Краевой конкурс творческих работ учащихся
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

# Пятый постулат Евклида

Торговцева Мария Ростиславовна,
9 кл., МАОУ «Лицей №10», г. Перми

Гасанова Светлана Керимовна,
учитель математики МАОУ «Лицей №10»

Пермь. 2012.

Содержание

## Введение

Геометрия – одна из наиболее древних математических наук. Первые геометрические факты найдены в вавилонских клинописных таблицах и египетских папирусах (3 тысячелетие до н.э.). Возникновение геометрических знаний связано с практической деятельностью человека. В третьем веке до н.э. древнегреческий учёный Евклид написал книгу под названием «Начала». В этой книге Евклид подытожил накопленные к тому времени геометрические знания и попытался дать законченное аксиоматическое изложение этой науки. Написана она была настолько хорошо, что в течение 2000 лет повсюду преподавание велось либо по переводам, либо по незначительным переработкам этой книги. Немецкий философ И. Кант считал, что понятия и идеи евклидовой геометрии были заложены в человеческое сознание ещё до того, как человек научился что-либо осознавать.

Геометрия Евклида признавалась самым незыблемым творением научной мысли, при всем том математики, которые шли дальше, которые подвергали тщательному анализу каждое отдельное предложение, оценивая его не только с точки зрения содержания, но и выдержанности логической концепции были склонны к критике. Конкурировать с Евклидом, написать новые начала геометрии в течение многих веков не решался никто; но в критике отдельных его установок и рассуждений не было недостатка. Внимательный анализ обнаруживал, что умозаключение часто подменяется интуицией, указаниями наглядных представлений, соображениями, основанными на очевидности, т. е. на ощущениях глаза. Благодаря их анализу стало совершенно ясно, что этот фундамент слаб, что крепкое здание геометрии поддерживается еще другими основаниями, не получившими выражения в аксиоматике Евклида. Комментаторы Евклида выявили, что «Начала» Евклида еще очень далеки от той совершенной дедукции, которую им приписывали, которой требовал Платон. Вера в это совершенство была поколеблена.

Одним из «слабых мест» Евклида является пятый постулат.

Цель моей работы: Выяснить причину разделения геометрии на абсолютную и евклидову геометрию, узнать каким образом на это повлиял пятый постулат.

Задачи:

1. Собрать исторический материал о Евклиде и «Началах».
2. Узнать подробнее о пятом постулате.
3. Узнать имена ученых, занимавшихся его доказательством.
4. Узнать удалось ли решить проблему с этой теоремой.

# О «Началах» Евклида

В 5 веке до нашей эры появились сочинения, содержавшие обширный геометрический материал и носившие ясно выраженную печать дедуктивной логической системы. Одно из этих сочинений было в ходу в академии Платона. Платон предъявлял особенно высокие требования к строгости геометрической дедукции. Его ученик Аристотель дал этим требованиям гораздо более точное выражение, он указал пути и правила, которым надлежит следовать при выполнении этих требований; он создал теорию логического вывода (дедукции). По схеме Аристотеля всякая дедуктивная наука должна начинаться установлением свойственных ей категорий - основных понятий, не подлежащих определению, и аксиом - основных истин, не подлежащих доказательству. Все остальное должно быть строгим логическим выводом из этих исходных предпосылок. В следующем столетии этот замысел был в известной мере выполнен Евклидом. Евклид (иначе Эвклид) – древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Биографические сведения о Евклиде крайне скудны. Мировую известность приобрёл благодаря его сочинению по основам математики «Начала». Составленные им «Начала», вытеснили все существовавшие до него руководства по геометрии и, как мы уже знаем, свыше двух тысяч лет почти безраздельно царили в школе и всюду, где учились геометрии. «Начала» содержали основы античной математики, элементарной геометрии, теории чисел, общей теории отношений и метода определения площадей и объемов, включавшего элементы теории пределов, оказал огромное влияние на развитие математики. Создавая свой учебник, Евклид включил в него многое из того, что было создано его предшественниками, обработав этот материал и сведя его воедино. Начала состоят из тринадцати книг. Первая и некоторые другие книги предваряются списком определений. Первой книге предпослан также список постулатов и аксиом. Как правило, постулаты задают базовые построения, а аксиомы — общие правила вывода при оперировании с величинами. В I книге изучаются свойства треугольников и параллелограммов; эту книгу венчает знаменитая теорема Пифагора для прямоугольных треугольников. Книга II, восходящая к пифагорейцам, посвящена так называемой «геометрической алгебре». В III и IV книгах излагается геометрия окружностей, а также вписанных и описанных многоугольников; при работе над этими книгами Евклид мог воспользоваться сочинениями Гиппократа Хиосского. В V книге вводится общая теория пропорций, построенная Евдоксом Книдским, а в VI книге она прилагается к теории подобных фигур. VII—IX книги посвящены теории чисел и восходят к пифагорейцам; автором VIII книги, возможно, был Архит. Тарентский. В этих книгах рассматриваются теоремы о пропорциях и геометрических прогрессиях, вводится метод для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел (известный ныне как алгоритм Евклида), строится чётные совершенные числа, доказывается бесконечность множества простых чисел. В X книге, представляющей собой самую объёмную и сложную часть Начал, строится классификация иррациональностей; возможно, что её автором является Теэтет Афинский. XI книга содержит основы стереометрии. В XII книге с помощью метода исчерпывания, доказываются теоремы об отношениях площадей кругов, а также объёмов пирамид и конусов; автором этой книги по общему признанию является Евдокс Книдский. Наконец, XIII книга посвящена построению пяти правильных многогранников; считается, что часть построений была разработана Теэтетом Афинским. В дошедших до нас рукописях к этим тринадцати книгам прибавлены ещё две. XIV книга принадлежит александрийцу Гипсиклу, а XV книга создана во время жизни Исидора Милетского.

Современный читатель, ознакомившись с текстом «Начал», узнает в них многое, чему он учился по современному учебнику геометрии, не только по содержанию, но и по форме, вплоть до формулировок отдельных теорем. Известный английский геометр де Морган в середине прошлого века писал: «Никогда не было системы геометрии, которая в существенных чертах отличалась бы от плана Евклида; и до тех пор, пока я этого не увижу собственными глазами, я не поверю, что такая система может существовать». Каждая книга начинается определениями всех тех понятий, которые в этой книге встречаются; первой же книге предпосланы постулаты и аксиомы. До сих пор еще идут споры о том, как Евклид отличал постулаты от аксиом. Аксиомы – суть истины, относящиеся ко всяким величинам, не только геометрическим. Постулаты – это требования геометрического характера, которые читатель должен принять для того, чтобы он был вынужден признать все дальнейшие выводы. Много произведений Евклида утеряно, об их существовании в прошлом нам известно только по ссылкам в сочинениях других авторов. Тщательное сличение всех материалов дало возможность почти полностью восстановить подлинный текст Евклида; сомнительных мест остается немного, преимущественно в аксиомах и определениях, «исправить» которые переписчики особенно старались. Геометрия Евклида признавалась самым незыблемым творением научной мысли, и общее впечатление, которое выносил каждый, кто был в состоянии усвоить «Начала», это, несомненно, подтверждало. При всем том математики, которые шли дальше, которые подвергали тщательному анализу каждое отдельное предложение, оценивая его не только с точки зрения содержания, но и выдержанности логической концепции были склонны к критике. Конкурировать с Евклидом, написать новые начала геометрии в течение многих веков не решался никто; но в критике отдельных его установок и рассуждений не было недостатка. Издатели «Начал» обыкновенно сопровождали их многочисленными комментариями, одни из которых имели целью лучше пояснить мысль Евклида, другие же предлагали более простые доказательства, а часто выявляли слабые стороны сочинения, его недостатки. Внимательный анализ обнаруживал, что умозаключение часто подменяется интуицией, указаниями наглядных представлений, соображениями, основанными на очевидности, т. е. на ощущениях глаза. Всякий, кто учился геометрии, конечно, припомнит, как часто ему помогал чертеж, помогал своею наглядностью, а не логически установленными признаками. Такого рода соображения, основанные на наглядной очевидности, в рассуждениях Евклида встречаются на каждом шагу, нарушая «цепь логических выводов». «Начала» должны быть признаны пестрой смесью логики и интуиции. На критике исходных определений, аксиом и постулатов Евклида сосредоточенно главным образом внимание комментаторов. Благодаря их анализу стало совершенно ясно, что этот фундамент слаб, что крепкое здание геометрии поддерживается еще другими основаниями, не получившими выражения в аксиоматике Евклида. Комментаторы не без основания исключали одни аксиомы или постулаты (например, постулат IV), иногда не без основания включали другие; но ничего сколько-нибудь существенного в систему Евклида они не внесли. Комментаторы Евклида выявили, что «Начала» Евклида еще очень далеки от той совершенной дедукции, которую им приписывали, которой требовал Платон. Вера в это совершенство была поколеблена.

# О ПЯТОМ ПОСТУЛАТЕ ЕВКЛИДА

Учение о параллельных линиях Евклид строит, так сказать, на двойном базисе. Первым фундаментом этого учения служит 16-е предложение книги, т.е. первая теорема о внешнем угле треугольника: ***внешний угол треугольника больше каждого их внутренних с ним не смежных углов.*** При пересечении двух прямых, расположенных в одной плоскости, третьей (рис. 1) образуется 8 углов, которые в парных комбинациях получают различные названия.

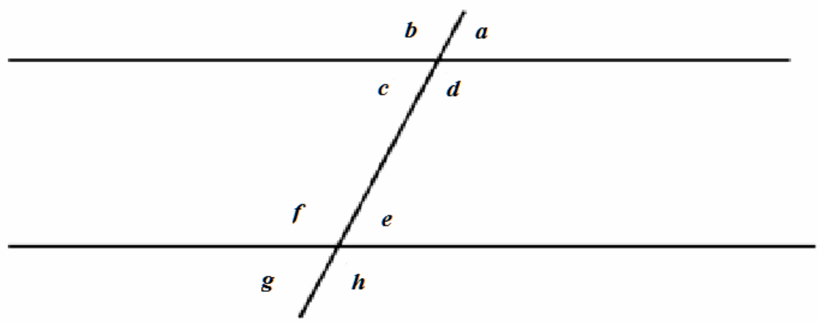



Рис. 1

Если из внутренних накрест лежащих углов какие-либо два равны между собой, т. е. если $c = e$ или $d = f$ ***(1),*** то линии параллельны; в самом деле, если бы эти прямые пересекались, то образовался бы треугольник, в котором один из внешних углов был бы равен внутреннему, с ним не смежному, что противоречит 16 предложению. Отсюда следует, что линии параллельны также, если равны два внешних накрест лежащих угла, т. е. если имеет место одно из равенства $a = g$ или $b = h$ ***(2)*** или, если равны два соответственных угла $a = e$, $b = f$, $c = g$, $d = h$ ***(3)*** или есть какие-либо два внутренних или два внешних односторонних угла составляют вместе $2d$, т. е. если $c + f = 2d$, или $d + e = 2d$, или $a + h = 2d$, или $b + g = 2d$ ***(4).*** Дело в том, что каждое из 12 равенств ***(1) – (4)*** влечет за собой все остальные 11. Мы приходим, таким образом, к теореме, которая вытекает, главным образом, из предложения, связанного с равенством ***(1)***:

Теорема. ***Если при пересечении двух прямых, лежащих в одной плоскости, третьей имеет место одно из равенств (1) – (4), то эти прямые параллельны.***

Эта теорема разбита у Евклида на два предложения: двадцать седьмое и двадцать восьмое, которые в совокупности составляют так называемую прямую теорию параллельных линий; она устанавливает 12 равенств, каждое из которых достаточно для того, чтобы две прямые, расположенные в одной плоскости, были параллельны; она доказывается на основе предыдущих предложений, главным образом на основе теоремы о внешнем угле треугольника (шестнадцатое). В таком виде эти предложения излагаются во всех элементарных учебниках геометрии. Возникает обратный вопрос: если известно, что две прямые параллельны, то можно ли утверждать, что имеют место равенства ***(1) – (4)***? Можно ли утверждать, что каждое из этих равенств выражает не только достаточное, но и необходимое условие параллельности двух прямых? Справедлива ли теорема, обратная предыдущей?

Мы привыкли к тому, что за доказательством каждой теоремы следует доказательство обратной теоремы, если только она справедлива. Так как и в этом случае, справедливость обратной теоремы не вызывала сомнений, то было естественно искать ее доказательство. История науки знает ряд вопросов, проблем, разрешение которых долгое время представляло камень преткновений для математической мысли. Простейшие из этих проблем возникли еще к глубокой древности. К числу таких недоступных задач принадлежало также требование доказать обратную теорему в учении о параллельных линиях, т. е. выполнить это доказательство теми же средствами, которыми доказаны предыдущие 27 предложений а «Началах» Евклида. Не подлежит сомнению, что такое доказательство усердно искали уже до Евклида, и это не удавалось. Подобно Александру Македонскому, Евклид решил разрубить гордиев узел: он принял обратное предложение за постулат, подлежащий в качестве такового приобщению к первым четырем постулатам. Согласно этой установке, каждый, приступающий к изучению геометрии должен был признать, что при пересечении двух параллельных линий третьей необходимо должны иметь место равенства (1) – (4); т. е. собственно принять нужно было только, что при пересечении двух параллельных линий третьей имеет место хотя бы только одно из равенств (1) – (4), так как каждое из них влечет за собою остальные. Евклид принимает, что при пересечении двух параллельных линий третьей имеет место какое-либо одно из равенств (4). Таким образом, Евклид принимает в качестве постулата, что при пересечении двух параллельных прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 2d, или – что, очевидно, то же – если при пересечении двух прямых, лежащих в одной плоскости, третьей сумма внутренних односторонних углов не равна двум прямым, то эти прямые не параллельны, они неизбежно пересекаются. Таков дополнительный постулат, который Евклид вводит, которым он пользуется, начиная с 29 предложения первой книги. Чтобы в этом узловом пункте быть вполне точным, нужно остановиться еще на одной детали. Из теоремы о внешнем угле непосредственно вытекает, что сумма двух углов треугольника никогда не может превысить ***2d***. Это и составляет содержание следующего семнадцатого предложения. В самом деле, если ***A*** и ***B*** внутренние углы треугольника ***ABC*** (рис. 2) при основании ***AB***, $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{B_1}$ – соответствующие смежные углы, то сумма четырех углов $\boldsymbol{A + A_1 + B + B_1 = 4d}$. Но так как $\boldsymbol{A < B_1}$, $\boldsymbol{B < A_1}$ , то на сумму $\boldsymbol{A + B}$ приходится меньше половины суммы всех четырех углов, т. е. A + B < 2d. Это можно выразить так: если две прямые AC и BC пересекаются в точке C, то пересечению всегда имеет место с той стороны секущей AB, с которой сумма внутренних односторонних углов меньше 2d.

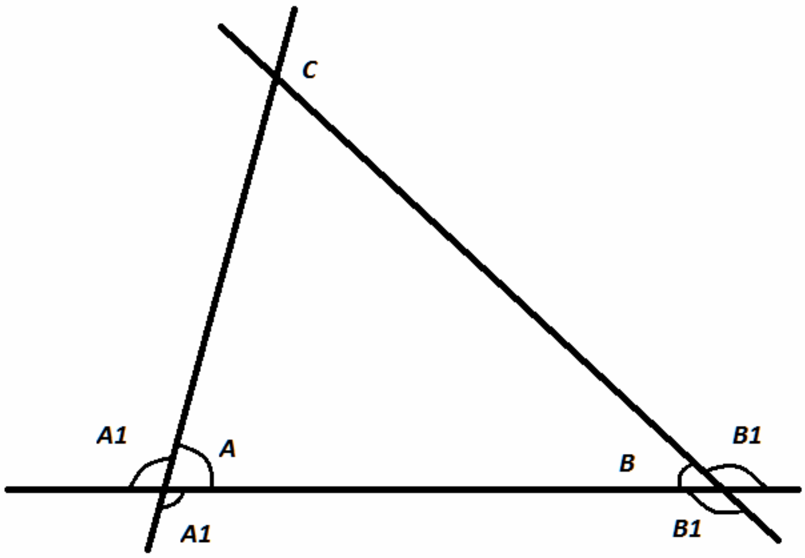



Рис. 2

Теперь мы можем привести постулат о параллельности точно в той форме, в которой мы его находим в «Началах» Евклида.

Постулат V. ***Если при пересечении двух прямых лежащих на одной плоскости третьей сумма внутренних односторонних углов меньше 2d, то эти прямые при достаточном продолжении пересекаются и притом с той стороны, с которой эта сумма меньше 2d.***

Так возник знаменитый постулат, послуживший отправной точкой разветвления геометрии.

Геометрия, таким образом, с этого места разветвляется, распадется на две части: первую часть образуют те предложения, которые от постулата не зависят: их совокупность в настоящее время называют ***абсолютной геометрией***; вторую составляют предложения, которые, как уже было ясно Евклиду, без этого постулата доказаны быть не могут; эти последние образуют так называемую ***собственно евклидову геометрию***.

Вследствие своеобразного характера V постулата на нем было особенно сосредоточенно внимание комментаторов. Его часто заменяли другим эквивалентным ему постулатом, который казался более простым. Так, английскому математику Плейферу приписывают следующую формулировку постулата.

Постулат Плейфера. ***Через точку С, лежащую вне прямой АВ, в плоскости АВС проходит только одна прямая, не встречающая АВ.***

Нужно сказать, что эта формулировка встречалась у различных авторов до Плейфера. Очень распространена также еще следующая формулировка, связываемая с именем Лежандра.

Постулат Лежандра. Перпендикуляр и наклонная к общей секущей, расположенные в одной плоскости, необходимо встречаются (конечно, с той стороны секущей, с которой наклонная образует с секущей острый угол (рис. 3).

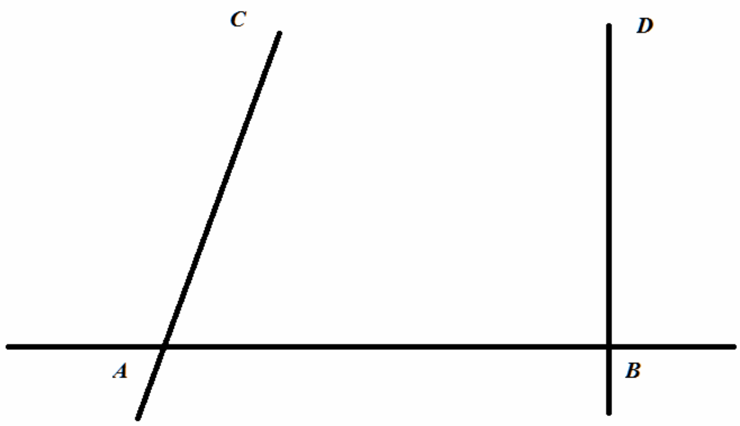



Рис. 3

Но, если наиболее осторожные комментаторы Евклида ограничивались тем, что заменяли постулат другим, ему эквивалентным, то другие шли дальше. Стремились логически вывести содержащееся в этом постулате утверждение из остальных аксиом и постулатов Евклида. Трудно себе представить, сколько усилий было на это затрачено. Люди ставили себе это задачей жизни, тратили на это многие годы, доходили до мистического агностицизма, а иногда даже до потери рассудка. Вот что писал венгерский профессор В. Больаи, друг Гаусса, своему сыну Иоанну, узнав, что он ищет доказательство постулата о параллельных линиях: *«Молю тебя, не делай только и ты попыток одолеть теорию параллельных линий: ты затратишь на это все свое время, а предложения этого вы не докажете все вместе. Не пытайся одолеть теорию параллельных линий ни тем способом, который ты сообщаешь мне, ни каким-*

*либо другим. Я изучил все пути до конца: я не встретил ни одной идеи, которой бы я не разрабатывал. Я прошел весь беспросветный мрак этой ночи, и всякий светоч, всякую радость жизни я в ней похоронил. Этот беспросветный мрак. Никогда не прояснится на земле, и никогда несчастный род человеческий не будет владеть чем-либо совершенным даже в геометрии. Это большая и вечная рана в моей душе…».*

Не в столь экспансивном, но, по существу, в то же стиле писал в 1817г. Гаусс: *«Я прихожу все более к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере, человеческим умом и для человеческого ума. Может быть, в другой жизни мы придем к другим взглядам на природу пространства, которые нам теперь недоступны…»*

Правда, среди лиц, которые занимались доказательством V постулата, часто бывали люди, не только лишенные математического образования, но даже не владевшие элементарными сведениями из геометрии. Но в то же время почти не было выдающегося математика, который не уделил бы внимания и сил этой проблеме: Ампер, Лейбниц, Декарт, Лагранж, Лежандр, Фурье, Гаусс, Якоби – все пытались доказать постулат, старались пролить свет на «темное пятно в теории параллельных линий». Многим казалось, что они достигли цели; этой иллюзии не избежал даже такой крупные геометр, как Лежандр. Но тщательный и объективный анализ неизменно обнаруживал несостоятельность рассуждения. Этой участи не избежали и доказательства, отличавшиеся несомненным остроумием.

## ПРИМЕРЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

## ПОСТУЛАТА О ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

Первый пример

В 1663 г. в Оксфордском университете профессор Дж. Валлис прочел лекцию, содержавшую доказательство постулата о параллельных (формулировка очень похожа на вариант Лежандра).

Нужно доказать, что перпендикуляр AB и наклонная CD к секущей AC непременно пересекаются со стороны острого угла ACD (рис.1). Опустим из точки F луча CD на прямую CA перпендикуляр, который упадёт в точку G со стороны острого угла. Построим треугольник C\`A\`E\`, подобный треугольнику CGF при отношении сходственных сторон, равном $\frac{CA}{GC}$, тогда сторона C\`A\` будет равна CA и $\angle A`C`E` = \angle ACD$. Если приложим треугольник C\`A\`E\` к прямой AC с надлежащей стороны так, чтобы сторона его C\`A\` совпала с отрезком AC, то прямые A\`E\` и C\`E\` пойдут соответственно по AB и CD, и точка E\` упадет в точку E, в которой перпендикуляр AB пересечется с наклонной CF (рис.1и 2).

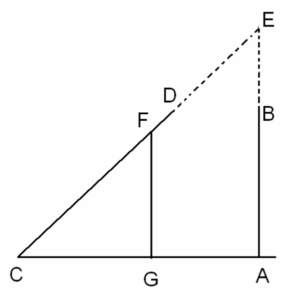



Рис 1

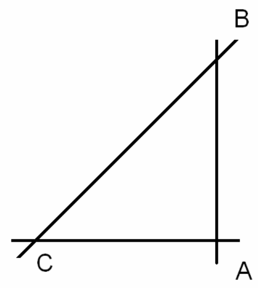



Рис 2

Рассуждение кажется безукоризненным, но оно предполагает, что каждому треугольнику соответствует подобный ему треугольник при любом отношении подобия. Но такое допущение даже шире постулата Евклида, т.к. из существования подобных треугольников следует постулат Евклида и вся его геометрия.

Второй пример

Обратимся к рассуждениям Лежандра. В 1794 г. он написал известный учебник геометрии новые «Начала». Здесь Лежандр, не пользуясь постулатом о параллельности, доказывает следующие три предложения:

1. Сумма углов треугольника не может превышать двух прямых.
2. Если сумма углов равна $2d$ в каком- либо одном треугольнике, то она равна $2d$ во всяком другом треугольнике.
3. Если сумма внутренних углов треугольника равна $2d$, то имеет место постулат о параллельных.

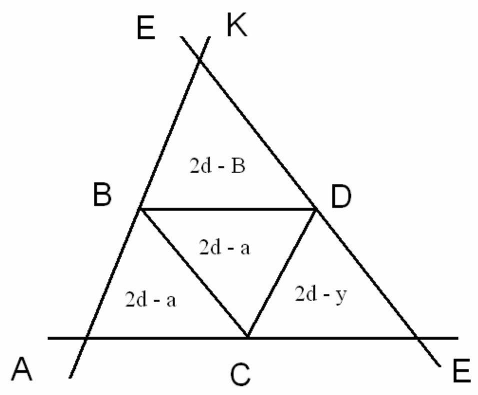
Из теорем Лежандра следует, что для доказательства постулата о параллельности достаточно установить средствами абсолютной геометрии, что сумма углов треугольника равна $2d$.

Рассмотрим это доказательство.

Продолжим стороны AB и AC треугольника ABC и приложим его к стороне BC, повернув его так, чтобы вершина B упала в точку C, а вершина C – в точку B. Треугольник займет положение DCB. При этом $\angle DBC = \angle ACB, \angle DCB = \angle ABC$. А т.к. $\angle KBC$, как внешний угол треугольника ABC, больше $\angle ACB$, то и $\angle CBD$ меньше $\angle CBK$; сторона BD передвинутого треугольника расположится внутри $\angle CBK$. Так же сторона CD расположится внутри $\angle BCE$; треугольник займет положение DCB (рис.3). Проведём через точку D прямую EF так, чтобы она пересекала стороны угла EAK в точках E и F. Получим треугольник AEF, который расположен внутри угла KAE и распадается на четыре треугольника, из которых два равных: ABC и BDC.

Пусть сумма углов треугольника ABC ( и BDC) меньше $2d$, т.е. равна $2d-\alpha$, $\alpha$ - положительное значение. В каждом из треугольников BFD и CED, согласно теореме 2, сумма углов также меньше $2d$, например, $2d-\beta$ в треугольнике BFD и $2d-\gamma$ в треугольнике CED. Сумма внутренних углов всех треугольников составляет $8d-\beta-\gamma-2\alpha$. Если от этой суммы отбросить углы при точках B, C, D, т.е. $6d$, то получим сумму внутренних углов треугольника AEF, она равна $2d-\beta-\gamma-2\alpha < 2d-2\alpha$.

Полученный результат: если существует треугольник, в котором сумма углов равна $2d-\alpha$, то существует также треугольник, в котором сумма углов меньше $2d - 2\alpha$. Но, повторив то же построение, мы придем к треугольнику, в котором сумма углов меньше $2d - 4\alpha$, $2d - 8\alpha$ и т.д. Мы неизбежно придём к треугольнику сумма углов которого имеет отрицательное значение, что лишено смысла. Значит, сделанное предположение неверно, т.е. сумма углов треугольника равна $2d$.




Этому доказательству нельзя отказать в остроумии, но оно обладает существенным недостатком: оно предполагает, что через точку D, лежащую внутри угла КАЕ, всегда можно провести прямую EF, пересекающую обе стороны угла, а это допущение эквивалентное постулату Евклида.

Последние мемуары Лежандра (1833) завершили эпоху в истории поисков доказательств постулата о параллельных. К этому моменту вопрос уже был разрешён Н. И. Лобачевским.

Лобачевский считает аксиому параллельности Евклида произвольным ограничением. С его точки зрения, это требование слишком жёсткое, ограничивающее возможности теории, описывающей свойства пространства. В качестве альтернативы предлагает другую аксиому: на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, проходит более чем одна прямая, не пересекающая данную. Лобачевский писал во введении к геометрическим исследованиям по теории параллельных линий: «В геометрии я нашел некоторые несовершенства, которые я считаю причиной того, что эта наука, поскольку она не переходит в анализ, до настоящего времени не вышла ни на один шаг за пределы того состояния, в каком она к нам перешла от Евклида. К этим несовершенствам я отношу неясность в первых понятиях о геометрических величинах, способы, которыми мы себе представляем измерение этих величин, и, наконец, важный пробел в теории параллельных линий, к восполнению которого все усилия математиков до настоящего времени были тщетными».

В конце концов, мемуары Лежандра завершил эпоху в истории поисков доказательств постулата о параллельных линиях. Но в то время, когда он опубликовал свой мемуар, вопрос был решен. Лобачевский за четыре года до того опубликовал свой собственный мемуар, в котором весь вопрос получил исчерпывающее решение.

## Заключение

В течение всей моей исследовательской работы я ответила на все поставленные мною раньше вопросы, прочитала литературу, познакомилась с некоторыми доказательствами пятого постулата, поняла, что все попытки были безуспешны, т. к. в процессе доказательства применялись элементы теории параллельности Евклида. Узнала, почему геометрия разделилась на евклидову и абсолютную геометрию. И то, что пятый постулат сыграл большую роль и стал отправной точкой для разделения геометрии.

Список литературы


1. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики: Пер. с франц.—М.: Мир, 1986.

2. Силин А.В., Шмакова Н.А. Открываем неевклидову геометрию. Кн. Для внеклас. чтения учащихся 9-10 кл. сред. шк.—М.: Просвещение, 1988.

3. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А.П. Савин. М.: Педагогика. 1998.

4. Каган В.Ф. Лобачевский. Изд. АН СССР, М.—Л.,1948.