезка $[0;4]$.

a) $t = 0$

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ xy = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

b) $t = 1$

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

c) $t = 2$

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = {}^{2}/_{3}, \end{cases} \square \quad (x\,, y) \ \square\ \square.$$

d) $t = 3$

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases} \square \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

e) $t = 4$

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 4, \end{cases} \square \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$$

Таким образом, целочисленными решениями исходного уравнения являются пары (0,0), (0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (2,2).

Задача 8. Решить в простых числах уравнение

$$\boldsymbol{x^2 - 2y^2 = 1.}$$

Решение. Рассмотрим два случая в зависимости от четности переменной x.

a) Пусть x - нечетное число. Подстановка $x = 2t + 1$ приводит исходное уравнение к виду

$$(2t + 1)^2 - 2y^2 = 1,$$

или

$$2y^2 = 4t(t + 1).$$

Следовательно, $2 \mid y^2$. Так как y - простое число, то $y = 2$.

Отсюда $x = \sqrt{1 + 2^3} = 3.$

b) Пусть x - четное число. Так как x - простое число, то x = 2. Следовательно, $y = \sqrt{\frac{3}{2}} \notin \mathbf{N}.$ т. е. уравнение неразрешимо в простых числах.

Следовательно, данное уравнение имеет в классе простых чисел единственное решение (3;2).

Задача 9.

Найти все пары пятизначных чисел x, y такие, что число xy, полученные приписыванием десятичной записи числа y после десятичной записи числа x, делится на xy.

Решение:

xy=105x+y

105x+yxy=p

105x+y=pxy

105x=pxy-y

105x=y(px-1)

(px-1) – не делится на x=>y делится на x, y=qx, где q-натуральное число меньше 10. (если больше 10 и 10 то y не пятизначное).

105x=qxpx-1

105=qx(px-1)x=qpx-q

105=qpx-q отсюда следует, что 105 делится на q, 105 имеет делители меньше 10- это 1, 2, 4, 5, 8.

рассотрим все 5 случаев.

1) $q=1$, $px=100001$, где 100001 делится 1 и 11 но при $p=1$ и при $p\geq 11$ x-не пятизначное

2) $q=2$, $px=50001$, где 50001 делится на 1, 3, 7.

    3) при $p=1$, $x=50001$, $y=100002$-не пятизначное.

    4) При $p=3$, $x=16667$, $y=33334$ - удовлетворяет условию.

    5) При $p\geq 7$ x - не пятизначное.

6) $q=4$, $px=25001$

    7) При $p=1$, $x=25001$, $y=100004$ - не пятизначное

    8) При $p=23$, x - не пятизначное

9) $q=5$, $px=20001$

    10) При $p=1$, $x=20001$, $y=100005$ – не пятизначное

    11) При $p>1$, x - не пятизначное

    12)

13) $q=8$, $px=12501$

    14) При $p=1$, $x=12501$, y – не пятизначное

    15) При $p>1$, x - не пятизначное

    16) Условию задачи удовлетворяют только числа $x=16667$, $y=33334$

    17) Ответ: $x=16667$, $y=33334$.

18)

19) ***Задача 10. Произведение нескольких различных простых чисел делится на каждое из этих чисел, уменьшенное на 1. Чему может равно это произведение.***

20) **Решение:**

21) Первый простой множитель $p1=2$.

22) Вторым по величине может быть только $p2=3$, иначе $p1p2$не разделится на $(p2-1)$.

1) $p1p2=6$

2) $p3$ и $(p3-1)$ - взаимно простые числа, следовательно, $p1p2$ должно делиться на $(p3-1)$, откуда $p3=7$

3) $p1p2p3=42$

4) $p1p2p3$ должно разделиться на $(p4-1)$,

5) но $(p2p3+1)$ - четное, а $(p1p3+1)$ – составное,

6) варианты без $p3$ уже использованы, поэтому $p4=p1p2p3+1=43$.

7) $p1p2p3p4=1806$ подобрать еще один множитель уже не удастся, все они будут уже составными.

8) $p1p2p3p4+1=1807$ - составное.

9)

10) Ответ: $p1p2p3p4=1806$

11)

12)

13) ***Задача 11.***

14) ***Натуральные числа m и n таковы, что m3+n, m+m3делится на m2+n2. Найти m и n.***

15) **Решение:**

16) Так как m3+n и m+m3, делится на m2+n2 то, их разность тоже делится на m2+n2

17) *(m3+m)-(n+m3)m2+n2=x (1)*

18) m-n=x(m2+n2) *,* где x - целое число;

19) Если m>n, то m2>m; n2≥n; m2+n2>m+n>m-n следовательно, равенство (1) невозможно;

20) Если m<n, то

21) n-m=-xm2+n2 (2)

22) m2>m; n2≥n; m2+n2>m+n>n-m

23) следовательно, равенство (2) невозможно;

24) Из этого следует что m=n, тогда m2+n2=2m2

25) *m+m3=2ym2,* где *y* - натуральное число*;*

26) *1+m2=2ym*

27) 2y-mm=1 - верно только при m=1 и y=1

28) Отсюда следует m=n=1

29) Ответ: m=n=1

30)

31)