Краевой конкурс творческих работ учащихся

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Разработка тренировочной программы для решения задач по теории игр

Стволова Софья Сергеевна,

Землянухин Александр Дмитриевич

11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Волегов Павел Сергеевич,

доцент ПНИПУ, к.ф.-м. н.

Пермь. 2012.

Оглавление

Введение3

Глава 1.Теория игр Основная теорема теории игр 4

Парная игра с нулевой суммой, цена игры 6

Глава 2. Типы игр 8

Кооперативные и некооперативные 8

Симметричные и несимметричные 9

С нулевой суммой и с ненулевой суммой 9

Параллельные и последовательные 10

С полной или неполной информацией 10

Дискретные и непрерывные игры 11

Метаигры 11

Глава 3. Постановка задачи 12

Глава 4. Написание программы 13

Частный случай задачи 13

Общий вид задачи 14

Заключение 17

Использованная литература: 17

Введение

Чем занимается теория игр?

Что такое теория игр?

Это — математическая теория конфликтов.

А что такое конфликт?

Это такая ситуация (положение, стечение обстоятельств), в которой сталкиваются интересы сторон, происходит борьба интересов. Каждый из участников хочет чего-то своего, не того, чего хотят другие.

Самые простые примеры конфликтов — это игры (шашки, шахматы, карточные игры и т.д.).

Они отличаются тем, что ведутся по определенным правилам. Правила игры - это система условий, указывающих, какие возможности предоставляются игрокам (перечень возможных ходов); к какому результату (выигрышу, проигрышу) приводит каждая данная совокупность ходов.

Далеко не каждый встречающийся на практике конфликт протекает по правилам. Чтобы сделать возможным математический анализ конфликта, нужно представить конфликт в игровой форме, т. е. указать стратегии (образы действий), возможные для участников, и уточнить, к какому результату приведет игра, если каждый из игроков выберет определенную стратегию. Таким образом, игра есть конфликт с четко сформулированными условиями.

Мы будем предполагать, что в любом конфликте выигрыш (проигрыш) каждого из игроков выражается числом. Тогда основную задачу теории игр можно сформулировать так: как должен вести себя (какую стратегию применять) разумный игрок в конфликте с разумным противником (или противниками), чтобы обеспечить себе в среднем наибольший возможный выигрыш"?

Глава 1.Теория игр

Основная теорема теории игр

Мы знаем, что если нижняя цена игры a равна верхней b (максимин равен минимаксу) то игра имеет седловую точку и по крайней мере одно решение в чистых стратегиях.

А если $\alpha \neq \beta$? Можно доказать, что и в этом случае решение всегда есть, только оно лежит не в области чистых, а в области смешанных стратегий. Решением игры называется такая пара стратегий — в общем случае смешанных, систематическое применение которых обеспечивает каждой стороне максимально возможный для нее по условиям игры выигрыш, определяемый ценой игры. Если же одна из сторон отступает от своей оптимальной стратегии (в то время как другая продолжает придерживаться своей), то это ни в коем случае не может быть выгодно для отступающего; это либо оставит его выигрыш неизменным, либо уменьшит. Таким образом, каждая конечная игра имеет решение (возможно, в области смешанных стратегий). Это положение называется основной теоремой теории игр.

Введем специальное обозначение для смешанных стратегий. Пусть К применяет свои стратегии $К_1$, $К_2$, $К_3$ с частотами соответственно p_1, p_2, p_3 ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$). Эту смешанную стратегию будем обозначать:

S_k=	$К_1$ $К_2$ $К_3$ p_1 p_2 p_3

Аналогично смешанную стратегию игрока С будем обозначать:

S_c=	C_1C_2 C_3 q_1 q_2 q_3

где $q_1 + q_2 + q_3 = 1$.

Очевидно, любая чистая стратегия — частный случай смешанной, в которой все частоты, кроме одной, равны нулю, а одна — единице.

Решение игры — пару оптимальных стратегий — будем обозначать S_k* и S_c* , а соответствующий ему выигрыш (цену игры) v.

Очевидно, что цена игры v не может быть меньше нижней и больше верхней цены:

$\alpha \leq v \leq \beta$

В первом примере мы путем нестрогих соображений догадались, что решение игры должно быть:

S_k*=	K_1K_2 ½ ½		S_c*=	C_1C_2 ½ ½	

а цена игры v = 0. Проверим это. Пусть мы («красные») держимся своей стратегии S_k*, т. е. ищем С в убежище I и II одинаково часто, череду я эти стратегии случайным образом. Может ли С улучшить свое положение (повысить свой выигрыш), отступая любым образом от своей стратегии S_c*? Очевидно, нет. А если одностороннее отступление от стратегии S_k* при дет в голову нам (в то время как разумный С будет держаться стратегии S_c*), то это нам то же не может быть выгодно. Значит, мы и в самом деле нашли решение игры и ее цену v = 0. Правда, эта игра была довольно простой! Уже второй пример дает игру, решение которой не так очевидно. Из того, что в нем $\alpha \neq \beta$, следует, что решение нужно искать в смешанных стратегиях.

Но каково это решение? Какова цена игры? Выгодна ли игра «красным», или «синим», или никому из них?

Парная игра с нулевой суммой, цена игры

Каждую игру будем рассматривать как конфликт между двумя игроками: К («красные») и С («синие»). Для удобства рассуждений, чтобы иметь какую-то определенную точку зрения, будем обычно становиться на сторону одного из игроков (пусть это будет К) и говорить о нем «мы», а о другом — «противник». Это не означает, что сторона К будет иметь какое-нибудь реальное преимущество. Просто нам так будет удобнее.

Игра называется игрой с нулевой суммой, если одна сторона выигрывает то, что проигрывает другая, т. е. сумма выигрышей К и С равна нулю. В жизни часто встречаются конфликты, в которых это условие не выполняется. Например, в военном столкновении вполне возможно, что проигрывают обе стороны. Однако во многих случаях можно, не слишком искажая сущность явления, рассматривать парные конфликты как игры с нулевой суммой.

Итак, допустим, что интересы К и С строго противоположны и что сумма выигрышей их равна нулю. Это будет для нас очень удобно в вычислительном смысле. Еще бы! Ведь если выигрыш К равен по величине и противоположен по знаку выигрышу С, то можно рассматривать выигрыш только одного из игроков: выигрыш другого определится автоматически.

Давайте выберем в качестве выигрывающего игрока К. Игрок К заинтересован в том, чтобы обратить свой выигрыш (обозначим его k) в максимум (сделать его наибольшим). Игрок С, наоборот, заинтересован в том, чтобы обратить его в минимум (сделать наименьшим). Каждый из игроков К и С, преследуя свою цель, принимает все меры к тому, чтобы ему было лучше, а сопернику — хуже.

В результате борьбы интересов, если оба противника одинаково разумны, по-видимому, должно быть найдено некоторое равновесное положение, при котором каждый игрок получит то, что ему причитается,— не больше и не меньше. Этот равновесный средний выигрыш, на который вправе рассчитывать игрок К, если обе стороны будут вести с разумно, т. е.

придерживаться своих оптимальных (наилучших) стратегий, называется ценой игры.

Если цена игры равна нулю, значит, это справедливая игра, т. е. она в одинаковой мере выгодна или невыгодна той и другой стороне, если цена игры положительна, значит игра выгодна для К. Если отрицательна, придется признать, что она выгодна для С...

Решить игру – это значит найти пару оптимальных стратегий (для К и С) и цену игры, т. е. средний выигрыш игрока К, если оба – и К и С – будут вести себя разумно.

А если разумно будет вести себя только К, а не С? Ну что же – тем хуже для С! Выигрыш К от этого уменьшиться не может. В худшем случае он останется таким же, а в лучшем – увеличиться.

Целью теории игр является выработка рекомендаций для разумного поведения игроков в конфликтных ситуациях, т.е. определение «оптимальной стратегии» каждого из них.

Глава 2. Типы игр

Кооперативные и некооперативные

Игра называется кооперативной, или *коалиционной*, если игроки могут объединяться в группы, беря на себя некоторые обязательства перед другими игроками и координируя свои действия. Этим она отличается от некооперативных игр, в которых каждый обязан играть за себя. Развлекательные игры редко являются кооперативными, однако такие механизмы нередки в повседневной жизни.

Часто предполагают, что кооперативные игры отличаются именно возможностью общения игроков друг с другом. В общем случае это неверно. Существуют игры, где коммуникация разрешена, но игроки преследуют личные цели, и наоборот.

Из двух типов игр, некооперативные описывают ситуации в мельчайших деталях и выдают более точные результаты. Кооперативные рассматривают процесс игры в целом. Попытки объединить два подхода дали немалые результаты. Так называемая *программа Нэша* уже нашла решения некоторых кооперативных игр как ситуации равновесия некооперативных игр.

Гибридные игры включают в себя элементы кооперативных и некооперативных игр. Например, игроки могут образовывать группы, но игра будет вестись в некооперативном стиле. Это значит, что каждый игрок будет преследовать интересы своей группы, вместе с тем стараясь достичь личной выгоды.

Симметричные и несимметричные

Игра будет симметричной тогда, когда соответствующие стратегии у игроков будут равны, то есть иметь одинаковые платежи. Иначе говоря, если игроки могут поменяться местами и при этом их выигрыши за одни и те же ходы не изменятся. Многие изучаемые игры для двух игроков — симметричные. В частности, таковыми являются: «Диллема заключенного», «Охота на оленя», «Ястребы и голуби». В качестве несимметричных игр можно привести «Ультиматум» или «Диктатор».

	А	Б
А	1, 2	0, 0
Б	0, 0	1, 2
Несимметричная игра		

В примере справа игра на первый взгляд может показаться симметричной из-за похожих стратегий, но это не так — ведь выигрыш второго игрока при профилях стратегий (А, А) и (Б, Б) будет больше, чем у первого.

С нулевой суммой и с ненулевой суммой

Игры с нулевой суммой — особая разновидность **игр с постоянной суммой**, то есть таких, где игроки не могут увеличить или уменьшить имеющиеся ресурсы, или фонд игры. В этом случае сумма всех выигрышей равна сумме всех проигрышей при любом ходе. Посмотрите направо — числа означают платежи игрокам — и их сумма в каждой клетке равна нулю. Примерами таких игр может служить покер, где один выигрывает все ставки других; реверси, где захватываются фишки противника; либо банальное воровство.

	А	Б
А	−1, 1	3, −3
Б	0, 0	−2, 2
Игра с нулевой суммой		

Многие изучаемые математиками игры, в том числе уже упоминавшаяся «Дилемма заключённого», иного рода: в *играх с ненулевой* *суммой* выигрыш какого-то игрока не обязательно означает проигрыш другого, и наоборот. Исход такой игры может быть меньше или больше нуля. Такие игры могут быть преобразованы к нулевой сумме — это делается введением фиктивного игрока, который «присваивает себе» излишек или восполняет недостаток средств.

Ещё игрой с отличной от нуля суммой является торговля, где каждый участник извлекает выгоду. Сюда также относятся го, шашки и шахматы; в двух последних игрок может превратить свою рядовую фигуру в более сильную, получив преимущество. Во всех этих случаях сумма игры увеличивается. Широко известным примером, где она уменьшается, является *война*.

Параллельные и последовательные

В параллельных играх игроки ходят одновременно, или, по крайней мере, они не осведомлены о выборе других до тех пор, пока *все* не сделают свой ход. В последовательных, или *динамических*, играх участники могут делать ходы в заранее установленном либо случайном порядке, но при этом они получают некоторую информацию о предшествующих действиях других. Эта информация может быть даже *не совсем полной*, например, игрок может узнать, что его противник из десяти своих стратегий *точно не выбрал* пятую, ничего не узнав о других.

Различия в представлении параллельных и последовательных игр рассматривались выше. Первые обычно представляют в нормальной форме, а вторые — в экстенсивной.

С полной или неполной информацией

Важное подмножество последовательных игр составляют игры с полной информацией. В такой игре участники знают все ходы, сделанные до текущего момента, равно как и возможные стратегии противников, что позволяет им в некоторой степени предсказать последующее развитие игры.

Полная информация не доступна в параллельных играх, так как в них неизвестны текущие ходы противников. Большинство изучаемых в математике игр — с неполной информацией. Например, вся «соль» *Диллемы заключенного* или *Сравнения монеток* заключается в их неполноте.

В то же время есть интересные примеры игр с полной информацией: «Ультиматум», «Многоножка». Сюда же относятся шахматы, шашки, го, манкала и другие.

Часто понятие полной информации путают с похожим — совершенной информации. Для последнего достаточно лишь знание всех доступных противникам стратегий, знание всех их ходов необязательно.

Дискретные и непрерывные игры

Большинство изучаемых игр *дискретны*: в них конечное число игроков, ходов, событий, исходов и т. п. Однако эти составляющие могут быть расширены на множество вещественных чисел. Игры, включающие такие элементы, часто называются дифференциальными. Они связаны с какой-то вещественной шкалой (обычно — шкалой времени), хотя происходящие в них события могут быть дискретными по природе. Дифференциальные игры также рассматриваются в теории оптимизации, находят своё применение в технике и технологиях, физике.

Метаигры

Это такие игры, результатом которых является набор правил для другой игры (называемой *целевой* или *игрой-объектом*). Цель метаигр — увеличить полезность выдаваемого набора правил. Теория метаигр связана с теорией оптимальных механизмов.

Глава 3. Постановка задачи

Задачи ЕГЭ бывают двух видов: с кучками и с координатной плоскостью. Суть задачи - дать ответ на вопрос, какой игрок выигрывает при безошибочной игре противника. Разновидность задач только в формулировках.

Для того чтобы выбрать логическую структуру, подходящую для определения «оптимальной стратегии» решения С3 по информатике, следует сначала определить ее функциональные задачи. Нас будет интересовать два аспекта:

1) Задачи, в условии которых говорится о камнях.
2) Задачи, в условии которых говорится о координатной плоскости.

Первое и второе достижимо, если использовать математический подход.

Глава 4. Написание программы

Частный случай задачи

Рассмотрим несколько примеров задач из ЕГЭ:

Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 3, а во второй 4 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или удваивает число камней в какой-то куче или добавляет 4 камня в какую-то кучу. Игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится больше 25, **проигрывает**. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков – игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

Решение:

Выигрывает второй игрок.

Для доказательства рассмотрим неполное дерево игры, оформленное в видетаблицы, где в каждой ячейке записаны пары чисел, разделенные запятой.Эти числа соответствуют количеству камней на каждом этапе игры в первойи второй кучках соответственно.

	1 ход	2 ход	3 ход	4 ход	
Старто-вая позиция	**I-й игрок (все варианты хода)**	**II-й игрок (выигрыш-ный ход)**	**I-й игрок (все варианты хода кроме непосредствен-но проигрышных)**	**II-й игрок (выигрышные ходы, экзаменуемому достаточно указать один из вариантов)**	**Пояснение**
3, 4	6, 4	**12, 4**	12, 8	**16, 8** **12, 12**	Любой следующий

			16, 4	**20, 4** **16, 8**	ход первого игрока является непосредственно проигрышным
	3, 8	**3, 12**	6, 12	**10, 12** **6, 16** **12, 12**	
			3, 16	**7, 16** **3, 20** **6, 16**	
			7, 12	**11, 12** **7, 16**	
	7, 4	**11, 4**	15, 4	**19, 4** **15, 8**	
			11, 8	**15, 8** **11, 12**	

Общий вид задачи

Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых N1, а во второй – N2 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или увеличивает в R раза число камней в какой-то куче, или добавляет K камней в какую-то кучу. Выигрывает игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится не менее M камней. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков – игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

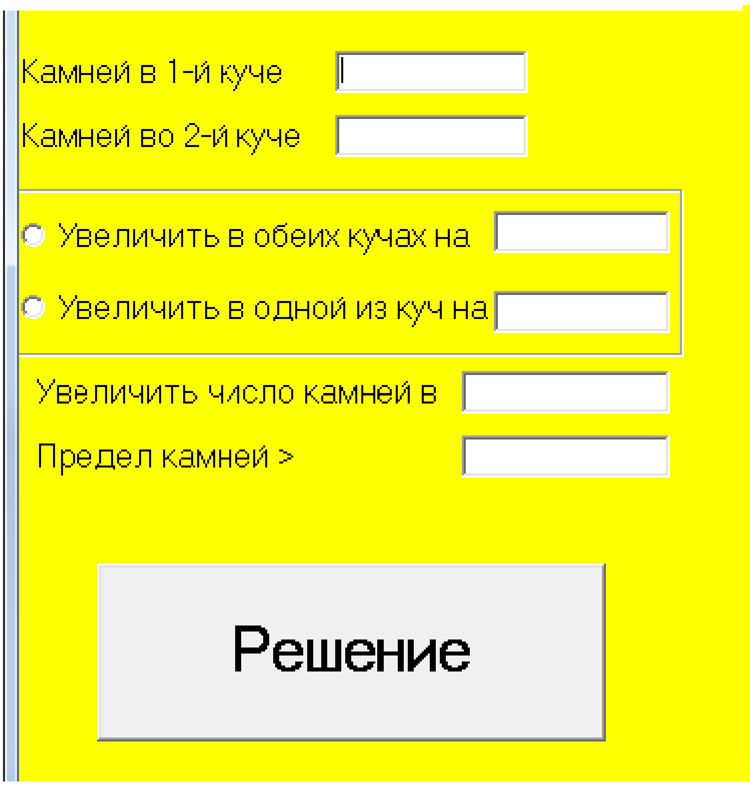
Составим неполное дерево игры:

Стартовая	1 ход	2 ход	И так далее пока один из

позиция			игроков не выйграет
N1, N2	R*N1, N2	R*R*N1, N2	
		R*N1, R*N2	
		K+R*N1, N2	
		R*N1, K+N2	
	N1, R*N2	R*N1, R*N2	
		N1, R*R*N2	
		K+N1, R*N2	
		N1, K+R*N2	
	N1+K, N2	R*(N1+K), N2	
		N1+K, R*N2	
		2K+N1, N2	
		N1+K, K+N2	
	N1, K+N2	R*N1, K+N2	
		N1, R*(K+N2)	
		K+N1, K+N2	
		N1, 2K+N2	

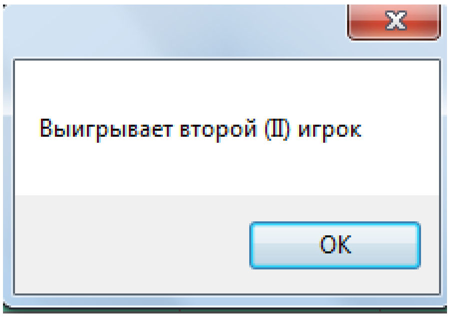
Разработка программы решаюшей 1-й тип задач:

В свободные поля программы введите начальные позиции. И остальные поля заполните по условию задачи. Далее нажмите кнопку «Решение».



После чего программа выдаст вам неполное дерево игры, а именно до 6-го хода, с соответствующей надписью, кто победил (1-й или 2-й игрок).

Т.к. уже на 5-ом ходу будет представлено более 250 вариантов ходов, программа получается не наглядной, но при дальнейшей работе мы будем стремиться к улучшению интерфейса и отбору корней.



начало	1	2	1	2
	(8,3) 11	(12,3) 15	(16,3) 19	(20,3) 23
				(16,7) 23
				(32,3) 35
				(16,6) 22
			(12,7) 19	(16,7) 23
				(12,11) 23
				(24,7) 31
				(12,14) 26
			(24,3) 27	(28,3) 31
				(24,7) 31
				(48,3) 51
				(24,6) 30
			(12,6) 18	(16,6) 22
				(12,10) 22
				(24,6) 30
				(12,12) 24
(4,3) 7		(8,7) 15	(12,7) 19	(16,7) 23
				(12,11) 23
				(24,7) 31
				(12,14) 26

Заключение

В ходе нашей работе была написана программа, облегчающая подготовку учеников к экзамену. В дальнейшей работе планируется поиск новых задач, которые можно решить с помощью теории игр.

Использованная литература:

1. Е. С. Вентцель / Детская Энциклопедия том 2 / Теория игр/ "ПРОСВЕЩЕНИЕ" Москва 1965.
2. Вентцель Е.С. Элементы теории игр. (ПЛМ 32) М.: Физматгиз, 1961.