Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся 7-11 классов «Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

«Методические аспекты изучения математики»

Путешествие в мир графов

Трапезников Семен Станиславович,

7 класс МБОУ лицей №1

Пермский край, Кунгурский район,

Руководитель:

Изергина Галина Семеновна

МБОУ лицей №1, учитель математики высшей категории

Пермь 2012

1. **Введение**

Всем известно, что слово “граф” означает дворянский титул, например граф Лев Николаевич Толстой. А вот в математике *графом* называется набор точек, некоторые из которых соединены линиями.

Впервые с понятием “граф” я встретился при решении задач по программированию. Хотя уже в третьем классе, решая олимпиадные задачи, я составлял к ним рисунки, которые помогали мне получать правильный ответ. Пролистывая энциклопедию по математике, я, в очередной раз, встретился с этим понятием. В конце концов, я решил подробно изучить всё, что связано с графами.

Теория графов - один из разделов топологии имеет богатейшую историю. Основы теории графов, как математической науки заложил в 1736 г. Леонард Эйлер. Задачи о Кенигсбергских мостах, четырёх красках решали ещё в XXIII веке. Именно решение этой задачи, которую Эйлер успешно решил, подвигла его к созданию теории графов.

Графы имеют большое применение на практике. С помощью графов можно изображать схемы дорог, схемы коммуникаций, схемы электрических цепей. Рассвет этой науки начался с развитием вычислительной техники, информатики, программирования, чем я увлекаюсь в последнее время.

Я поставил перед собой следующие задачи:

- Познакомиться с историей теории графов
- Изучить основные понятия теории графов и виды графов
- Рассмотреть способы решения задач с помощью графов
- Составить программы для решения двух задач

2. Путешествие в мир графов

2.1. Что такое граф? Основные понятия и определения

Что же такое граф? Впервые термин “Граф” в 1936 г. ввёл венгерский математик Денеш Кениг, назвав графами схемы, состоящие из множества точек и связывающих эти точки отрезков прямых и кривых.

До конца XIX в. графы применялись лишь при решении некоторых занимательных задач и не привлекали серьёзного внимания. Однако с начала XX в. теория графов оформилась в виде самостоятельной математической дисциплины, находящей в настоящее время широкое применение в автоматике, телемеханике, кибернетике, электронике, физике и других областях науки.

Остановимся на некоторых вопросах этой теории. Пусть выпускники школы Андрей, Борис, Владимир, Георгий и Дмитрий решили обменяться фотографиями. Пусть каждому из друзей соответствует определённая точка на плоскости, названная первой буквой его имени, а проведённый обмен изображается отрезком и дугой.

Точки А, Б, В, Г, Д. называется вершинами графа, а отрезки (прямолинейные или криволинейные), соединяющие эти точки, рёбрами графа.

Ситуация, соответствующая моменту, когда обмен фотографиями ещё не произошел, представляет точечную схему, изображённую на рисунке. Эта схема называется нулевым графом, т.е. нулевой граф состоит из изолированных вершин.

2.2. Виды графов

2.2.1. Связанные графы

Рассмотрим рисунок. Здесь изображена схема дорог какого-либо населённого пункта. Требуется найти дорогу, соединяющую перекрёстки S и E. Легко заметить, что имеется много дорог, идущих от S к E. Для нахождения одной из них поступаем следующим образом. Двигаемся от S по направлению к E до перекрёстка, а затем к другому перекрёстку и т. д.

В конце нашего движения мы достигаем перекрёстка E. Поскольку в условии задачи никаких ограничений не дано, то, двигаясь от перекрёстка S к перекрёстку E, мы можем побывать на любом перекрёстке или улице больше одного раза.

Если бы потребовалось найти кратчайшую дорогу, то мы определили бы все дороги от A до E и их сравнением нашли кратчайшую.

Если при следовании от S до E на каком-либо перекрёстке побываем больше одного раза, например, если пройдём по пути SBCDJAIHKAJDE и на перекрёстке D побываем два раза, то вычитая из этого пути путь DJAIHKAJD, получим путь SBCDE, который короче пройденного.

Отметим, что на перекрёстках SBCDE мы были только один раз.

Такой путь в теории графов называется дугой (линия на графе, не проходящая ни через одну из вершин более одного раза). Согласно сказанному дугами будут: SBCDE, SKHGE и т. д.

Линия на графе, не проходящая ни по какому ребру более одного раза, называется цепью. Например, SKHAIHGE является цепью, которая соединяет вершины S и E.Если, начав движение от вершины S, пройдём по нескольким вершинам графа так, что на каждом ребре побываем только один раз, а затем вернёмся в ту же вершину S, то такой путь называется циклом.

Маршрутом называется последовательность таких рёбер графа, что каждые два ребра имеют общую вершину. Маршрут называется цепью, а циклический маршрут циклом, если каждое ребро встречается в нём один раз; вершины в цепи могут повторяться более одного раза. Нециклическая цепь называется простой цепью, если в ней никакая вершина не повторяется. Замкнутый маршрут называется простым циклом, если все его n вершин различны и $n>3$.

Если все вершины цикла разные, то такой цикл называется элементарным, а в противном случае – неэлементарным. Может случиться, что цикл охватит все рёбра графа в точности по одному разу. Такой цикл называется эйлеровой линией.

Граф называется связанным, если любые две из его вершин, связаны какой-то цепью (т. е. это граф который не имеет ни одной изолированной вершины).

Например, граф, изображённый на первом рисунке, связанный, а на втором рисунке несвязанный.

Две вершины называют связанными, если между ними существует циклический маршрут.

2.2.2. Ориентированные графы

Граф, на котором указаны направления всех его рёбер, называют ориентированным графом. Ориентированные графы имеют широкое применение на практике, например, при решении задач, связанных с уличным движением, могут встретиться улицы, как с односторонним, так и с двухсторонним движением.

При составлении карты уличного движения какого-либо города, в котором только одностороннее движение, обязательно должно быть указано направление движения, при этом ориентация улиц должна производиться так, чтобы без правил уличного движения можно было проехать из одного конца любого участка города в любой другой. Если мы попытаемся это требование выразить языком теории графов, то его можно сформулировать так: граф нужно ориентировать так, чтобы любые две его вершины были соединены ориентированной цепью. Ясно, что такой граф должен быть связным, однако этого ещё недостаточно для существования возможности нормального движения.

Пусть ребро, связывающее вершины А и Б, является единственным путём между ними. Чтобы из любой вершины фигуры Ф1 пройти ориентированным путём к любой вершине фигуры Ф2, ребро АБ должно быть ориентировано от А к Б. Если мы попытаемся пройти из какой-либо вершины фигуры Ф2 к нужной вершине фигуры Ф1, то увидим, что это невозможно. Чтобы был возможен взаимный переход от вершины фигуры Ф1 к вершине фигуры Ф2 и наоборот, необходимо, чтобы ребро АБ было ориентировано в двух направлениях. В ориентированном графе путь, соединяющий две вершины, может быть не единственным. Например, на рисунке ребро, соединяющее вершины А и Б - единственное, а путь, соединяющий вершины В и Г, не единственный. В теории графов пути вида АБ называются связывающими, а пути вида ВГ – циклическими. Ребро, удаление которого приводит к увеличению числа связных компонентов графа, называется связывающим ребром или перешейком, например ребро АБ. Ребро, не являющееся связывающим, называется циклическим ребром, например ребро ВГ.

2.2.3. Теорема Эйлера

В ходе решения задачи о семи Кенигсбергских мостах Л. Эйлер установил следующие свойства графа.

1. Число нечётных вершин графа всегда чётно. Невозможно начертить граф, который имел бы нечётное число нечётных вершин.

2. Если все вершины графа чётные, то можно одним росчерком (т. е. без отрыва карандаша от бумаги, проводя по каждой дуге только один раз) начертить граф, при этом движение можно начать с любой вершины и закончить его в той же вершине.

3. Граф только с двумя нечётными вершинами можно начертить одним росчерком, при этом движение нужно начать с одной из этих нечётных вершин и закончить в другой.

4. Граф с более чем двумя нечётными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

Поскольку число нечётных вершин графа, соответствующего задаче о семи мостах, оказалось равным четырём, то такой граф нельзя изобразить одним росчерком, а, следовательно, невозможно пройти по всем семи мостам, побывав на каждом из них по одному разу, и вернуться в начало пути.

2.2.4. Плоский граф

Обратимся к задаче из главы 2.1.

Этот граф мы можем изобразить так, чтобы линии, соединяющие точки А, Б, В, Г, Д, пересекались только в вершинах.

Граф, который можно начертить на плоскости так, чтобы рёбра его пересекались только в его вершинах, называется плоским графом.

2.2.5. Правильный граф

Назовём граф правильным, если для каждой его вершины А число стрелок, выходящих из А, равно числу стрелок, входящих в А; будем обозначать это число P_A. На рисунке изображён правильный связный ориентированный граф. В нём для некоторых вершин $P_A = 2$, для других $P_A = 1$.

2

.3. Применение графов

2

.3.1. Решение простейших задач

5

человек обменялись рукопожатиями. Сколько всего было рукопожатий?

Р

ешение: Начертим граф, где каждый человек – вершина, каждое рукопожатие ребро. В итоге получится полный связный граф. Подсчитаем количество рёбер в графе. Оно равно 10. По графу можно определить, что первый человек обменялся рукопожатиями с четырьмя другими, второй тоже с четырьмя, но с первым он уже обменялся, поэтому он обменялся рукопожатиями с тремя оставшимися. Третий обменялся двумя рукопожатиями, второй одним. Следовательно, всего было 10 рукопожатий (4+3+2+1), что равно количеству рёбер.

2

.3.2. Графы игр

Н

а рисунке изображена шахматная мини-доска размером 3x3 клетки, а на ней четыре коня – два белых и два чёрных (I рисунок).

З

адача – переставить фигуры так, чтобы одинаковые кони оказались в противоположных углах доски (II рисунок). Перемешать их можно только ходом шахматного коня и нельзя ставить фигуру на уже занятое поле.

В

се попытки совершить такую перестановку терпят неудачу. Почему?

Давайте начертим граф возможных ходов коней по доске (III рисунок). Затем построим изоморфный ему граф без самопересечений в двух вариантах: на одном отметим первоначальное положение коней (IV рисунок), а на другом – требуемое (V рисунок). Вот теперь понятно, почему задача не решается. Движение коней по графу означает переход в соседние вершины, и перейти из первой позиции во вторую невозможно без “перескока” через коня другого цвета.

Этот же граф помогает решить ещё одну задачу. В ней требуется из положения, показанного в I рисунке, за меньшее количество ходов перевести коней в положение, изображённое на VI рисунке, т.е. поменять местами чёрных и белых коней. Вновь обратимся к IV рисунку. Ясно, что фигуры должны двигаться по этому графу в одном направлении, и каждому коню придётся сделать ровно 4 хода, т. е. всего понадобится 16 ходов.

2.3.3. Задача о Кенигсбергских мостах

К XVIII в. через реку Прегель, протекавшую по городу Кенигсберг (Сегодня Калининград), было построено 7 мостов, которые связывали её берега с двумя островами, расположенными в черте города.

Рассказывают, что однажды один из жителей города спросил у своего соседа, сможет ли он пройти по всем мостам так, чтобы на каждом из них побывать лишь один раз и вернуться к тому месту, откуда начал прогулку. Этой задачей заинтересовались многие, но решить её никто из жителей города так и не смог. Однажды этой задачей заинтересовался Л. Эйлер.

Решая эту задачу, Эйлер поступил следующим образом. Он изобразил точками A и C берега реки, D, B острова, а линиями – мосты, соединяющие соответствующие участки берегов и островов. В результате получился граф.

Эйлер подсчитал число рёбер, исходящих из каждой вершины графа. Из вершин A, B, C выходит по 3 ребра, а из вершины D - 5 рёбер.

В ходе решения задачи о Кенигсбергских мостах Эйлер установил четыре свойства графа указанные в главе 2.2.3. Поскольку число нечётных вершин графа равно чётырём, то такой граф нельзя начертить одним росчерком пера.

2.3.4. Задача о четырёх красках

Удивительный факт: любую политическую карту можно раскрасить всего четырьмя красками, причём так, что соседние страны на ней будут окрашены не в один цвет. Математически эта задача формулируется так: действительно ли четырёх красок достаточно для раскраски произвольно взятой политической карты с протяжёнными границами, чтобы две соседние были окрашены в различные цвета?

“Задача о четырёх красках” ведёт свою историю с 1852 г. Однажды английский студент Френсис Гутри раскрашивал карту Великобритании. Каждое графство он выделял цветом. К сожалению, выбор красок был невелик, и приходилось их использовать повторно. Гутри старался, чтобы два графства, имеющие общий участок границы, были окрашены в разные цвета. Это занятие заставило его задуматься о том, какого наименьшего числа красок достаточно для раскрашивания любой карты. Гутри считал, что четырёх красок всегда хватит, но доказать это не мог.

Разочарованный неудачей, но заинтригованный Гутри упомянул об этой задаче в беседе со своим братом Фредериком, студентом Университетского колледжа в Лондоне. Тот, в свою очередь, рассказал о ней своему профессору, знаменитому Августу де Моргану, который в письме от 23 октября сообщил великому ирландскому математику и физику Уильяму Роэну Гамильтону: *“Мой студент попросил меня сегодня объяснить одну задачу, которая была мне ранее неизвестна и пока не понятна до конца. Он утверждает, что если любую фигуру разделить любым способом на части и раскрасить их различными красками так, чтобы фигуры, имеющие общий отрезок граничной линии, были окрашены в различные цвета, то всего потребуется четыре краски, но не больше. Мне известен случай, когда требуется четыре краски. Вопрос: нельзя ли придумать случай, когда необходимы пять или более красок? Если вы придумаете очень простой пример, который покажет, насколько я глуп, то, думается, мне надо будет поступить, как Сфинксу”.*

Гамильтону не удалось придумать карту, для раскраски которой потребовалось бы пять цветов, но он не сумел и доказать, что такой карты не существует. Весть о проблеме четырёх красок быстро разлетелась по Европе, но, несмотря на все усилия, проблема упорно не поддавалась решению, хотя и казалась простой.

Проблема некоторое время активно обсуждалась среди Лондонских студентов, а потом о ней забыли. В 1879 г. известный математик Артур Кэли опубликовал эту задачу в первом томе “Трудов Королевского географического общества”, и она получила широкую известность.

Со временем интерес к “Проблеме четырёх красок” рос, но она не поддавалась усилиям даже выдающихся математиков. В 1890 г. английский математик

Перси Хивуд доказал, что пяти красок хватит для раскрашивания любой карты. В 1968 г. было доказано, что карту, на которой обозначено меньше 40 стран, всегда можно раскрасить с помощью четырёх красок.

Наконец, американские математики Кеннет Аппель и Вольфгант Хакен решили эту задачу с помощью компьютера. Они разбили все карты на 2000 типов. Компьютер по составленной ими программе исследовал, может ли в рассматриваемом типе карт найтись такая, для которой недостаточно четырёх красок. С тремя типами карт компьютер не справился, и над ними пришлось потрудиться самим математикам. Получив ответ “Нет” для всех 2000 типов, исследователи объявили, что проблема четырёх красок решена.

В июне 1976, затратив 1200 часов машинного времени, Хакен и Аппель заявили во всеуслышание, что им удалось проанализировать все 1482 карты и для раскрашивания ни одной из них не требуется больше четырёх красок. Проблема четырёх красок, наконец, была решена.

Таким образом, любой плоский граф допускает правильную четырёх-раскраску. Решение этой проблемы заняло более 100 лет!

2.4. Применение графов в программировании

Блок-схема, которая даёт возможность представить алгоритм в обозримом виде, изображается в виде графа специального вида. Вершины графа соответствуют определённым частям алгоритмов (командам вычислительной машины), а дуги показывают возможные переходы между этими вершинами в процессе выполнения алгоритма.

Безусловные шаги принято изображать прямоугольниками, условные –

ромбами. Из ромба всегда выходят две стрелки: одна имеет пометку “да” (условие выполнено), другая – пометку ”нет” (условие не выполнено). Граф, изображённый на рисунке, соответствует процессу отыскания максимального числа в последовательности. Процесс выполнения алгоритма представляется в графе как путь из начальной вершины в конечную.

Понятие графа, благодаря его наглядности и высокой общности, служит в информатике основным средством для описания структуры сложных объектов и функционирования систем. При описании структур вершинами являются компоненты объекта, а рёбрами – связи между ними (примеры – вычислительные сети, логические схемы). При описании функционирования вершинам соответствуют состояния системы, а рёбрам переходы между состояниями (примеры – граф переходов автомата; граф игры, в котором вершины изображают позиции, а дуги – ходы, переводящие одну позицию в другую). Иногда описание в виде графа содержит оба этих аспекта.

Например, вершины сетевого графика или блок-схемы алгоритма представляют его компоненты (работы, операторы), а прохождение по путям изображает передачу активности от одного компонента к другому, т. е. процесс функционирования.

Специальный тип графа, широко используемый в искусственном интеллекте, исследование операций и системном анализе, получило название И/ИЛИ граф.

Граф такого типа описывает развитие некоторого процессора от начальной вершины графа к множеству конечных вершин. Все остальные (не начальная и не конечная) вершины делятся на два типа: вершины И и вершины ИЛИ – при появлении хотя бы одного сигнала активации из её входов.

Активизированная вершина передаёт сигнал активации на все сопряжённые с ней вершины. Внешние сигналы активации порождаются внешними источниками, которые, в частности, могут быть выходными вершинами других И/ИЛИ графов.

В информатике при описании параллельных процессов, связанных с разработкой информации, возникает проблема не только описания каждого процесса, но и умения формулировать связи взаимодействия между различными процессами.

Известно немало различных, формальных моделей, созданных для описания поведения взаимодействующих параллельно протекающих процессов. Наиболее популярная модель такого типа – сеть Петри. Сеть Петри – это ориентированный граф, содержащий вершины двух видов – позиции и переходы. Позиции принято изображать кружками, переходы чёрточками или планками. Из позиции дуги ведут только в переходы; из переходов – только в позиции. В позициях могут размещаться фишки или маркеры, которые изображаются точками.

Размещение фишек в позициях называется маркировкой сети. Маркировка сети с X позициями представляется последовательностью X чисел, в которой на 1-м месте стоит число фишек в i-й позиции. Пример сети Петри приведён на рисунке.

Сети Петри предназначены для описания функционирования процессов во времени. При этом позиции рассматриваются как действия, или работы, а переходы – как события, в результате которых завершаются одни работы и начинаются другие. Функционирование сети Петри выражается в том, что в ней срабатывают переходы и изменяются маркировки.

2.4.1. Решение задач на языке программирования Pascal с использованием графов

Задача №1

В классе N учеников. Некоторые из учеников дружат. Всего в классе M компаний. Если два ученика - друзья, то они в одной компании. Классной руководительнице стало интересно, сколько в классе компаний. Она узнала, что ребята дружат попарно и составила граф, где вершины – ученики, а каждое ребро - их дружественная связь. А ваша задача помочь ей определить количество компаний в классе.

Дано: N-количество учеников и граф N на N.

Нужно вывести M – количество компаний.

Решение:

Для того чтобы найти количество компаний в классе, нужно совершить обход графа в глубину. Обойдя одну из частей, мы увеличиваем количество компаний и начинаем обходить другую и т.д., до тех пор, пока не обойдём весь граф.

```
var
n, i, k:longint;
```

```
a:array [1..25, 1..25] of longint;

use:array [1..25] of boolean;

p
rocedure dfs (v:longint);
v
ar i:longint;

begin

use [v]:=true;

for i:=1 to n do

begin

if a [v, i] = 1 then

begin

if use [i] = false then

begin

dfs (i);

end;
```

```
end;

end;

end;

p

rocedure inp;

v

ar j, j1:longint;

begin

read (n);

for j:=1 to n do

begin

for j1:=1 to n do

begin

read (a [j, j1]);

end;

end;

end;
```

```
procedure run;
begin
for i:=1 to n do
begin
if use [i]=false then
begin
dfs (i);
inc (k);
end;
end;
end;
procedure outp;
begin
write (k);
end;
```

b

egin

inp;

run;

outp;

end.

З

адача №2

П

осле того, когда стало ясно количество компаний в классе, выяснилось, что в классе есть два типа учеников – отличники и хорошисты. Также классная руководительница узнала, что отличники не дружат с отличниками, а хорошисты с хорошистами. Ваша задача по данному графу определить, не ошиблась ли она, если не ошиблась, вывести один из вариантов успеваемости учеников.

Дано: N-количество учеников и граф N на N.

Нужно вывести N чисел – успеваемость каждого из учеников, где 0-хорошист, а 1-отличник. Если классная руководительница ошиблась в расчётах вывести Impossible.

Решение:

В этой задаче мы снова будем использовать обход в глубину. Попав на вершину, мы будем сразу давать ей номер 0 или 1. Дальше мы проверим, есть ли рядом вершины с таким же номером. Если нет, будем двигаться к следующей вершине. В итоге у нас получится массив с успеваемостью каждого из учеников.

```
v
ar
n, i, k:longint;
a:array [1..25, 1..25] of longint;
use:array [1..25] of boolean;
col:array [1..25] of longint;
p
rocedure dfs (v, c:longint);
v
ar i:longint;
begin
col [v]:=c;
use [v]:=true;
for i:=1 to n do
begin
if a [v, i] = 1 then
begin
if use [i] = false then
```

```
begin
dfs (i, (c+1) mod 2);
end
else
begin
if col [i]=c then
begin
write ('Impossible');
halt;
end;
end;
end;
end;
end;
                                                                     p
rocedure inp;
```

v

ar j, j1:longint;

begin

read (n);

for j:=1 to n do

begin

for j1:=1 to n do

begin

read (a [j, j1]);

end;

end;

end;

p

rocedure run;

begin

for i:=1 to n do

begin

```
if use [i]=false then
begin
dfs (i, 1);
end;
end;
end;
p
rocedure outp;
begin
for i:=1 to n do
begin
write (col [i], ' ');
end;
end;
b
egin
inp;
```

run;

outp;

e

nd.

3. Заключение

Работая над данным рефератом, я основательно изучил основные понятия теории графов. Графы бывают плоские, полные, связные, ориентированные, правильные, в этом я разобрался, работая над рефератом.

Задачи, поставленные перед собой, я выполнил:

- Познакомился историей теории графов
- Изучил основные понятия теории графов и виды графов
- Рассмотрел наиболее интересные задачи и их решения с помощью графов
- Составил программы для решения двух задач

Мой реферат может быть полезен любому кто захочет ознакомиться с основами теории графов. Материал изложен доступно, поэтому будет понятен многим. Также мой реферат можно использовать при проведении занятий математического кружка, подготовки к олимпиадам, как по математике, так и по программированию.

4. Список литературы

1. “В помощь учителю математики”, Йошкар-Ола, 1972 (ст. “Изучение элементов теории графов”);

2. Гарднер М. “Математические головоломки и развлечения”, М. “Мир”, 1971;

3. Оре О. “Графы и их применения”, М. “Мир”, 1965;

4. Ю. Нестеренко, С. Олехник, М. Потапов “Лучшие задачи на смекалку”, Москва НТЦ “Университетский” “АСТ-ПРЕСС”, 1999 г.;

5. “Занимательная математика 5-11 кл.” (Как сделать уроки математики нескучными) автор-составитель Т. Д. Гаврилова, Волгоград, Учитель 2005;

6. А.В. Самохин, Проблема четырёх красок: неоконченная история доказательства, Московский государственный технический университет гражданской авиации, 2007 г.;

7. Энциклопедический словарь юного математика, составитель А.П. Савин, Москва, Педагогика, 1989 г.;

8. О.И. Мельнков “Незнайка в стране графов”, Москва, 2006 г.;

9. http://100top.ru/encyclopedia/

10. http://www.euler-foundation.org/

11. http://euler.math.ru/

12. http://www.college.ru/mathematics/

5. Приложения

5.1. Подборка олимпиадных задач, решаемых с помощью графов

Задача №1

Марина, Лариса, Жанна и Катя умеют играть на разных инструментах (пианино, виолончели, гитаре, скрипке), но каждая умеет только на одном. Также они знают иностранные языки (английский, французский, немецкий и испанский), но каждая только один.

Известно:

Девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански.

Лариса не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка.

Марина не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает ни немецкого, ни английского.

Девушка, которая говорит по-немецки, не играет на виолончели.

Жанна знает французский язык, но не играет на скрипке.

Кто на каком инструменте играет и какой иностранный язык знает?

Решение

Из пятого условия, что Жанна знает французский язык, рисуем стрелку. Из третьего условия, что Марина не знает ни немецкого, ни английского, а французский знает Жанна, то Марина знает испанский и, рассматривая первое условие, она играет на гитаре. Из условия №2 видим, что Лариса играет на пианино, т.к. Марина играет на гитаре, а на других инструментах она играть не умеет, и значит, она говорит по-немецки.

Т.к. Жанна играет на скрипке, то остаётся один инструмент, на котором он может играть это виолончель. Тогда Катя играет на скрипке, и знает английский язык.

Задача №2

Из трёх человек, стоящих рядом, один всегда говорит правду (рыцарь), другой всегда лжёт (лжец), а третий, смотря по обстоятельствам, говорит либо правду, либо ложь (дипломат). У стоящего слева спросил:”Кто стоит рядом с тобой?”. Он ответил: «Рыцарь”. Стоящему в центре задали вопрос:”Кто ты?”, и он ответил:”Я дипломат”.Когда у стоящего справа спросили:”Кто стоит рядом с тобой?”, он сказал:”Лжец”. Кто где стоял?

Решение

Если в данной задаче ребро графа будет соответствовать месту, занимаемому тем или иным человеком, то нам могут представиться следующие возможности:

Получается, что Рыцарь может стоять только справа, тогда в центре стоит лжец, а слева дипломат.

Ответ: Граф №6.

Задача №3

В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

Решение

Предположим, что это возможно. Рассмотрим тогда граф, вершины которого соответствуют телефонам, а ребра – соединяющим их проводам. В этом графе 15 вершин, степень каждой из которых равна пяти. Подсчитаем количество ребер в этом графе. Для этого сначала просуммируем степени всех его вершин. Ясно, что при таком подсчете каждое ребро учтено дважды (оно ведь соединяет две вершины!). Поэтому число ребер графа должно быть равно 15 • 5/2. Но это число нецелое! Следовательно, такого графа не существует, а значит, и соединить телефоны требуемым образом невозможно.

Задача №4

В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?
Решение

Если бы это было возможно, то можно было бы нарисовать граф с 30 вершинами, 9 из которых имели бы степень 3, 11 – степень 4, 10 – степень 5. Однако у такого графа 19 нечетных вершин, что противоречит теореме.

Задача №5

Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются 7 островов, с каждого из которых ведет 1, 3 или 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

Решение

Да, верно, иначе нарушается теорема о числе нечетных вершин.

Задача №6

Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Решение

Нет, нельзя. Примените теорему к графу, вершины которого – данные отрезки, а ребро соединяет две вершины тогда, когда два соответствующих отрезка пересекаются.

Задача №7

*Какое наибольшее число коней можно расставить на доске 5*5 клеток, так* *чтобы каждый из них бил ровно двух других? (Приведите пример и объясните, почему больше коней расставить нельзя.)*

Решение

На рис. 8.3 приведено расположение 16 коней, удовлетворяющее условию задачи. Покажем, что большее число коней расставить нельзя. Раскрасим клетки доски, как показано на рис. 8.3. Заметим, что количество коней, расположенных на чёрных клетках, равно количеству коней, расположенных на белых клетках. Значит, если число пустых белых клеток равно n, то число пустых чёрных клеток равно n+1.

Рис.8.3

При любом оптимальном расположении коней центральная клетка пуста. В противном случае из восьми клеток, которые бьёт конь, стоящий на центральном поле, ровно шесть пустых белых. Отсюда $n \geq 6$ и число коней не превосходит $25-n-(n+1) \leq 12$.

Разобьём белые клетки на четыре группы, как показано на рис. 8.4 (клетки одной группы отмечены одинаковыми цифрами). Покажем, что при оптимальном расположении по крайней мере одна клетка каждой группы пуста (отсюда будет следовать, что $n \geq 4$). Предположим противное, например, что на всех клетках группы 3 стоят кони. Обозначим их буквами a, b и c (рис. 8.5). Конь, стоящий на клетке a, бьёт клетки f, d и центральную. Но, как было показано выше, центральная клетка пуста, значит, на клетках f и d стоят кони. Аналогично можно показать, что на клетках e и g тоже стоят кони. Но тогда конь, стоящий на клетке c, бьёт четырёх коней, расположенных на d, e, f и g, что противоречит условию.

Р Р

ис. 8.4 ис. 8.5

Итак, $n \geq 4$. Значит, число коней не больше $25-n-(n+1) \leq 16$.

5

.2.Биография Л.Эйлера

Э

йлер (Леонгард, Euler) - один из величайших математиков XVIII столетия, родился в 1707 г., в Базеле. Отец его, Павел Эйлер, был пастором в Рихене (близ Базеля) и имел некоторые познания в математике, приобретенные под руководством Якова Бернулли (III, 575). Отец предназначал своего сына к духовной карьере, но сам, интересуясь математикой, преподавал ее и сыну, надеясь, что она ему впоследствии пригодится в качестве интересного и полезного занятия. По окончании домашнего обучения молодой Эйлер был отправлен отцом в Базель для слушания философии. Обладая отличной памятью, Эйлер скоро и легко усвоил себе этот предмет и нашел время поближе ознакомиться с тем, к чему его влекло призвание, то есть с геометрией и математическими предметами. Профессор Иоанн Бернулли (III, 575) очень скоро обратил внимание на Эйлера и нашел в нем необыкновенный талант. Он предложил молодому человеку заниматься с ним отдельно в особые часы для разъяснения неясностей и затруднений, которые встречались в сочинениях, рекомендуемых профессором Эйлеру для изучения. Получив в 1723 г. степень магистра, после произнесения речи на латинском языке о философии Декарта и Ньютона, Эйлер, по желанию отца своего, приступил к изучению восточных языков и богословия. Способности его преодолели и эти предметы, но влечение к математическим наукам развивалось все более и более. Частые беседы с Иоанном Бернулли о вопросах математических в кругу семейства профессора дали Эйлеру случай познакомиться с двумя сыновьями Иоанна, а именно Николаем и Даниилом Бернулли. Общее влечение к математике соединило их с Эйлером дружбой, и дружба эта повела Эйлера по новому пути. В 1725 г. Николай и Даниил Бернулли были приглашены в члены Петербургской Академии Наук, недавно основанной императрицей Екатериной I во исполнение намерений Петра Великого . Уезжая, молодые Бернулли обещали Эйлеру известить его, если найдется и для него подходящее занятие в России. На следующий год они сообщили, что для Эйлера найдется место, но, однако, в качестве физиолога при медицинском отделении академии. Узнав об этом, Эйлер немедленно записался в студенты медицины Базельского университета. Прилежно и успешно изучая науки медицинского факультета, Эйлер находил время и для занятий по математическим предметам; за это время он написал напечатанную потом в 1727 г. в Базеле диссертацию о распространении звука ("Dissertatio physico de sono") и исследование по вопросу о размещении мачт на корабле ("Meditationes super problemate nautico de complantatione malorum"). Последнее, написанное на тему, предложенную французской академией, было принято академией в 1727 г. как достойное премии и напечатано в изданиях ее. Ту же работу, в качестве диссертации, Эйлер защищал для получения профессуры по кафедре физики в Базельском университете. Занять место профессора ему здесь не удалось, и он отправился в Петербург, где, по рекомендации академиков Германна и Даниила Бернулли, был назначен адъюнктом академии по математике и немедленно деятельно и прилежно стал работать, представляя академии исследования по разным вопросам прикладной математики. Почти в день приезда Эйлера скончалась покровительница академии императрица Екатерина I, и событие это печально отозвалось на судьбе академии. Новые порядки и новое управление стали угрожать даже самому существованию молодого учреждения. Иностранным академикам пришлось подумывать о возвращении на родину. Эйлер решился принять сделанное ему предложение о поступлении в морскую службу. Адмирал Сиверс, предугадывая пользу, которую может принести флоту такой ученый, выхлопотал для Эйлера чин лейтенанта флота и обещал дальнейшее скорое повышение по службе. Однако вследствие выхода нескольких академиков и отъезда их на родину, Эйлеру предложили получить оставшееся вакантным место профессора физики, которое он и занял; затем в 1733 г. он был сделан академиком на место, оставшееся свободным после отъезда друга его Даниила Бернулли за границу. Обладая громадным талантом, Эйлер вместе с тем обладал необыкновенным трудолюбием; соединением этих двух качеств и объясняется многочисленность и полезность его трудов. В 1735 г. потребовалось в академии выполнить одну весьма сложную работу. По мнению академиков, на это нужно было употребить несколько месяцев труда. Эйлер взялся выполнить это в три дня и исполнил работу, но вследствие этого заболел нервной горячкой с воспалением правого глаза, которого он и лишился. Вскоре после этого, в 1736 г., появились два тома его аналитической механики ("Mechanica, sive motus scientia analytice exposita", Petrop.). Потребность в этой книге была большая; немало было написано статей по разным вопросам механики, но хорошего трактата по механике не имелось, а существовавшие до этого времени трактаты были неудовлетворительны. В 1738 г. появились две части введения в арифметику на немецком языке, в 1739 г. - новая теория музыки ("Tentamen novae theoriae musicae, ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae", Petrop.). Затем в 1840 г. Эйлер написал сочинение о приливах и отливах морей ("Inquisitio physica in caussam fluxus et refluxus maris"), увенчанное одной третью премии французской академии; две другие трети были присуждены Даниилу Бернулли и Маклорену за сочинения их на ту же тему. Тома II, III, IV, V, VI, VII издания нашей академии: "Commentarii Akad. sc. Petrop.", вышедшие до 1841 г., и том VIII, вышедший в этом году, заключают значительное число мемуаров Эйлера по различным вопросам чистой и прикладной математики. В 1740 г., по кончине императрицы Анны Иоанновны , началось регентство Бирона . В это жестокое для России время Эйлер получил приглашение от Фридриха Великого переехать в Берлин. Очевидно, что при приглашении этого приобретшего уже известность ученого имелось в виду оживить берлинскую академию, пришедшую в упадок вследствие продолжительной войны. Поощренный вниманием короля, Эйлер собрал около себя небольшое ученое общество, а затем был приглашен в состав вновь восстановленной королевской академии наук и назначен деканом математического отделения. В 1743 г. в томе VII "Miscellanea Berolinensis" он поместил 5 мемуаров, из них 4 по чистой математике и из них последний ("De integratione aequationum differentialium altiorum graduum") замечателен в двух отношениях. В нем указывается на способ интегрирования рациональных дробей путем разложения их на частные дроби и, кроме того, излагается обычный теперь способ интегрирования линейных обыкновенных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами. Начиная с 1745 г. стали выходить мемуары возобновленной королевской академии, по тому в год, и в этом издании, в каждом томе, начиная с первого (1745), находим от трех до девяти мемуаров Эйлера. Так продолжалось до тома XXV 1769 г. и даже в 1772 и 1773 годах в новых мемуарах этой академии. Не желая прерывать сношений с петербургской академией, он находил множество материала для других мемуаров, которые наполняют тома от IX (1744) до XIV (1751) "Commentarii", затем от тома I (1750) до тома XX (1776) "Novi Commentarii Acad. sc. Petrop." и далее от тома I (1777) до тома IV (1780) издания: "Nova acta Acad. sc. Petrop.". Кроме этого Эйлер, начиная с 1744 г., написал несколько больших сочинений, изданных отдельно. Так, в 1744 г. напечатано в Лозанне сочинение под заглавием: "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime proprietate gaudentes, sive solutis problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti". Основным типом вопросов изопериметрических может служить вопрос об определении замкнутой кривой, которая при данном периметре заключают наименьшую площадь. Подобными вопросами интересовались и занимались геометры, современные Эйлеру, и некоторые геометры раньше Эйлера. Вопросы такого рода требуют определения такой функции, чтобы некоторый интеграл, заключающий эту функцию под знаком интеграла, был бы наименьшим или наибольшим. При решении получается некоторое дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять искомая функция. К числу изопериметрических вопросов относятся также вопросы об определении движения материальной системы при условии, чтобы интеграл, выражающий действие (XI, 327; VIII, 66 - 67), был наименьшим или наибольшим. Автор рассматривает все подобные вопросы и приводит их к вопросам об интегрировании дифференциальных уравнений. После него только изложение решения таких вопросов изменилось, но сущность метода осталась та же. В том же 1744 г. напечатаны в Берлине три сочинения о движении светил, первое - теория движения планет и комет, заключающая в себе изложение способа определения орбит их из нескольких наблюдений; второе и третье - о движении комет. По желанию короля Эйлер перевел с английского языка и в 1744 г. издал книгу: "Neue Grundrisse der Artillerie von Robin", перевод, снабженный объяснениями и примечаниями Эйлера. В сочинении Робинса, известного в истории артиллерии изобретателя баллистического маятника (II, 803), были приведены различные выводы по внешней и внутренней баллистике. Эйлер в своих примечаниях сначала выводит теоретически закон сопротивления в виде двучлена, первый член которого, пропорциональный квадрату скорости, обусловливается ударом снаряда (шарового) о воздух, второй член, пропорциональный четвертой степени скорости, обусловливается перевесом давления сжатых частей струй воздуха на переднюю часть над давлением разреженных частей струй на заднюю. Получаемые при этом законе формулы баллистики представляются в весьма сложном виде, неудобном для употребления. Позднее в мемуаре: "Recherches sur la veritable courbe que decrive les corps jetes dans l'air..." ("Mem. de Berlin", 1753) он ограничивается первым членом и получает формулы баллистики шарового снаряда удобно применимые. В 1746 г. напечатаны три тома разных статей ("Varia Opuscula"), в числе которых между прочим находятся статьи по механике: решение вопроса о движении материальных точек, остающихся внутри движущегося канала, о возмущениях в движении планет и сопротивлении движению со стороны эфира, о движении гибких тел; по физике: "Recherches sur la nature des moindres particules des corps", "Sur la lumiere et couleurs", "Dissertatio de magnete". За теорию магнитных явлений, основанную на предположении о протекании эфира через промежутки между атомами, автор получил премию французской академии. В 1748 г. издана в Лозанне книга в двух томах: "Introductio in analysin infinitrum", упрочившая славу Эйлера как первостепенного математика. Почти все то, что преподается и теперь в курсах высшей алгебры и высшего анализа, находится в этой книге. В первом томе ее с необыкновенной ясностью и простотой изложены свойства функций рациональных и трансцендентных: тригонометрических, круговых, показательных и логарифмических, разложение последних в ряды, представление их в виде бесконечных произведений; свойства непрерывных дробей. Во втором томе аналитическое исследование кривых линий вообще и кривых второго, третьего и четвертого порядка и поверхностей второго порядка. В 4-й главе этой части выведены формулы преобразования координат прямоугольных в прямоугольные же при перемене начала координат и направления осей; здесь впервые вводятся те три угла, которые называются Эйлеровыми углами и играют в кинематике твердого тела существенную роль. В 1749 г. издана в Петербурге в двух томах "Scientia navalis, seu tractatus de constructione ac dirigendis navibus". Это полное и систематическое сочинение по навигации, заключающее в себе теорию равновесия и устойчивости судов, рассмотрение вопросов о качке на зыби, о форме судов и кораблестроении, о движении судов силой ветра и управлении судном. Сочинению этому предшествовали некоторые мемуары автора в разных ученых изданиях, из которых два были увенчаны премиями французской академии. От короля и от императрицы автор получил за это сочинение значительные денежные награды. Оно было переведено на языки итальянский, английский и русский. В 1773 г., когда Эйлер был уже в Петербурге, сочинение это было издано в более понятном для моряков изложении под заглавием: "Theorie complete de la construction et des manoevres des vaisseaux". В 1755 г. в Берлине издано было в двух томах сочинение: "Institutiones calculi differentialis, cum eius usi in analysi finitorum ac doctrina serierum". Книга эта заключает в себе систематическое и полное изложение оснований дифференциального исчисления и применений его к учению о рядах, к решению уравнений, к нахождению наибольших и наименьших значений функций, к раскрытию неопределенных выражений. Занимаясь вопросами о преломлении лучей света и написав немало мемуаров об этом предмете, Эйлер издал в 1762 г. сочинение: "Constructio lentium objectivarum ex duplici vitro" (Petrop.), в котором предлагается устройство сложных объективов с целью уменьшения хроматической аберрации. Английский художник Доллонд, открывший два различной преломляемости сорта стекла, следуя указаниям Эйлера, построил первые ахроматические объективы. В 1765 г. механика Эйлера была дополнена сочинением: "Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum Rostoch.", в котором находятся те дифференциальные уравнения вращения твердого тела, которые носят название Эйлеровых уравнений вращения твердого тела. Много написал Эйлер мемуаров об изгибе и колебании упругих стержней; эти вопросы были также одним из предметов исследований Даниила Бернулли. Вопросы эти интересны не только в математическом, но и в практическом отношении. Один из таких вопросов есть вопрос о так называемом продольном изгибе, рассматриваемый в мемуаре: "Sur la force des colonnes", помещенном в томе XIII (1759) мемуаров берлинской академии. К числу весьма важных для практической механики предметов, которыми занимался Эйлер, относится предложенное им очертание зубцов по разверткам круга; об этом говорится в статьях томов V и XI "Novi Comment. Acad. Petrop.". Фридрих Великий, вполне оценивший гениальный талант и обширные познания великого геометра, давал ему поручения чисто инженерного характера; так, в 1749 г. он поручил ему осмотреть канал Фуно между Гавелем и Одером и указать необходимые исправления в недостатках этого водного пути; далее поручено было исправить водоснабжение в Сан-Суси. По поводу этого появилось немало статей по гидравлике, написанных Эйлером в разное время. Биографы Эйлера утверждают, что он очень желал вернуться в Россию. В 1766 г. он получил через посла в Берлине, князя Долгорукова , приглашение императрицы Екатерины II вернуться в Академию Наук на всяких условиях, каких бы Эйлер ни пожелал. Несмотря на уговоры остаться, делавшиеся со стороны особ королевского дома, он принял приглашение и в июне месяце прибыл в Петербург. Только что он поселился в доме, купленном для него на счет императрицы, как подвергся тяжкой болезни, после которой потерял зрение левого глаза вследствие образования катаракты. Благодаря услугам окружающих его лиц и сыновей его, Эйлер, несмотря на потерю зрения, при своих гениальных способностях и замечательной памяти, диктовал свои дальнейшие мемуары и издавал отдельные свои книги. К числу последних принадлежит "Institutionum calculi integralis", изданная в Петербурге в 1768 - 1770 гг. в трех томах и переизданная в 1792 - 1794 гг., после смерти автора, в 4 томах. Эта замечательная книга заключает в себе решение множества вопросов точного или приближенного интегрирования дифференциальных уравнений обыкновенных разных степеней и порядков и дифференциальных уравнений с частными производными, а кроме того, здесь же находится и вариационное исчисление. В 1770 г. издано введение в алгебру, в 1769 - 1771 гг. - "Dioptrica" в трех томах. В 1772 г. - "Theoria motuum Lunae". За сочинение "Theorie de la Lune et specialement sur l'equation seculaire", напечатанное в 1770 г., автор получил премию французской академии. По гидродинамике автор написал более двадцати мемуаров. Уравнения гидродинамики первого порядка с частными производными от проекций скорости, плотности и давления называются гидродинамическими уравнениями Эйлера. Эйлеру принадлежит доказательство соотношения между числом вершин, ребер и граней многогранника. Соотношение это такое: сумма числа вершин и граней равна числу ребер плюс два. Такое соотношение подозревал Декарт, но Эйлер доказал его в мемуарах: 1) "Elementa doctrinae solidorum"; 2) "Demonsratio nonullarum insignium proprietatum..." оба в IV томе "Novi Comment. Petrop.", Эйлеру принадлежит весьма много мемуаров по теории чисел. В них он доказал многие свойства чисел, данные раньше его без доказательства. Так он доказал и обобщил известную в теории сравнений теорему Фермата. Он также доказал, что всякое простое число вида 4n + 1 всегда разлагается на сумму квадратов других двух чисел. С 1769 по 1783 гг. Эйлер написал около 380 статей и сочинений. Неутомимость и настойчивость в научных исследованиях Эйлера были таковы, что в 1773 г., когда сгорел его дом и погибло почти все имущество его семейства, он и после этого несчастья продолжал диктовать свои исследования. Вскоре после пожара искусный окулист, барон Вентцель, произвел операцию снятия катаракты, но Эйлер не выдержал надлежащего времени без чтения и ослеп окончательно. В 1783 г. Эйлер скончался от апоплексического удара в присутствии своих помощников при работах профессоров Крафта и Лекселя . Похоронен он в Петербурге на Смоленском кладбище. Три сына его и их дети остались в России. Самым лучшим памятником его славы и научной деятельности было бы полное издание всех его статей и сочинений, число которых простирается до 756, но для этого потребуются значительные средства, так как число печатных листов будет около 2000.

5.3. Мосты Кенингсберга

Р

абочий мост

П

осле Лавочного и Зелёного был построен Рабочий мост (нем. Koettelbrucke), также соединявший Кнайпхоф и Форштадт. Иногда название также переводят как Потроховой мост. И тот, и другой вариант перевода не является идеальным, так как немецкое название происходит из Саксонии и в переводе на русский язык означает примерно «рабочий, вспомогательный, предназначенный для провоза мусора» и т. п. Этот мост был построен в 1377 году и перестроен в 1886 году. Мост был разрушен во время Второй мировой войны и позднее не восстанавливался.

Кузнечный мост

В 1397 году был построен Кузнечный мост (нем. Schmiedebrücke). Как и Лавочный мост, он соединял Альтштадт с Кнайпхофом. Мост был перестроен в 1896 году. Как и Рабочий мост, Кузнечный мост после войны не восстанавливался. Рядом с этим мостом на берегах Прегеля традиционно размещались кузнецы.

Деревянный мост

Старинный столбик из ограждения Деревянного моста. На столбике виден герб Кнайпхофа — поднятая из воды рука, держащая корону. На заднем плане — Кафедральный собор

Деревянный мост (нем. Holzbrücke) между Альтштадтом и Ломзе был построен в 1404 году. На Деревянном мосту находилась памятная доска с выдержками из «Прусской хроники» Альбрехта Лухела Давида. Этот десятитомный труд повествовал о языческой Пруссии и истории Тевтонского ордена до 1410 года. В том виде, который он приобрёл в 1904 году во время реконструкции, этот мост сохранился до сих пор. Сейчас по нему осуществляется движение автотранспорта и трамваев (по одному ряду в каждую сторону) и пешеходов.

Высокий мост

Ещё одним сохранившимся до сих пор мостом Кёнигсберга является Высокий мост (нем. Hohebrücke). Первый Высокий мост был построен в 1520 году. Он соединял Ломзе и Форштадт. В 1882 году мост был перестроен. При этом был возведён «Домик смотрителя мостов» , помещение для механизмов развода моста и т. п. Это красивое небольшое здание в стиле неоготики, несколько напоминающее замок в Диснейленде, сохранилось до сих пор. Сам старый Высокий мост был снесён в 1938 году, а в нескольких десятках метров от него был возведён новый Высокий мост, сохранившийся до сих пор и служащий для пешеходов, автомобилей и трамваев. Имеет разводную среднюю часть для проводки мачтовых судов. От старого Высокого моста, расположенного рядом, сохранились каменные опоры.

Медовый мост

Самый молодой из семи мостов — Медовый мост (нем.Honigbrücke), соединяющий острова Ломзе и Кнайпхоф. Как и Высокий и Деревянный мосты, Медовый мост сохранился до сих пор, но в отличие от них приобрёл практически исключительно пешеходный характер, так как сейчас на острове Кнайпхоф расположены только кафедральный собор (главная достопримечательность города) и парк скульптур, и проезд частного автотранспорта туда запрещён. По мосту проезжают только грузовики, подвозящие материалы для реставрации Кафедрального собора. Существуют разные версии о происхождении названия Медового моста. По одной из них, член Кнайпхофской ратуши Безенроде оплатил постройку моста бочками мёда, по-другой — тем же товаром оплатил постройку торговой лавки на заречной территории. Однако скорее всего эти версии являются «городскими легендами». Вероятнее всего, название происходит от слова «хон», что значит — насмешка, издёвка. Построив этот мост, жители Кнайпхофа получили непосредственный доступ к острову Ломзе, в обход Высокого моста, принадлежавшего Альтштадту. Таким образом этот мост стал как бы насмешкой над главным из кёнигсбергских городов.