

Краевой конкурс творческих работ учащихся  
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

**Математическое моделирование прыжков в фигурном катании**

Снигирева Влада Николаевна,  
Целищева Юлия Юрьевна,  
11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Шабрыкина Наталья Сергеевна,  
доцент ПНИПУ, к.ф.-м. н.

Пермь. 2012.

## Оглавление

Введение .....	3
Обзор литературы.....	4
Концептуальная постановка задачи .....	8
Математическая постановка задачи .....	10
Фаза полета .....	10
Комплексная модель прыжка.....	11
Решение и результаты .....	17
Фаза полета .....	17
Комплексная модель прыжка.....	19
Заключение .....	24
Список литературы .....	25
Приложение 1. Исходный код программы, использованной для решения системы дифференциальных уравнений в фазе прыжка с учетом силы сопротивления воздуха .....	27
Приложение 2. Исходный код программы использованной для решения системы дифференциальных уравнений в комплексной модели прыжка .....	28

## Введение

Сегодня фигурное катание является одним из самых популярных видов спорта. И это не удивительно: он сочетает в себе массу пользы и положительных эмоций. Ежегодно во всем мире проводятся чемпионаты по фигурному катанию, оно также входит в программу зимних олимпийских игр. Кроме того, множество людей увлекаются фигурным катанием на любительском уровне, для себя.

Данный вид спорта отличается разнообразием простых и сложных элементов, но прыжки по праву можно назвать самыми зрелищными. Прыжков в фигурном катании множество, но все подчиняются похожим закономерностям. Конечно, прежде чем учиться их выполнять, начинающий фигурист уже получает некоторые навыки в этом виде спорта, что позволяет сделать прыжок не только более изящным и технически правильным, но и более безопасным. Тем не менее, любому новичку, желающему освоить данный элемент, было бы полезно узнать, как успешность выполнения прыжка зависит от различных параметров. Например, как высота зависит от начальной скорости фигуриста или от того, насколько маленьким или большим будет угол между опорной ногой и поверхностью льда в момент толчка. Данная работа посвящена построению математической модели прыжка в фигурном катании.

Полученная модель поможет новичкам освоить этот красивый вид спорта, в частности такой эффектный элемент как прыжок, с минимальным количеством падений и травм.

## Обзор литературы

Большой вклад в развитие биомеханики фигурного катания внес великий российский тренер А.Н. Мишин. В своих книгах [7, 8, 9, 10] Мишин А.Н. описал различные техники исполнения прыжков, вывел наиболее важные параметры, влияющие на прыжок, и построил математические модели некоторых движений фигуриста. Ниже представлены основные положения его работ.

В работе [8] Алексей Николаевич приводит общепринятое деление прыжка на фазы:

1. Период разбега. Он включает фазу приобретения скорости и фазу подготовки к толчку.
2. Период толчка. В него входит фаза амортизации и фаза активного отталкивания.
3. Период полета. Он состоит из фазы группировки и фазы разгруппировки.
4. Период приземления. В него входит фаза амортизации и фаза выезда.

И далее автор рассматривает каждую из этих фаз по отдельности, анализируя, как их выполнение влияет на весь прыжок в целом, и приводит рекомендации для начинающих фигуристов.

Автор приходит к выводу, что при правильном разбеге фигурист должен развить достаточно большую скорость, причем, чтобы скольжение по дуге было устойчивым, нужно выровнять по величине и направлению скорости движения звеньев тела, а также направление толчковой дуги должно совпадать с направлением движения. Если при переходе от разбега к толчку траектория резко искривится, то это приведет к потере равновесия.

В период толчка создается начальное вращение тела фигуриста. вокруг его продольной оси. В фазе амортизации происходит наклон туловища вперед, в фазе активного отталкивания – его энергичное разгибание.

А.Н. Мишин описывает механизм трех способов создания вращения, а так же роль маховых движений туловища и конечностей фигуриста при выполнении прыжка. Причем, как он подчеркивает, при маховом движении туловища основное внимание должно быть уделено увеличению его угловой скорости.

В фазе полета автор предлагает рассматривать поступательное и вращательное движения тела фигуриста по отдельности [8]. При построении своих моделей А.Н. Мишин пренебрегает сопротивлением воздушной среды, что позволяет ему считать, что в полете на тело фигуриста действует лишь сила тяжести.

Поскольку движение точки описывать проще, автор предлагает наблюдать за поступательным движением центра тяжести тела фигуриста, которое описывается следующим уравнением:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 - x^2 \frac{g}{2V_0^2 \cos^4 \alpha_0} \quad (1)$$

где  $\alpha_0$  - угол вылета,  $V_0$  - начальная скорость вылета,  $g$  - ускорение свободного падения, следует, что траектория движения центра тяжести тела определяется лишь углом вылета и начальной скоростью. Из чего вытекает, что оно целиком определяется толчком.

Согласно закону сохранения момента количества движения количество вращательного движения, приобретенное фигуристом в толчке, постоянно на протяжении всего полета, т. е.

$$K = J\omega = \operatorname{const}, \quad (2)$$

где  $K$  – момент количества движения (запас вращательного движения);  $J$  – момент инерции тела, который зависит от положения частей тела фигуриста (группировки);  $\omega$  – угловая скорость вращения.

Отсюда автор делает вывод, что характер изменения угловой скорости тела фигуриста зависит от способа выполнения прыжка: либо прыжок выполняется с фиксацией группировки либо без нее. Чем больше оборотов в прыжке, тем дольше фигурист остается в группировке, фиксируя тем самым свою угловую скорость.

Следует отметить, что закон сохранения момента количества движения в виде (2) справедлив только в том случае, когда сумма моментов внешних сил, действующих на фигуриста, равна нулю. На существование данного ограничения автор не указывает.

В конце описания фаз прыжка автор подчеркивает, что овладеть техникой приземления сложно, хотя очень важно, ведь результатом неправильного приземления может стать падение, которое может привести к серьезной травме, и влияет на оценку судей.

Рекомендации Мишина по приземлению после прыжка сводятся к следующему. Для хорошего выезда после приземления очень важен наклон тела вперед в плоскости выезда (в передне-заднем направлении). В момент приземления продольная ось тела должна иметь наклон вперед в пределах  $75-77^\circ$ , иначе фигурист может опрокинуться назад.

Таким образом, автор, описав фазы прыжка, построил математические модели некоторых из них. Мишин был первым, кто использовал математическое моделирование для тренировки фигуристов. И во многом благодаря этому его ученики достигают выдающихся результатов при выполнении прыжковых элементов.

В мировой литературе достаточно много экспериментов по фигурному катанию [1–5], но кроме Мишина практически никто не создавал математических моделей движений фигуриста. Следует отметить, что несмотря на огромный вклад, который Алексей Николаевич Мишин внес в развитие биомеханики фигурного катания, его модели содержат ряд необоснованных допущений и могут быть значительно улучшены. Как уже было сказано, Мишин не учитывает сопротивление воздуха при описании поступательного движения фигуриста в фазе полета и считает, что на фигуриста не действуют внешние силы. А при описании вращения фигуриста в воздухе считается, что сумма моментов внешних сил равна нулю. Кроме того, Алексей Николаевич рассматривает фазу полета отдельно от захода на прыжок и выезда.

Учитывая все вышесказанное, целями данной работы являются:

1. Исследование влияния учета силы сопротивления воздуха при моделировании фазы полета прыжка. Для этого необходимо провести сравнение созданной модели с экспериментальными данными, полученными из литературы [1–5, 7–8].
2. Построение комплексной модели прыжкового элемента, состоящей из захода на прыжок, фазы полета и выезда и использование этой модели для определения оптимальных параметров прыжка, позволяющих повысить высоту и дальность полета и избежать условий, приводящих к падению при приземлении.

## Концептуальная постановка задачи

В данной работе моделируются прыжковые элементы фигурного катания. На первом этапе необходимо построить математическую модель фазы полета от момента отталкивания до момента приземления. При построении модели приняты следующие допущения:

1. фигурист считается материальной точкой, центр масс которой находится в центре масс фигуриста;
2. центр масс фигуриста движется в плоскости, перпендикулярной поверхности льда;
3. фигурист движется под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха, пропорциональной скорости фигуриста.

Второй этап данной работы посвящен моделирование прыжкового элемента, состоящего из трех фаз: захода, полета и выезда. Как заход, так и выезд являются задачами скольжения по дуге. Данная задача была решена ранее [11], здесь используются результаты решения. При моделировании фаз захода и выезда используются следующие допущения:

1. лёд, по которому движется фигурист, однороден и лезвие конька заточено ровно;
2. между поверхностью льда и лезвием конька действует сила трения, пропорциональная весу фигуриста;
3. сила сопротивления воздуха не учитывается, так как она мала для скоростях движения, характерных для фигуриста.

Для фазы полета приняты те же предположения, что и в первом этапе, но сила сопротивления воздуха не учитывается, так как расчеты первого этапа показали, что она практически не влияет на параметры прыжка и движение фигуриста. Кроме того, на этом этапе рассматривается движение фигуриста в пространстве.

В третьем этапе исследуется вращение фигуриста в полете. В данном случае фигурист совершает вращательные движения вокруг вертикальной

оси, проходящей через центр масс фигуриста. Во время движения фигурист перемещает руки к оси, поэтому его момент инерции будет меняться с течением времени. Центр масс фигуриста будет меняться по тем же законам, что и без вращения.

## Математическая постановка и решение задачи

### Фаза полета

Согласно сделанным предположениям, запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{F}_c = m\vec{a}, \quad (3)$$

где  $m$  – масса фигуриста,  $\vec{g}$  – ускорение свободного падения,  $\vec{a}$  – ускорение фигуриста,  $\vec{F}_c$  – сила сопротивления воздуха, действующая на фигуриста.

Будем считать, что движение происходит в вертикальной плоскости  $yOz$ . Спроецируем (3) на оси координат:

$$F_{cy} = -ma_y, \quad (4)$$

$$-mg - F_{cz} = ma_z. \quad (5)$$

Так как сила сопротивления пропорциональна скорости, то можно записать:

$$\vec{F}_c = -k\vec{V}, \quad (6)$$

где  $\vec{V}$  – вектор скорости фигуриста,  $k$  – коэффициент сопротивления.

Подставим (6) в (4, 5):

$$kV_y(t) = -m \frac{dV_y(t)}{dt}, \quad (7)$$

$$-mg - kV_z(t) = m \frac{dV_z(t)}{dt}, \quad (8)$$

где  $V_y(t)$  и  $V_z(t)$  – проекции скорости на оси координат.

Получилась система дифференциальных уравнений относительно  $V_y(t)$  и  $V_z(t)$ . Для решения системы (7)-(8) необходимы начальные условия:

$$V_y(0) = V_{y0}, \quad V_z(0) = V_{z0}. \quad (9)$$

Для определения зависимости горизонтальной  $y(t)$  и вертикальной  $z(t)$  координат от времени используем определение компонент вектора скорости:

$$\frac{dy(t)}{dt} = V_y(t), \quad (10)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = V_z(t). \quad (11)$$

Для решения дифференциальных уравнений (10)-(11) необходимы начальные условия:

$$y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0. \quad (12)$$

### ***Комплексная модель прыжка***

Следующим этапом является моделирование прыжка с заходом и выездом. Заход – это процесс скольжения по дуге, в ходе которого фигурист приобретает скорость, для того чтобы совершить прыжок; обратный процесс называется выездом.

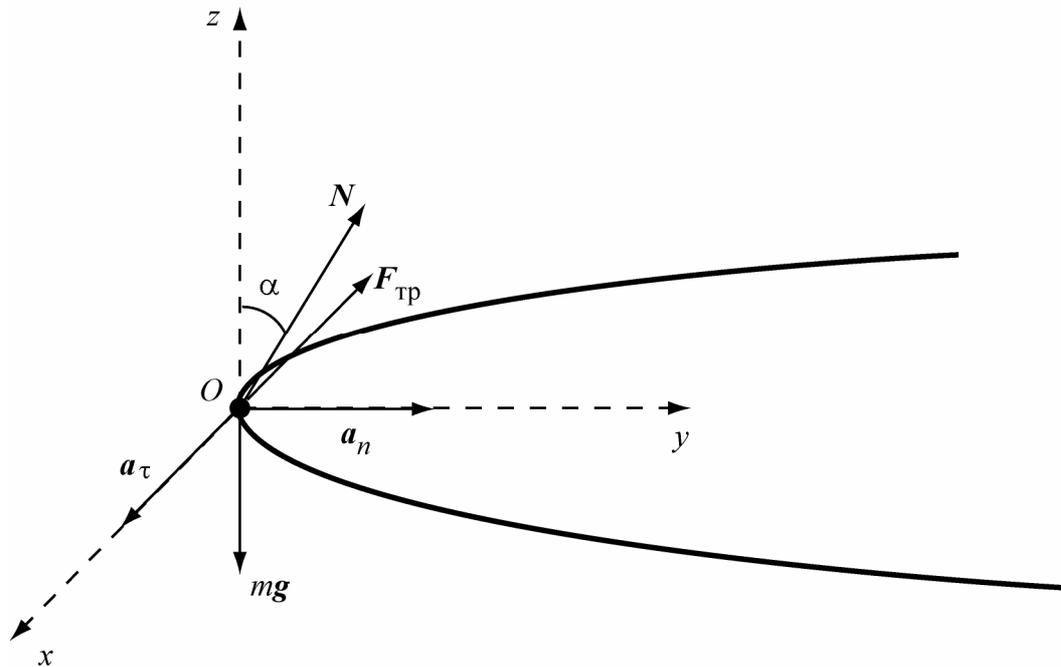


Рис. 1. Силы, действующие на фигуриста во время реберного скольжения по дуге

Задача скольжения по дуге, рассмотренная ранее [11], описывается следующим уравнением:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}, \quad (13)$$

где  $\vec{F}_{\text{тр}}$  – сила трения, зависящая от реакции опоры  $\vec{N}$  по закону  $\vec{F}_{\text{тр}} = \mu\vec{N}$ ,  $\mu$  – коэффициент трения. Сила трения направлена по касательной к траектории

против скорости движения. Силы, действующие на фигуриста, представлены на рис. 1.

После преобразований из уравнения (13) получено:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\frac{\mu g}{\cos \alpha(t)}, \quad (14)$$

$$\rho(t) = \frac{V^2(t)}{g \operatorname{tg} \alpha(t)}, \quad (15)$$

где  $\rho(t)$  – радиус кривизны траектории,  $V(t)$  – модуль скорости фигуриста.

Для решения дифференциального уравнения (14) необходимо начальное условие на значение скорости:

$$V(0) = V_0, \quad (16)$$

и зависимость угла наклона тела фигуриста относительно вертикальной оси от времени:

$$\alpha(t) = \alpha_1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_a} t, \quad (17)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – начальный и конечный угол наклона, соответственно,  $t_a$  – время движения по дуге.

В результате решения задачи скольжения по дуге (14)-(17) при заданной начальной скорости и зависимости угла наклона тела фигуриста относительно вертикальной оси от времени можно определить горизонтальные компоненты скорости в момент отталкивания, а также координаты фигуриста на момент начала фазы полета.

Координаты фигуриста – это проекции радиуса кривизны траектории (15) на соответствующие оси. Угол наклона радиуса изменяется с течением времени. Зависимость данного угла от времени получается из решения дифференциального уравнения:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{V(t)}{\rho(t)}, \quad (18)$$

с начальным условием:

$$\varphi(0) = \varphi_0. \quad (19)$$

Тогда для координат имеют место формулы:

$$x(t) = \rho(t) \cos \varphi(t), \quad (19)$$

$$y(t) = \rho(t) \sin \varphi(t). \quad (20)$$

Горизонтальные компоненты скорости в момент отталкивания находятся как производные от (18) и (19):

$$V_x(t) = V(t) \cos \varphi(t), \quad (21)$$

$$V_y(t) = V(t) \sin \varphi(t). \quad (22)$$

В результате решения первого этапа (захода на прыжок) были получены начальные условия для второго этапа.

Для вычисления координат фигуриста перед началом прыжка в формулы (19), (20) был подставлен конечный для этапа захода и начальный для этапа прыжка момент времени  $t_1$ .

Моделирование второго этапа включает в себя получение зависимостей вертикальной компоненты скорости и координаты от времени. Также здесь будут вычислены такие характеристики прыжка как длина, высота и длительность.

Когда фигурист отталкивается ото льда, у его скорости, помимо двух горизонтальных составляющих, появляется вертикальная. Вертикальная компонента скорости находится из второго закона Ньютона, что уже было сделано в фазе полета. Так как там было выяснено, что сила сопротивления воздуха не оказывает существенного влияния на прыжок. Тогда второй закон Ньютона для фигуриста в прыжке принимает следующий вид:

$$-mg = \frac{dV_z(t)}{dt} m. \quad (23)$$

Для решения дифференциального уравнения (23) необходимы начальные условия:

$$V_z(t_1) = V_{z0}, \quad (24)$$

где  $V_{z0}$  берется из экспериментальных данных [1]. В результате было получено:

$$V_z(t) = -gt + V_{z0} + gt_1. \quad (25)$$

Зависимость вертикальной координаты  $z(t)$  от времени определяется из решения дифференциального уравнения (11) с новым начальным условием:

$$z(t_1) = 0, \quad (27)$$

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + (V_{z0} + gt_1)t + \frac{gt_1^2}{2} - (V_{z0} + gt_1)t_1. \quad (28)$$

Так как горизонтальные компоненты скорости в полете остаются постоянными, зависимости горизонтальных координат  $x(t)$  и  $y(t)$  от времени определяются уже полученными уравнениями (19) и (20).

Длина прыжка вычисляется по теореме Пифагора:

$$L = \sqrt{(x(t_2) - x(t_1))^2 + (y(t_2) - y(t_1))^2}, \quad (29)$$

где  $x(t_1)$  и  $y(t_1)$  - начальные координаты фигуриста перед прыжком, а  $x(t_2)$  и  $y(t_2)$  - координаты фигуриста в момент времени  $t_2$  или момент приземления.

Для нахождения высоты прыжка, необходимо приравнять уравнение (25) к нулю, чтобы получить момент времени, когда  $z$  центра масс фигуриста будет наибольшей. Затем следует подставить найденный момент времени в уравнение (28) и посчитать высоту.

Длительность прыжка, или интервал времени, в течение которого фигурист находился в прыжке определяется как разница между начальным и конечным для второго этапа моментами времени,  $t_1$  и  $t_2$  соответственно.

В результате решения второго этапа, прыжка, были получены начальные условия для третьего этапа, выезда: начальное время  $t_2$ , начальная скорость и координата.

### ***Вращение фигуриста в полете***

При моделировании вращения фигуриста была найдена формула, показывающая зависимость момента инерции от времени:

$$J = J_0 - a(t - t_1)^b e^{c(t-t_1)}, \quad (30)$$

где  $J_0$  - начальный момент инерции фигуриста, его значение было взято из литературных данных [11];  $t_1$  - время скольжения по дуге,  $e$  - экспонента;  $a, b, c$  - некоторые константы. Их можно найти из следующих уравнений, которые также были взяты из математического справочника:

$$t_{gr} = -\frac{b}{c}, \quad (31)$$

$$t_{per} = -\frac{b + \sqrt{b}}{c}, \quad (32)$$

где  $t_{gr}$  - время, когда фигурист имеет максимальную координату по оси  $z$ ,  
 $t_{per}$  - время,

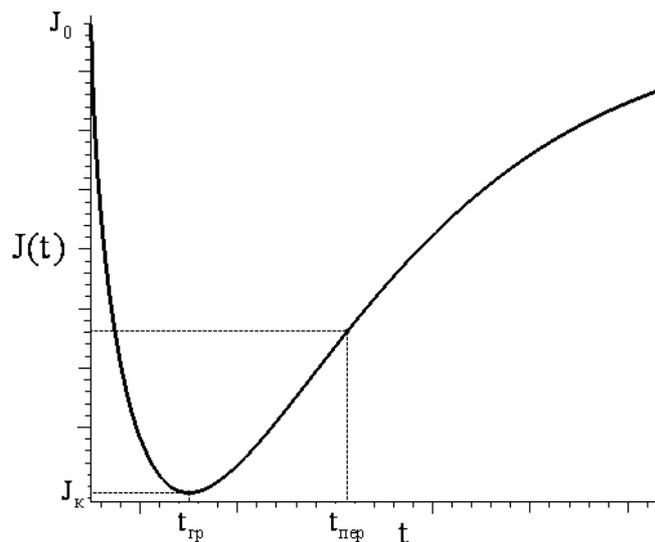


Рис. 2. Зависимость момента инерции от времени

На рис. 2 показаны экстремум функции в  $t_{gr}$ , а также перегиб в  $t_{per}$ .

Далее было найдено значение функции в момент времени  $t_{gr}$  [11]:

$$2J_f = J_0, \quad (33)$$

где  $J_f$  - момент инерции фигуриста.

Подставляя значение  $b$ , было получено значение константы  $a$ :

$$a = \frac{(J_0 - J_f)}{e^{-b} t_{gr}^b}. \quad (34)$$

Подставляя значения констант, была получена зависимость момента инерции от времени.

Для описания движения фигуриста вокруг неподвижной оси использовалось основное уравнение вращательного движения:

$$\frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \sum \vec{M}(\vec{F}), \quad (35)$$

где  $\vec{M}(\vec{F})$  - моменты сил, действующих на фигуриста. Поскольку плечо силы тяжести, единственной силы, действующей на фигуриста, равно нулю, так как оно проходит через ось вращения, то момент силы равен нулю. Это значит, что  $\frac{d(J\vec{\omega})}{dt}$  - величина постоянная, поэтому она равна:

$$J(t)\omega(t) = J_0\omega_0, \quad (36)$$

где  $\omega_0$  - угловая скорость на момент отталкивания.

Далее была выражена зависимость угловой скорости фигуриста от времени, что позволило решить следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t), \quad (37)$$

где  $\varphi$  - угол поворота фигуриста в воздухе вокруг вертикальной оси.

В зависимость угла поворота фигуриста от времени  $\varphi(t)$  было подставлено время, которое фигурист находился в прыжке. Таким образом, было найдено угловое перемещение фигуриста и, поделив его на  $2\pi$ , было получено количество оборотов фигуриста в прыжке.

## Результаты

### *Фаза полета*

Задача была решена аналитически с помощью математического пакета Maple. Исходный код программы представлен в приложении 1. Параметры модели были взяты из литературных данных [1, 6, 8].

В результате расчетов были получены зависимости компонент скорости (рис. 3а) и координат (рис. 3б) от времени, время, длина и высота прыжка. Начальные данные для скоростей были взяты из экспериментальных данных (таблица 1).

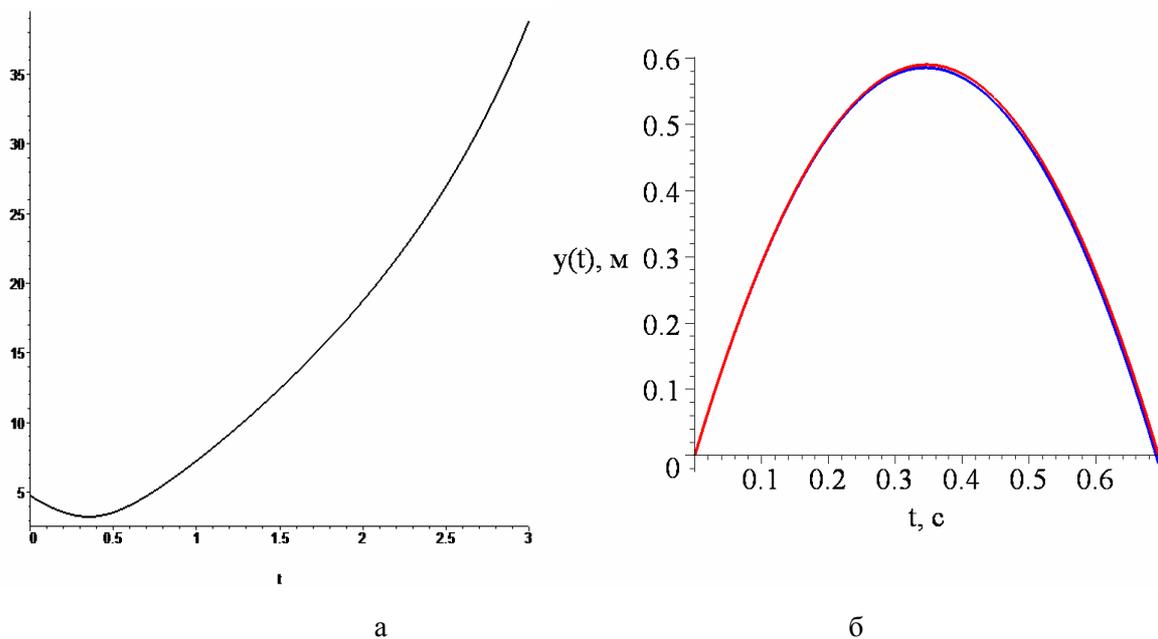


Рис. 3. Зависимость компонент скорости от времени (а) и траектория полета (б) с учетом силы сопротивления (синяя линия) и без нее (красная линия)

Далее было проведено сравнение экспериментальных данных с результатами вычисления. В таблице 1 приведены длины и высоты прыжка, а также погрешности для этих величин, по которым видно, что экспериментальные данные отличаются с данными модели в среднем на 30%. Это может говорить о том, что экспериментальные данные были получены с недостаточной точностью.

Таблица 1. Сравнение с экспериментальными данными  
для прыжка аксель в один, два и три оборота [1]

Фигурист (масса, кг.)	Прыжок	$V_{y0}$	$V_{z0}$	длина (эксперимент)	длина (модель)	высота (эксперимент)	высота (модель)	Время полета (модель)	Погрешность длины, %	Погрешность высоты, %
А (75)	1	4.2	3.3	3.8	2.76	0.56	0.55	0.67	27	2
	2	4.8	3.4	3.7	3.25	0.66	0.59	0.69	12	11
	3	3.8	3.1	3.4	2.35	0.58	0.49	0.63	30	16
В (70)	1	6.8	3.1	4.1	4.1	0.79	0.49	0.63	0	38
	2	4.4	3.3	3.8	2.9	0.66	0.58	0.67	23	70
	3	4.7	3.3	3.6	3.1	0.64	0.55	0.67	14	14
С (80)	1	6.2	3.6	4.7	4.2	0.79	0.63	0.73	11	20
	2	4.7	3.6	4.2	3.35	0.73	0.63	0.73	20	14
	3	3.3	3.4	4.3	2.25	0.81	0.59	0.69	48	27
D (73)	1	5.2	3.4	4.2	3.5	0.71	0.58	0.69	11	18
	2	5.2	3.6	3.9	3.7	0.69	0.65	0.73	5	6
	3	2.9	3.4	4.0	2.0	0.69	0.57	0.69	50	17
E (85)	1	4.2	2.8	5.0	2.35	0.56	0.38	0.57	53	32
	2	4.5	3.0	4.4	2.7	0.53	0.46	0.61	39	13
	3	3.3	3.4	4.2	2.25	.58	0.59	0.69	46	2

Таблица. 2. Сравнение модели с экспериментальными данными прыжка без учета сопротивления воздуха [9]

Фигурист	эксперимент						модель без сопротивления воздуха					
	прыжок	время, с	м/с	м/с	длина, м	высота, м	время, с	длина, м	высота, м	$\varepsilon$ (время), %	$\varepsilon$ (длина), %	$\varepsilon$ (высота), %
Овчинников Ю.	2Л	0,59	5,42	2,9	3,2	0,43	0,59	3,20	0,43	0,21	0,14	0,32
Овчинников Ю.	2А	0,7	5	3,44	3,5	0,6	0,70	3,51	0,60	0,19	0,19	0,52
Бобрин И.	2Л	0,56	5	2,73	2,8	0,39	0,56	2,78	0,38	0,61	0,61	2,60
Бобрин И.	2А	0,62	4,65	3,16	2,9	0,47	0,64	3,00	0,51	3,91	3,30	8,29
Лисовский И.	2Л	0,5	6,2	2,46	3,1	0,31	0,50	3,11	0,31	0,31	0,31	0,50
Лисовский И.	2А	0,65	5,05	3,2	3,28	0,52	0,65	3,29	0,52	0,37	0,45	0,37

В таблице 2 модель также сравнивается с экспериментом. В ней приведены длины, высоты прыжка и время полета, а также погрешность этих величин. Она составила менее 1%.

Анализируя графики траектории (рис. 3б), а также экспериментальные данные, можно сделать вывод: силу сопротивления воздуха при моделировании фазы полета можно не учитывать.

### ***Комплексная модель прыжка***

Задача была разбита на три этапа (заход, полет, выезд) и решена аналитически с помощью математического пакета. Исходный код программы представлен в приложении 2.

Решение первого этапа включает в себя получение зависимостей горизонтальных компонент скорости скольжения по дуге во время захода на прыжок, они представлены на рис. 4. Также была получена траектория движения фигуриста при заходе на прыжок (рис. 5).

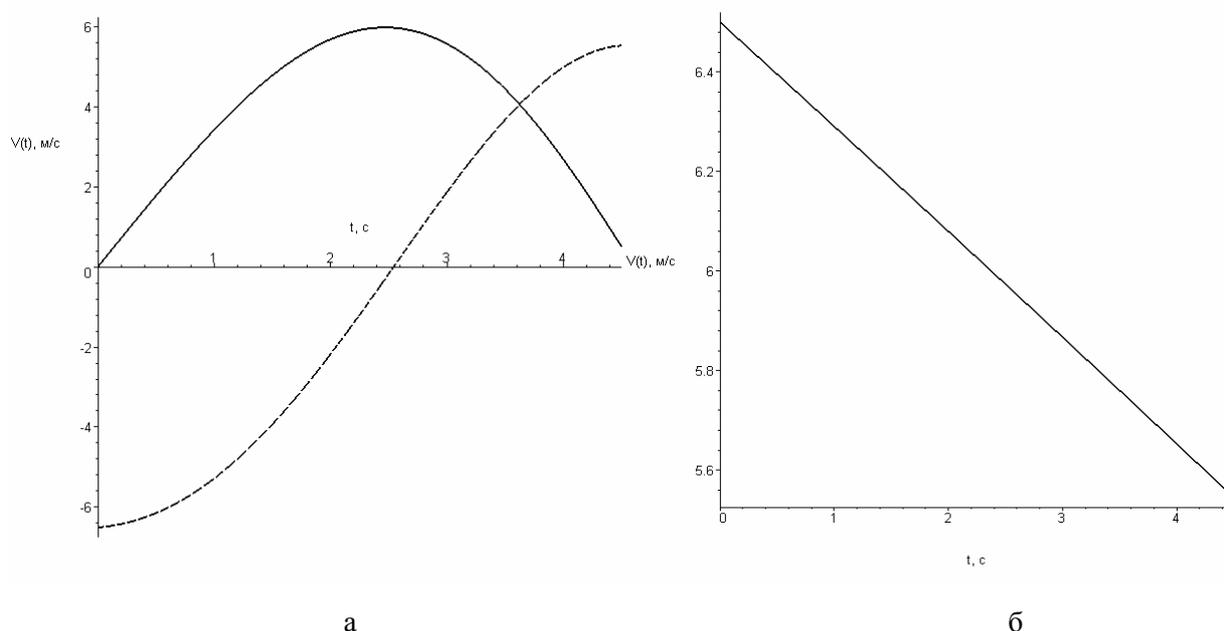


Рис. 4. Зависимость компонент скорости (а) ( $V_x$  – сплошная линия,  $V_y$  – пунктирная линия) и модуля скорости от времени (б) при заходе на прыжок

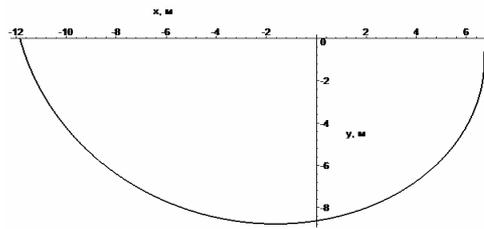


Рис. 5. Траектория захода на прыжок

С использованием данных первого этапа была решена задача второго этапа. Горизонтальные компоненты скорости остаются постоянными, а вертикальная составляющая меняется с течением времени (рис. 6).

Анализируя рис. 6, видно, что скорость фигуриста сначала уменьшалась, координата вертикальной компоненты при этом увеличивалась, затем вертикальная компонента скорости стала равная нулю - фигурист достиг максимальной координаты вертикальной компоненты, а потом, как и должно быть, скорость стала увеличиваться, а координата уменьшаться.

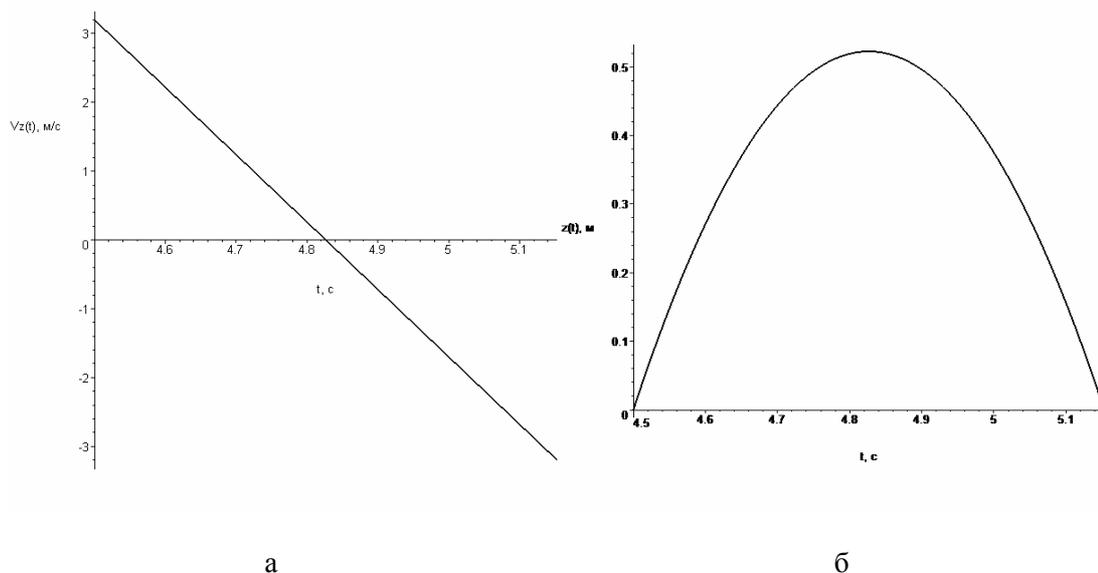


Рис. 6. Зависимость модуля скорости от времени (а) и траектория движения фигуриста (б) в фазе полета

В таблице 3 представлены данные, полученные в результате изменения начальных условий: скорости, коэффициента трения конька об лед. Видно, что наиболее сильное влияние на характеристики прыжка оказывает начальная скорость фигуриста, особенно ее вертикальная составляющая.

Таблица 3. Влияние начальных условий на характеристики прыжка

Горизонтальная составляющая начальной скорости, м/с	Вертикальная составляющая начальной скорости, м/с	Коэффициент трения лезвия конька об лед	Длина прыжка, м	Максимальная высота прыжка, м	Продолжительность прыжка, с
6,5	3,2	0,02	1,52	0,52	0,65
6,5	3,2	0,001	1,29	0,52	0,65
6,5	3,2	0,1	1,24	0,52	0,65
6	3,2	0,02	1,45	0,52	0,65
7	3,2	0,02	1,59	0,52	0,65
6,5	2,5	0,02	1,02	0,32	0,51

### *Вращение фигуриста в полете*

Задача была решена аналитически с помощью математического пакета Maple. Исходный код программы представлен в приложении 3.

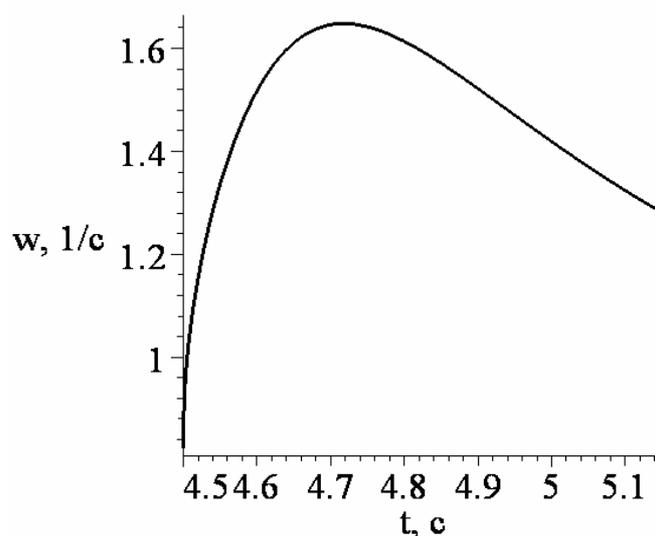


Рис. 7. Зависимость угловой скорости фигуриста от времени

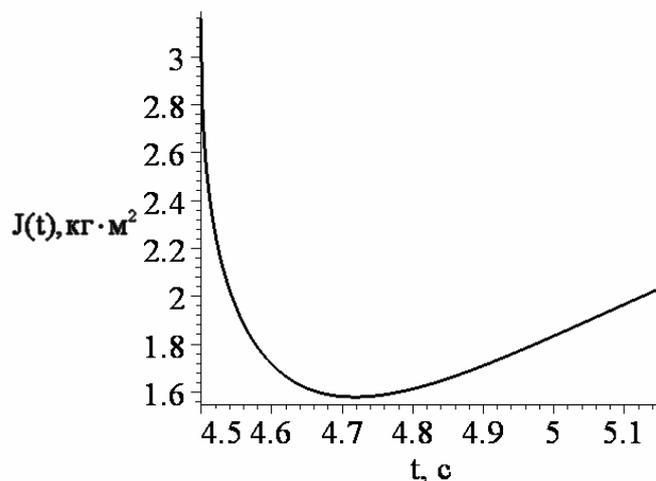


Рис. 8. Зависимость момента инерции от времени

На рис. 7 и на рис. 8 показаны как меняются момент инерции и угловая скорость фигуриста с течением времени. Зависимость момента инерции от времени представляет собой кривую Гаусса, которая имеет перегиб и точку минимума. На рис. 7 видно, что угловая скорость фигуриста сначала возрастает, а потом начинает убывать.

В таблице 4 представлены данные, полученные в результате изменения начальных условий: времени скольжения по дуге, начальной скорости, начального момента инерции, углами, временем перегиба. Видно, как меняется количество оборотов в зависимости от значений этих параметров. Анализируя эти данные можно сделать вывод, что для увеличения количества оборотов в прыжке следует набрать наибольшую начальную угловую скорость, что в свою очередь можно сделать за счет захода на прыжок по более крутой дуге.

Следует отметить, что получаемое с помощью данной модели количество оборотов в прыжке не достигают даже половины оборота. Это связано с тем, что модуль учитывает только вращение за счет изменения момента инерции тела и не учитывает мах свободной ногой и руками, которые фигуристы совершают в фазе отталкивания.

Таблица 4. Исследование зависимости количества оборотов фигуриста в прыжке от начальных условий.

Время скольжения по дуге, с	Начальная скорость, м/с	Начальный момент инерции, кг*м <sup>2</sup>	$\alpha$ 1, град	$\alpha$ 2, град	Время перегиба	Угловая скорость перед прыжком, 1/с	Количество оборотов в прыжке
4.5	6.5	3.158	20	25	0.45 (3/4)	0.824	0.136
4.5	6.5	3.158	25	30	0.45 (3/4)	1.028	0.166
4.5	6.5	3.158	30	40	0.45 (3/4)	1.517	0.25
4	6.5	3.158	20	25	0.45 (3/4)	0.809	0.132
5	6.5	3.158	20	25	0.45 (3/4)	0.84	0.136
6	6.5	3.158	20	25	0.45 (3/4)	0.874	0.144
4.5	6.5	3.947	20	25	0.45 (3/4)	0.824	0.16
4.5	6.5	2.369	20	25	0.45 (3/4)	0.824	0.108
4.5	6.5	2.369	20	25	0.34 (4/7)	0.824	0.116
4.5	6.5	2.369	20	25	0.51 (6/7)	0.824	0.14
4.5	6	2.369	20	25	0.45 (3/4)	0.906	0.148
4.5	7	2.369	20	25	0.45 (3/4)	0.756	0.124

## **Заключение**

В данной работе были построены математические модели прыжковых элементов фигурного катания, с помощью которых можно определить оптимальные характеристики этих элементов с тем, чтобы их исполнение было наиболее грамотным и безопасным для фигуриста.

В ходе работы были созданы три математические модели прыжка. Первая - с учетом силы сопротивления воздуха, действующей на фигуриста в процессе выполнения прыжка, вторая - модель прыжка с заходом и выездом, третья – полет прыжка с вращением фигуриста.

В результате было выяснено, что сопротивление воздуха практически не влияет на исполнение прыжка. Были получены аналитические зависимости координаты и скорости фигуриста от времени и построены их графики. Были найдены параметры, которые влияют на выполнение прыжка в целом, а также выяснено, какие параметры определяют вращения фигуриста в полете.

Сравнение моделей с экспериментальными данными, полученными из различных источников, дало хорошее совпадение.

## Список литературы

1. A biomechanical comparison of single, double and triple axels. / D. King, A. Arnold, S. Smith // J. Applied Biomechanics (1994) 10: 5-60.  
<http://w4.ub.uni-konstanz.de/cpa/article/view/1695/1597>
2. A Kinematic Analysis Between Triple and Quadruple Revolution Figure Skating Jump / M.Johnson, D.L. King. // American Society of Biomechanics Annual Meeting. 2001. - 2 p.  
<http://www.asbweb.org/conferences/2001/pdf/063.pdf>
3. Generation of Vertical Velocity in Toe-Pick Figure Skating Jumps / D. King // 19 International Symposium on Biomechanics in Sports (2001). – 66-69.  
[http://student.km.ru/ref\\_show\\_frame.asp?id=F1D57B6806E9486391F53A77A73C944E](http://student.km.ru/ref_show_frame.asp?id=F1D57B6806E9486391F53A77A73C944E).
4. Jump Height In Ladies Single Figure Skating In The 18th Winter Olympic Games In Nagano 1998 /S. Sakurai, Y. Ikegami, I. Akiya, K. Asano // 17 International Symposium on Biomechanics in Sports (1999). – 105-108.
5. Preliminary Biomechanical Study Of Triple Lutz / F. Merni, S. Fantozzi, L. Querin // International Seminar Of Artistic Roller Skating. Roccaraso 2010. – 18 p.
6. Имитационное биомеханическое моделирование как метод изучения двигательных действий человека / А.В. Воронов // Московский городской педагогический университет, Москва.
7. Мишин А. Н. Биомеханика движений фигуриста. - М: Физкультура и спорт, 1981. — 144 с, ил.
8. Мишин А. Н. Прыжки в фигурном катании. – М: Физкультура и спорт, 1976.
9. Мишин А. Н. Школа в фигурном катании. — М.: Физкультура и спорт, 1979. — 175 с.

10. Фигурное катание на коньках: Учеб. для ин-тов физ. культ. Под общ. ред. А. Н. Мишина. — М.: Физкультура и спорт, 1985. — 271 с.
11. Шабрыкина Н.С., Бурдейный А.А., Шудра С.В. Математическое моделирование элементов фигурного катания // Тезисы докладов X Всероссийской конференции «Биомеханика-2010», 16-22 мая 2010 г. — Саратов: изд-во Саратовского государственного университета, 2010. — с. 172.

**Приложение 1. Исходный код программы, использованной для  
решения системы дифференциальных уравнений в фазе прыжка с  
учетом силы сопротивления воздуха**

```
> R1:=-m*g-k*Vy(t)*Vy(t)=diff(Vy(t),t)*m;
> R2:=k*Vx(t)*Vx(t)=-diff(Vx(t),t)*m;
> RR1:=dsolve({R1,Vy(0)=Vy0},Vy(t));
> RR2:=dsolve({R2,Vx(0)=Vx0},Vx(t));
> VVx(t):=subs(RR2,Vx(t));
> VVy(t):=subs(RR1,Vy(t));
> Vx(t):=eval(VVx(t),{g=9.8,k=1,m=75,Vx0=4.8});
> Vy(t):=eval(VVy(t),{g=9.8,k=1,m=75,Vy0=3.4});
> v(t):=sqrt(Vy(t)^2+Vx(t)^2);
> plot(v(t),t=0..0.9);
> q:=diff(x(t),t)=Vx(t);
> w:=diff(y(t),t)=Vy(t);
> qq:=dsolve({q,x(0)=0},x(t));
> ww:=dsolve({w,y(0)=0},y(t));
> xx:=subs(qq,x(t));
> yy:=subs(ww,y(t));
> plot([xx,yy,t=0..0.7]);
> TT:=evalf(solve(yy=0,t));
```

## Приложение 2. Исходный код программы, использованной для решения системы дифференциальных уравнений в комплексной модели прыжка

```

> restart;
> mu:=0.001; m:=75; g:=9.8;
t1:=4.5; V10:=6.5; alpha1:=20*Pi/180; alpha2:=25*Pi/180;
V2z0:=3.2;
alpha3:=35*Pi/180; alpha4:=40*Pi/180;
Заход на прыжок
> alpha(t):=alpha1+(alpha2-alpha1)*t/t1;
> D1:=diff(V(t),t)=-mu*g/cos(alpha(t)); DD1:=dsolve({D1,V(0)=V10},V(t));
> V1(t):=simplify(subs(DD1,V(t)));
> plot(V1(t),t=0..t1,thickness=2, labels=["t, c", "V(t), м/с"],color=black);
> rho1(t):=simplify(V1(t)^2/(g*tan(alpha(t))));
> plot(rho1(t),t=0..t1,thickness=2,color=black , labels=["t, c", "радиус кривизны,
м"]);
> w1(t):=diff(beta1(t),t)=V1(t)/(rho1(t));
> ww:=dsolve({w1(t),beta1(0)=Pi},beta1(t));
phi1(t):=simplify(subs(ww,beta1(t)));
> plot(phi1(t),t=0..t1, thickness=2,title="Зависимость угла от времени", labels=["t,
с", "угол, рад"]);
> x1(t):=simplify(rho1(t)*cos(phi1(t)));
> y1(t):=simplify(rho1(t)*sin(phi1(t)));
> plot([x1(t),y1(t),t=0..t1],thickness=2,color=black, labels=["x, м", "y, м"]);
> V1x(t):=-V1(t)*sin(phi1(t)); V1y(t):=V1(t)*cos(phi1(t));
> plot({V1x(t),V1y(t)},t=0..t1,thickness=2, labels=["t, c", "V(t), м/с"],
color=[black,black],linestyle=[solid,dash]);
Прыжок
> V2x0:=evalf(subs(t=t1,V1x(t))); V2y0:=evalf(subs(t=t1,V1y(t)));
> R1:=-m*g=diff(V(t),t)*m; RR1:=dsolve({R1,V(t1)=V2z0},V(t));
V2z(t):=subs(RR1,V(t));
> tt:=solve({V2z(t)=0,t>t1},t); t_:=subs(tt,t); tjump:=2*(t_-t1); t2:=t1+tjump;
> plot(V2z(t),t=t1..t2,thickness=2, labels=["t, c", "Vz(t), м/с"],color=black);
> x20:=evalf(subs(t=t1,x1(t)));y20:=evalf(subs(t=t1,y1(t))); z20:=0;
> qq:=diff(x(t),t)=V2x0; q:=dsolve({qq,x(t1)=x20},x(t)); x2(t):=subs(q,x(t));
> rr:=diff(y(t),t)=V2y0; r:=dsolve({rr,y(t1)=y20},y(t)); y2(t):=subs(r,y(t));
> plot({x2(t),y2(t)},t=t1..t2, thickness=2, labels=["t, c", "координата, м"],
color=[black,black],linestyle=[solid,dash]); plot([x2(t),y2(t),t=t1..t2],thickness=2,color=black,
labels=["x, м", "y, м"],color=black);
> ee:=diff(z(t),t)=V2z(t); e:=dsolve({ee,z(t1)=0},z(t)); z2(t):=subs(e,z(t));
> plot(z2(t),t=t1..t2, thickness=2, color=black, labels=["t, c", "z(t), м"]);
plot([x2(t),z2(t),t=t1..t2], thickness=2, color=black, labels=["x, м", "z, м"],title="Траектория
z(x)"); plot([y2(t),z2(t),t=t1..t2], thickness=2, color=black, labels=["y, м", "z,
м"],title="Траектория z(y)");
> delx:=evalf(subs(t=t2,x2(t))-subs(t=t2,x1(t)));
dely:=evalf(subs(t=t2,y2(t))-subs(t=t2,y1(t))); L:=sqrt(delx^2+dely^2);
Выезд
> x30:=subs(t=t2,x2(t)); y30:=subs(t=t2,y2(t));t3:=t2+2;
> epsilon(t):=((alpha3-alpha4)/(t2-t3))*t+(t2*alpha4-t3*alpha3)/(t2-t3);

```

```

> plot(epsilon(t),t=t2..t3);
> phi30:=arctan(y30/x30);
> V3x0:=subs(t=t2, V1x(t));
> V3y0:=subs(t=t2,V1y(t));
> V30:=sqrt((V3x0)^2+(V3y0)^2);
> K3:=diff(V(t),t)=-mu*g/cos(epsilon(t));    KK1:=dsolve({K3,V(t2)=V30},V(t));
V3(t):=subs(KK1,V3(t));
> rho3(t):=evalf(V3(t)^2/(g*tan(epsilon(t))));
> w3(t):=diff(delta3(t),t)=evalf(V3(t)/(rho3(t)));
> www:=dsolve({w3(t),delta3(t2)=Pi/2+phi30},delta3(t));
phi3(t):=evalf(simplify(subs(www,delta3(t))));
> plot(phi3(t),t=t2..10);
> x3(t):=rho3(t)*cos(phi3(t)): y3(t):=rho3(t)*sin(phi3(t));
> plot([x3(t),y3(t)],t=t2..10); plot([x3(t),y3(t),t=t2..10]);
> FF:=t->piecewise(t<t1,x1(t), t>=t1 and t<t2, x2(t), t>=t2 and t<=10, x3(t));GG:=t-
>piecewise(t<t1,y1(t), t>=t1 and t<t2, y2(t), t>=t2 and t<=10, y3(t));
> plot([FF(t),GG(t)],t=0..10); plot([FF(t),GG(t),t=0..10],color=black);

```

**Приложение 3. Исходный код программы, использованной для решения системы дифференциальных уравнений для вращения фигуриста в полете**

```
> y:=J0-a*t^b*exp(c*t):
> eq:={tgr=-b/c,tper=-(b+sqrt(b))/c}:
sol:=simplify(solve(eq,{b,c})):
> b1:=eval(b,sol): c1:=eval(c,sol): a1:=(J0-Jf)/exp(-b1)/tgr^b1:
> J(t):=subs({a=a1,b=b1,c=c1},y):
> plot(J(t),t=0..tjump):
> w20 := .8241440216:
> w2:=evalf((J0*w20)/J(t)): plot(w2,t=0..tjump):
> L1:=diff(phi2(t),t)=w2: ds:=dsolve({L1,phi2(0)=0},phi2(t)):
> phi:=eval(phi2(t),ds): plot(phi/2/Pi,t=0..tjump):
```