Краевой конкурс творческих работ учащихся
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Золотое сечение

Треногина Дарья Алексеевна,
8 кл., МБОУ «СОШ» №5, г. Чернушки

Макеева Любовь Семёновна,
учитель математики МБОУ «СОШ» №5

Пермь. 2012.

Оглавление

Стр.

Геометрия владеет двумя сокровищами : одно из них – это теорема Пифагора, а другое – деление отрезка в среднем и крайнем отношении… Первое можно сравнить с мерой золота; второе же больше напоминает драгоценный камень.

И.Кеплер

Введение

Человек различает окружающие его предметы по форме. Интерес к форме какого-либо предмета может быть продиктован жизненной необходимостью, а может быть вызван красотой формы. Форма, в основе построения которой лежат сочетание симметрии и золотого сечения, способствует наилучшему зрительному восприятию и появлению ощущения красоты и гармонии. Целое всегда состоит из частей, части разной величины находятся в определенном отношении друг к другу и к целому. Принцип золотого сечения – высшее проявление структурного и функционального совершенства целого и его частей в искусстве, науке, технике и природе. Мне интересна эта тема, так как я одновременно интересуюсь искусством и математикой. Эта работа учит меня работе с разными видами литературы и развивает мое мышление. В моей работе представлены 3 главы (1- История золотого сечения; 2- «Золотые» фигуры; 3- Золотое сечение в искусстве). В приложении показаны разные виды золотого сечения в живописи, в скульптуре и в архитектуре.

Задачи:

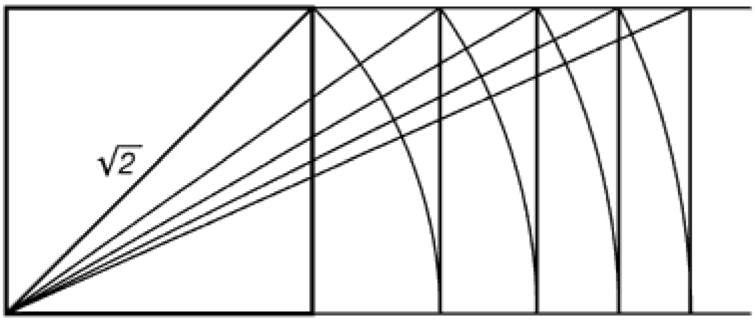
- Узнать, что такое золотое сечение
- Как построить некоторые из золотых фигур
- Где широко используется золотое сечение
- Ознакомить моих одноклассников с темой золотое сечение

Глава 1

История золотого сечения

Принято считать, что понятие о золотом делении ввел в научный обиход Пифагор, древнегреческий философ и математик (VI в. до н.э.). Есть предположение, что Пифагор свое знание золотого деления позаимствовал у египтян и вавилонян. И действительно, пропорции пирамиды Хеопса, храмов, барельефов, предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона свидетельствуют, что египетские мастера пользовались соотношениями золотого деления при их создании. Французский архитектор Ле Корбюзье нашел, что в рельефе из храма фараона Сети I в Абидосе и в рельефе, изображающем фараона Рамсеса, пропорции фигур соответствуют величинам золотого деления. Зодчий Хесира, изображенный на рельефе деревянной доски из гробницы его имени, держит в руках измерительные инструменты, в которых зафиксированы пропорции золотого деления.

Рис. 1. Динамические прямоугольники



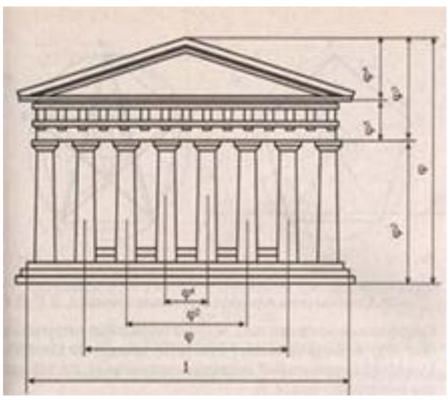


Рис.2. Парфенон

Греки же были искусными геометрами. Даже арифметике обучали своих детей при помощи геометрических фигур. Квадрат Пифагора и диагональ этого квадрата были основанием для построения динамических прямоугольников. Платон (427...347 гг. до н.э.) также знал о золотом делении. Его диалог "Тимей" посвящен математическим и эстетическим воззрениям школы Пифагора и, в частности, вопросам золотого деления. Парфенон имеет 8 колонн по коротким сторонам и 17 по длинным
Отношение высоты здания к его длине равно 0,618. Если произвести деление Парфенона по «золотому сечению», то получим те или иные выступы фасада. При его раскопках обнаружены циркули, которыми пользовались архитекторы и скульпторы античного мира. В Помпейском циркуле (музей в Неаполе) также заложены пропорции золотого деления.

.

В дошедшей до нас античной литературе золотое деление впервые упоминается в "Началах" Евклида. Во 2-й книге "Начал" дается геометрическое построение золотого деления. После Евклида исследованием золотого деления занимались Гипсикл (II в. до н.э.), Папп (III в. н.э.) и др.. В средневековой Европе с золотым делением познакомились по арабским переводам "Начал" Евклида. Переводчик Дж. Кампано из Наварры (III в.) сделал к переводу комментарии. Секреты золотого деления ревностно оберегались, хранились в строгой тайне. Они были известны только посвященным. В эпоху Возрождения усиливается интерес к золотому делению среди ученых и художников в связи с его применением, как в геометрии, так и в искусстве, особенно в архитектуре. Леонардо да Винчи, художник и ученый, видел, что в итальянских художниках большой эмпирический опыт, но недостаток знаний. Он задумал и начал писать книгу по геометрии, но в это время появилась книга монаха Луки Пачоли, и Леонардо оставил свою затею. По мнению современников и историков науки, Лука Пачоли был настоящим светилом, величайшим математиком Италии в период между Фибоначчи и Галилеем. Лука Пачоли прекрасно понимал значение науки для искусства. В 1496 г по приглашению герцога Моро он приезжает в Милан, где читает лекции по математике. В Милане при дворе Моро в то время работал и Леонардо да Винчи. В 1509 г. в Венеции была издана книга Луки Пачоли "Божественная пропорция" с блестяще выполненными иллюстрациями, ввиду чего полагают, что их сделал Леонардо да Винчи. Книга была восторженным гимном золотой пропорции. Среди многих достоинств золотой пропорции монах Лука Пачоли не преминул назвать и ее "божественную суть" как выражение божественного триединства: бог сын, бог отец и бог дух святой (подразумевалось, что малый отрезок есть олицетворение бога сына, больший отрезок - бога отца, а весь отрезок - бога духа святого).Леонардо да Винчи также много внимания уделял изучению золотого деления. Он производил сечения стереометрического тела, образованного правильными пятиугольниками, и каждый раз получал прямоугольники с отношениями сторон в золотом делении. Поэтому он дал этому делению название золотое сечение. Так оно и держится до сих пор как самое популярное. В то же время на севере Европы, в Германии, над теми же проблемами трудился Альбрехт Дюрер. Он делает наброски введения к первому варианту трактата о пропорциях. Дюрер пишет: "Необходимо, чтобы тот, кто что-либо умеет, обучил этому других, которые в этом нуждаются. Это я и вознамерился сделать".Судя по одному из писем Дюрера, он встречался с Лукой Пачоли во

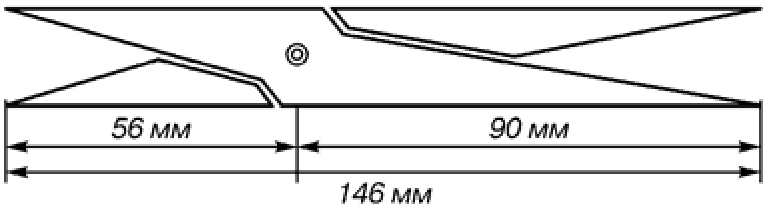
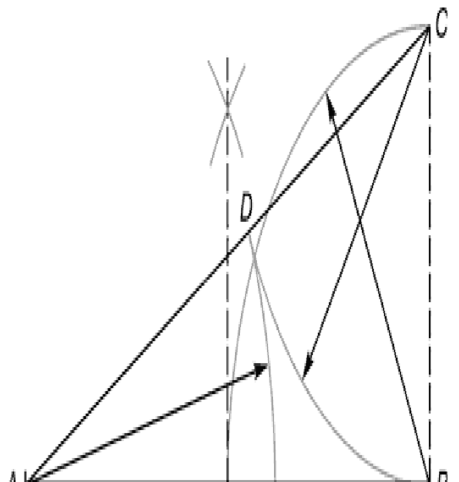


Рис. 3. Античный циркуль золотого сечения

время пребывания в Италии. Альбрехт Дюрер подробно разрабатывает теорию пропорций человеческого тела. Важное место в своей системе соотношений Дюрер отводил золотому сечению. Рост человека делится в золотых пропорциях линией пояса, а также линией, проведенной через кончики средних пальцев опущенных рук, нижняя часть лица - ртом и т.д. Известен пропорциональный циркуль Дюрера.В последующие века правило золотой пропорции превратилось в академический канон и, когда со временем в искусстве началась борьба с академической рутиной, в пылу борьбы "вместе с водой выплеснули и ребенка". Вновь "открыто" золотое сечение было в середине XIX в. В 1855 г. немецкий исследователь золотого сечения профессор Цейзинг опубликовал свой труд "Эстетические исследования". С Цейзингом произошло именно то, что и должно было неминуемо произойти с исследователем, который рассматривает явление как таковое, без связи с другими явлениями. Он абсолютизировал пропорцию золотого сечения, объявив ее универсальной для всех явлений природы и искусства. У Цейзинга были многочисленные последователи, но были и противники, которые объявили его учение о пропорциях "математической эстетикой".

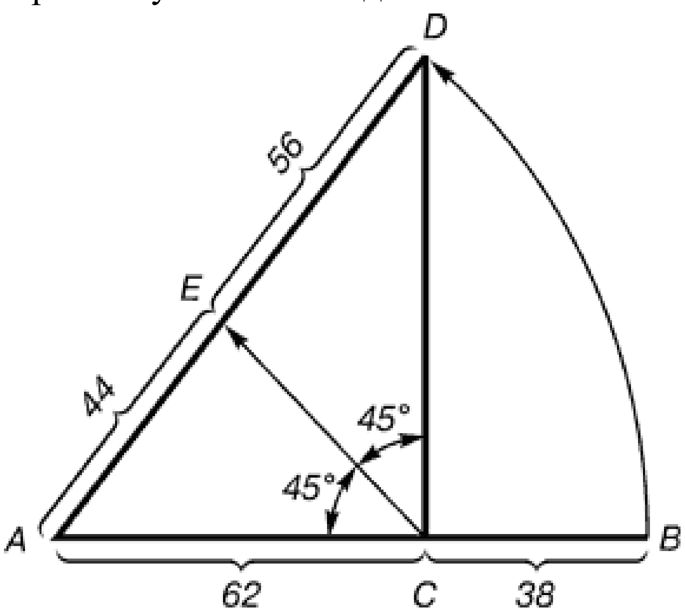
Рис. 4. Деление отрезка по золотому сечению. BC = 1/2 AB; CD = BC



Здесь приводится построение точки E, делящий отрезок прямой в пропорции золотое сечение. Из точки B восстанавливается перпендикуляр, равный половине AB. Полученная точка C соединяется линией с точкой A. На полученной линии откладывается отрезок BC, заканчивающийся точкой D. Отрезок AD переносится на прямую AB. Полученная при этом точка E делит отрезок AB в соотношении золотой пропорции.Именно эти отрезки использовал Евклид при построении правильного пятиугольника, т.к. каждая из сторон пятиугольной звезды делится другими именно в такой пропорции. Таким образом, звездчатый пятиугольник также обладает «золотым сечением». Интересно, что внутри пятиугольника можно продолжить строить пятиугольники, и это отношение будет сохраняться. Звездчатый пятиугольник называется пентаграммой. Пифагорейцы выбрали пятиконечную звезду в качестве талисмана, она считалась символом здоровья и служила опознавательным знаком. В настоящее время существует гипотеза, что пентаграмма – первичное понятие, а «золотое сечение» вторично. Пентаграмму никто не изобретал, ее только скопировали с натуры. Вид пятиконечной звезды имеют пяти-лепестковые цветы плодовых деревьев и кустарников, морские звезды. Те и другие создания природы человек наблюдает уже тысячи лет. Поэтому естественно предположить, что геометрический образ этих объектов – пентаграмма – стала известна раньше, чем «золотая» пропорция. Болгарский журнал «Отечество» (№10, 1983 г.) опубликовал статью Цветана Цекова-Карандаша «О втором золотом сечении», которое вытекает из основного сечения и дает другое отношение 44 : 56.

Рис. 5. Построение второго золотого сечения

Такая пропорция обнаружена в архитектуре, а также имеет место при построении композиций изображений удлиненного горизонтального формата. Деление осуществляется следующим образом. Отрезок AB делится в пропорции золотого сечения. Из точки C восставляется перпендикуляр CD. Радиусом AB находится точка D, которая соединяется линией с точкой A. Прямой угол ACD делится пополам. Из точки C проводится линия до пересечения с линией AD. Точка E делит отрезок AD в отношении 56 : 44.



На рисунке показано положение линии второго золотого сечения. Она находится посередине между линией золотого сечения и средней линией прямоугольника.

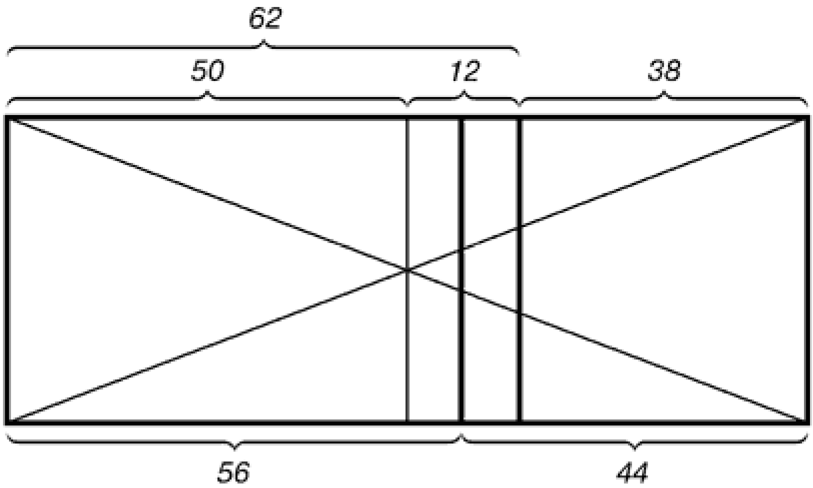


Рис. 6. Деление прямоугольника линией второго золотого сечения

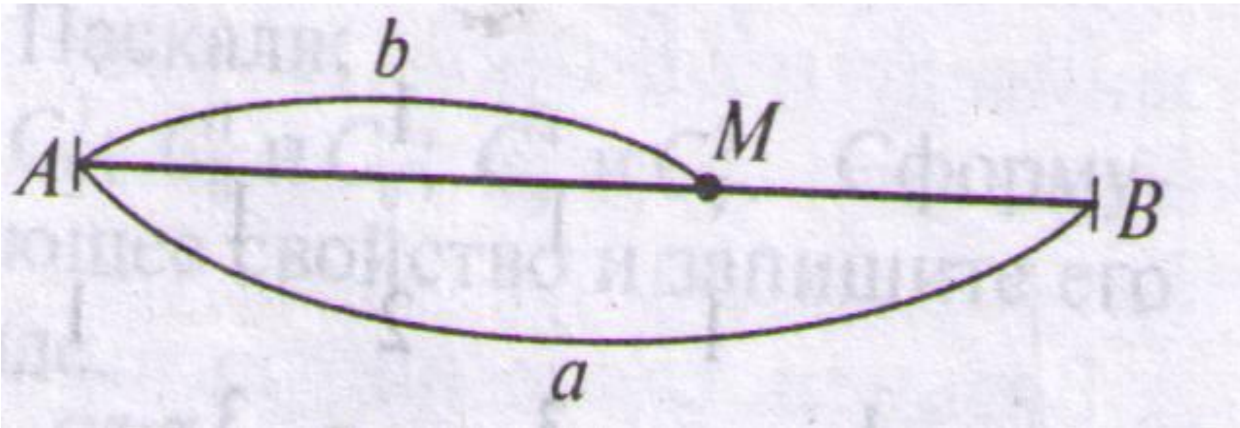
1.1 Чему равно золотое сечение?

Золотым сечением издавна называют определённое отношение длин отрезков. Это отношение, выражающее геометрическую гармонию, широко использовалось в древней архитектуре. Сооружения, построенные в золотой пропорции, поражают своей соразмерностью, законченностью, красотой.

Золотое отношение обычно обозначают буквой Ф – прописной буквой греческого алфавита. Такое обозначение принято в честь древнегреческого скульптора Фидия, жившего в V в. До н.э. он руководил строительством храма Парфенон в Афинах. В пропорциях этого храма многократно присутствует число Ф.

Говорят, что точка делит отрезок на две неравные части в отношении, равному золотому сечению, если отношение всего отрезка к большей его части равно отношению большей части отрезка к меньшей.

Пусть точка М делит отрезок АВ в золотом отношении ; a- длина всего отрезка, b- длина большей его части. Тогда имеет место пропорция :



$$a/b = b/(a-b), \text{ т.е. } a-ab-b=0$$

Разделив обе части равенства на b и обозначив отношение a/b буквой φ, получим уравнение: Ф – Ф + 1=0. Его положительный корень

$$\varphi = (\sqrt{5} + 1)/\ 2 \approx 1{,}618$$

Итак, золотое сечение – это число иррациональное, оно приближённо равно 1,618

Глава 2

"Золотые" фигуры

2.1 Золотой прямоугольник

Если построить квадрат со стороной AB=a, найти середину M отрезка AB и провести дугу окружности радиусом MC с центром в точке M до пересечения с продолжением стороны AB в точке E, то точка B разделит отрезок AE в крайнем и среднем отношении.
Чтобы убедиться в этом, заметим, что по теореме Пифагора

$$MC^2=a^2+(a/2)^2=5a^2/4$$

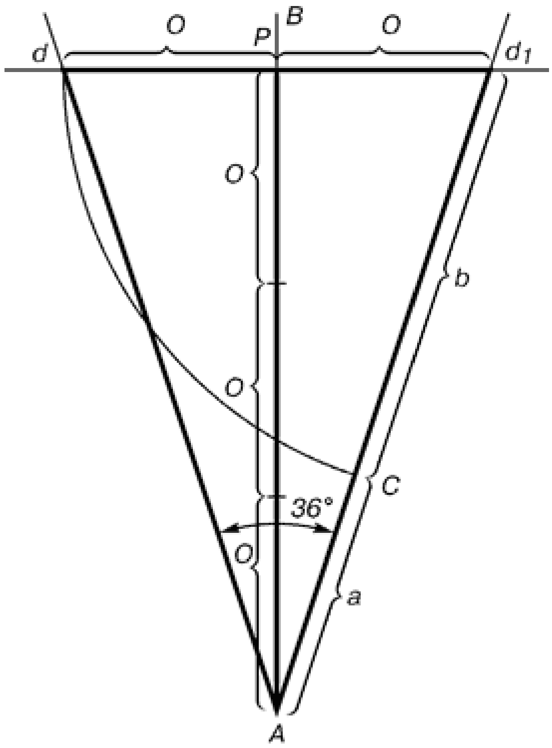
В силу чего

$$AE=a/2+ME=(\sqrt{5}+1)a/2=\varphi AB$$

Прямоугольник AEFD со сторонами AE=φAD называется золотым прямоугольником. Четырехугольник ABCD - квадрат. Нетрудно видеть, что прямоугольник BEFC также золотой, поскольку BC=a=φBE. Это обстоятельство сразу наводит на мысль о дальнейшем разбиении прямоугольника BEFC.

Можно ли считать, что прямоугольник с отношением сторон, равным φ, выглядит изящнее, чем прямоугольники с отношением сторон, скажем, 2:1, 3:2 или 5:7? Чтобы ответить на этот вопрос, были проведены специальные эксперименты. Результаты их не вполне убедительны, но все же свидетельствуют о некотором предпочтении, отдаваемом золотому сечению. Впрочем, может ли прямоугольник сам по себе быть захватывающе прекрасным или отталкивающе безобразным?

2.2 Золотой треугольник

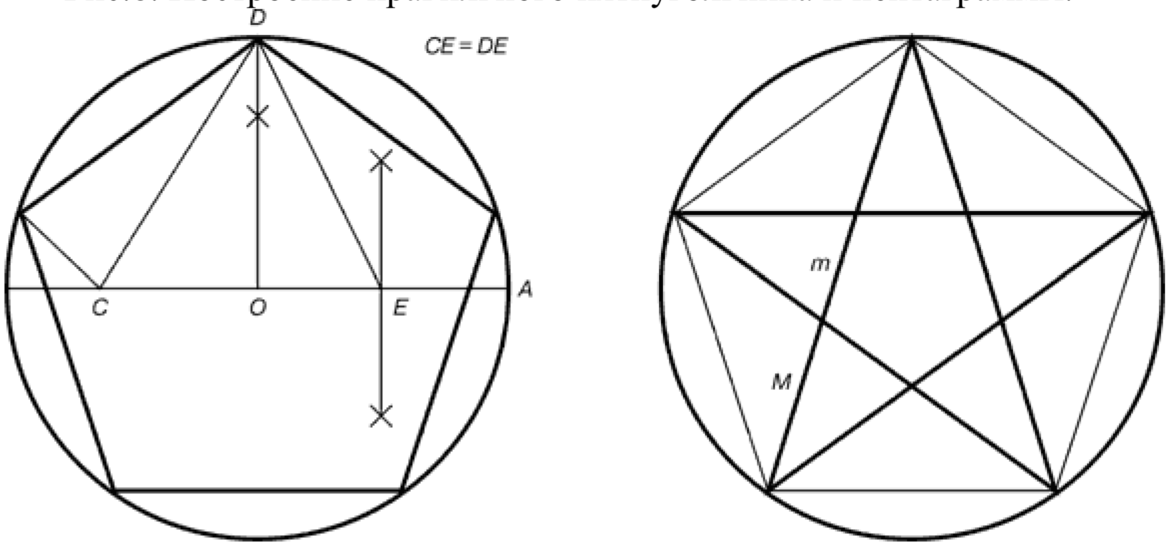


Проводим прямую AB. От точки A откладываем на ней три раза отрезок O произвольной величины, через полученную точку P проводим перпендикуляр к линии AB, на перпендикуляре вправо и влево от точки P откладываем отрезки O. Полученные точки d и d_1 соединяем прямыми с точкой A. Отрезок dd_1 откладываем на линию Ad_1, получая точку C. Она разделила линию Ad_1 в пропорции золотого сечения. Линиями Ad_1 и dd_1 пользуются для построения «золотого» прямоугольника.

2.3 Золотой пятиугольник; построение Евклида

Замечательный пример «золотого сечения» представляет собой правильный пятиугольник – выпуклый и звездчатый (рис. 8).

Рис.8. Построение правильного пятиугольника и пентаграммы.



Для построения пентаграммы необходимо построить правильный пятиугольник. Пусть O - центр окружности, A - точка на окружности и E - середина отрезка OA. Перпендикуляр к радиусу OA, восстановленный в точке O, пересекается с окружностью в точке D. Пользуясь циркулем, отложим на диаметре отрезок CE = ED. Длина стороны вписанного в окружность правильного пятиугольника равна DC. Откладываем на окружности отрезки DC и получим пять точек для начертания правильного пятиугольника. Соединяем углы пятиугольника через один диагоналями и получаем пентаграмму. Все диагонали пятиугольника делят друг друга на отрезки, связанные между собой золотой пропорцией. Каждый конец пятиугольной звезды представляет собой золотой треугольник. Его стороны образуют угол 36° при вершине, а основание, отложенное на боковую сторону, делит ее в пропорции золотого сечения. Есть и золотой кубоид- это прямоугольный параллелепипед с ребрами, имеющими длины 1.618, 1 и 0.618. Теперь рассмотрим доказательство, предложенное Евклидом в «Началах». Посмотрим теперь, как Евклид использует золотое сечение для того, чтобы построить угол в 72 градуса – именно под таким углом видна сторона правильного пятиугольника из центра описанной окружности. Начнем с отрезка ABE, разделенного в среднем и крайнем отношении точкой B. Проведем далее дуги окружностей с центрами в точках B и E и радиусах AB, пересекающиеся в точке C. Чуть ниже докажем, что AC=AE, а пока примерно это на веру. Итак, пусть AC=AE. Обозначим через a равные углы EBC и CEB. Так как AC=AE, то угол ACE также равен a. Теорема о том, что сумма углов треугольника равна 180 градусов, позволяет найти угол ВСЕ: он равен 180-2a, а угол ЕАС - 3a - 180. Но тогда угол АВС равен 180-a. Суммируя углы треугольника АВС получаем,

$$180=(3a -180) + (3a-180) + (180 - a)$$

Откуда 5a=360, значит a=72.

Итак, каждый из углов при основании треугольника ВЕС вдвое больше угла при вершине, равного 36 градусов. Следовательно, чтобы построить правильный пятиугольник, необходимо лишь провести любую окружность с центром в точке Е, пересекающую ЕС в точке X и сторону ЕВ в точке Y: отрезок XY служит одной из сторон вписанного в окружность правильного пятиугольника; Обойдя вокруг всей окружности, можно найти и все остальные стороны. Докажем теперь, что АС=АЕ. Предположим, что вершина С соединена отрезком прямой с серединой N отрезка ВЕ. Заметим, что поскольку СВ=СЕ, то угол CNE прямой. По теореме Пифагора:

$$CN^2 = a^2 – (a/2j)^2 = a^2 (1-4j^2)$$

Отсюда имеем $(AC/a)^2 = (1+1/2j)^2 + (1-1/4j^2) = 2+1/j = 1 + j = j^2$

Итак, АС = ja = jAB = АЕ, что и требовалось доказать

2.4 Спираль Архимеда

Последовательно отсекая от золотых прямоугольников квадраты до бесконечности, каждый раз соединяя противоположные точки четвертью окружности, мы получим довольно изящную кривую. Первым внимание на неё обратил древнегреческий ученый Архимед, имя которого она и носит. Он изучал её и вывел уравнение этой спирали.

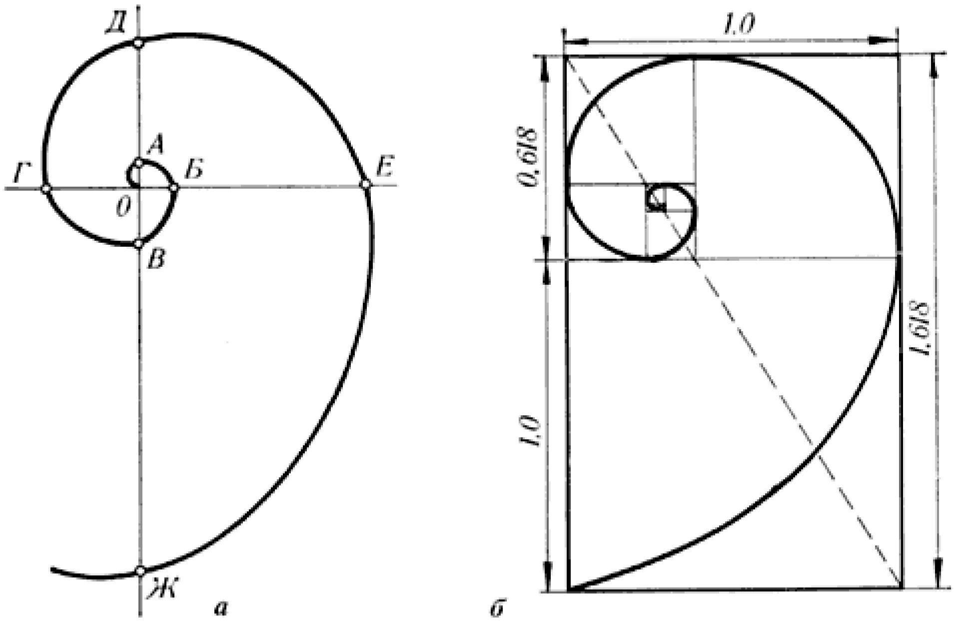


Рис.9.Спираль Архимеда

Начертите окружность, разделите ее и радиус ОА на *n* равных частей ($n = 12$). Проведите из центра О лучи ко всем точкам деления окружности и перенумеруйте их. На луче 1 отметьте точку на расстоянии равном 1/12 ОА от центра О, на луче 2-точку на расстоянии, равном 2/12 ОА от центра О, на луче 3- точку на расстоянии 3/12 ОА от центра О и т.д. Последовательно соединив отмеченные точки плавной кривой (начиная с точки О), получите представление о форме спирали Архимеда.

В настоящее время спираль Архимеда широко используется в технике.

Глава 3

Золотое сечение в искусстве

В искусстве очень важна проема постановки глаза. Так же, как для певца - постановка голоса. Поставленный глаз — свойство биологическое, чем в корне отличается от вкуса, который только приобретается. Однако это свойство можно развить. Поставленный крайне важен. Вкус может подвести, потому что исходит исключительно от разума. …Поставленный же глаз не подводит никогда, так как, будучи развит в известной степени при помощи разума, входит в плоть и кровь, становится как бы свойством организма и от рассудка не зависит. Он просто не дает человеку выпасть из рамок искусства.

Р. Фальк

3.1 Золотое сечение в живописи

Еще в эпоху Возрождения художники открыли, что любая картина имеет определенные точки, невольно приковывающие наше внимание, так называемые зрительные центры. При этом абсолютно неважно, какой формат имеет картина - горизонтальный или вертикальный. Таких точек всего четыре, и расположены они на расстоянии 3/8 и 5/8 от соответствующих краев плоскости. Переходя к примерам «золотого сечения» в живописи, нельзя не остановить своего внимания на творчестве Леонардо да Винчи. Его личность – одна из загадок истории. Сам Леонардо да Винчи говорил: «Пусть никто, не будучи математиком, не дерзнет читать мои труды».

Нет сомнений, что Леонардо да Винчи был великим художником, это признавали уже его современники, но его личность и деятельность останутся покрытыми тайной, так как он оставил потомкам не связное изложение своих идей, а лишь многочисленные рукописные наброски, заметки, в которых говорится «обо всем на свете». Портрет Монны Лизы (Джоконды) (рис.1) долгие годы привлекает внимание исследователей, которые обнаружили, что композиция рисунка основана на золотых треугольниках, являющихся частями правильного звездчатого пятиугольника.

Также пропорция золотого сечения проявляется в картине Шишкина (рис.2). На этой знаменитой картине И. И. Шишкина с очевидностью просматриваются мотивы золотого сечения. Ярко освещенная солнцем сосна (стоящая на первом плане) делит длину картины по золотому сечению. Справа от сосны - освещенный солнцем пригорок. Он делит по золотому сечению правую часть картины по горизонтали. В картине Рафаэля "Избиение младенцев" (рис.3) просматривается другой элемент золотой пропорции - золотая спираль. На подготовительном эскизе Рафаэля проведены красные линии, идущие от смыслового центра композиции - точки, где пальцы воина сомкнулись вокруг лодыжки ребенка - вдоль фигур ребенка, женщины, прижимающей его к себе, воина с занесенным мечом и затем вдоль фигур такой же группы в правой части эскиза. Неизвестно, строил ли Рафаэль золотую спираль или чувствовал её.

3.2 Пирамиды и архитектура золотого сечения

Широко известны медицинские свойства пирамид, особенно золотого сечения. По некоторым наиболее распространенным мнениям, комната, в которой находится такая пирамида, кажется больше, а воздух - прозрачнее. Сны начинают запоминаться лучше. Также известно, что золотое сечение широко применялась в архитектуре и скульптуре. Примером тому стали: Пантеон и Парфенон в Греции, здания архитекторов Баженова и Малевича. На (рис.4) показаны здания, при делении основных масс конструкций которых использовалось золотое сечение. Обычно считается, что такое членение используется в зданиях, построенных в классическом стиле. Однако, посмотрите на Смольный собор, построенный в стиле барокко, и вы без труда обнаружите золотое сечение

Заключение

Итак, я познакомилась с увлекательной темой, узнала много интересного. Разобралась в построении золотых фигур. Эта работа раскрыла мне ещё одну сторону прекрасной науки – математики. Был проведен итог работы и дана рекомендация выступить на школьной конференции.

Помимо основных целей, поставленных в начале работы, я преследовала ещё одну: прикосновение к тому, с чем сталкивались мои далёкие предки, к теме, которая имеет исторические корни. Мной были рассмотрены примеры наиболее известных построений золотого сечения.

В процессе работы над проектом пришлось выполнять различные построения. Возникло немало вопросов, ответы на которые получу, изучая курс математики в старших классах. Поэтому тема моей работы далеко не исчерпана. Я рассмотрела лишь некоторые, самые известные примеры построений золотых фигур. На самом деле их намного больше. Я продолжу изучение этой темы в будущем.

Библиографический список

1.Журнал «Математика в школе»: №10 2003г.

2.Журнал «Математика в школе»: №8 2004г.

3.Журнал «Математика в школе»: №2, 1994г.

4.Журнал «Математика в школе»: №3 1994г.

5.Журнал «Математика»:№1 2009г.;

6.Журнал «Математика»:№23 2006г.

7. А.В.Волошилов, математический справочник « Математика и искусство» , 1992г.

8. Л.Ф.Пичурин, математический справочник « За страницами учебника алгебры» , 1990г.

9. Интернет

Приложение

Рис.1

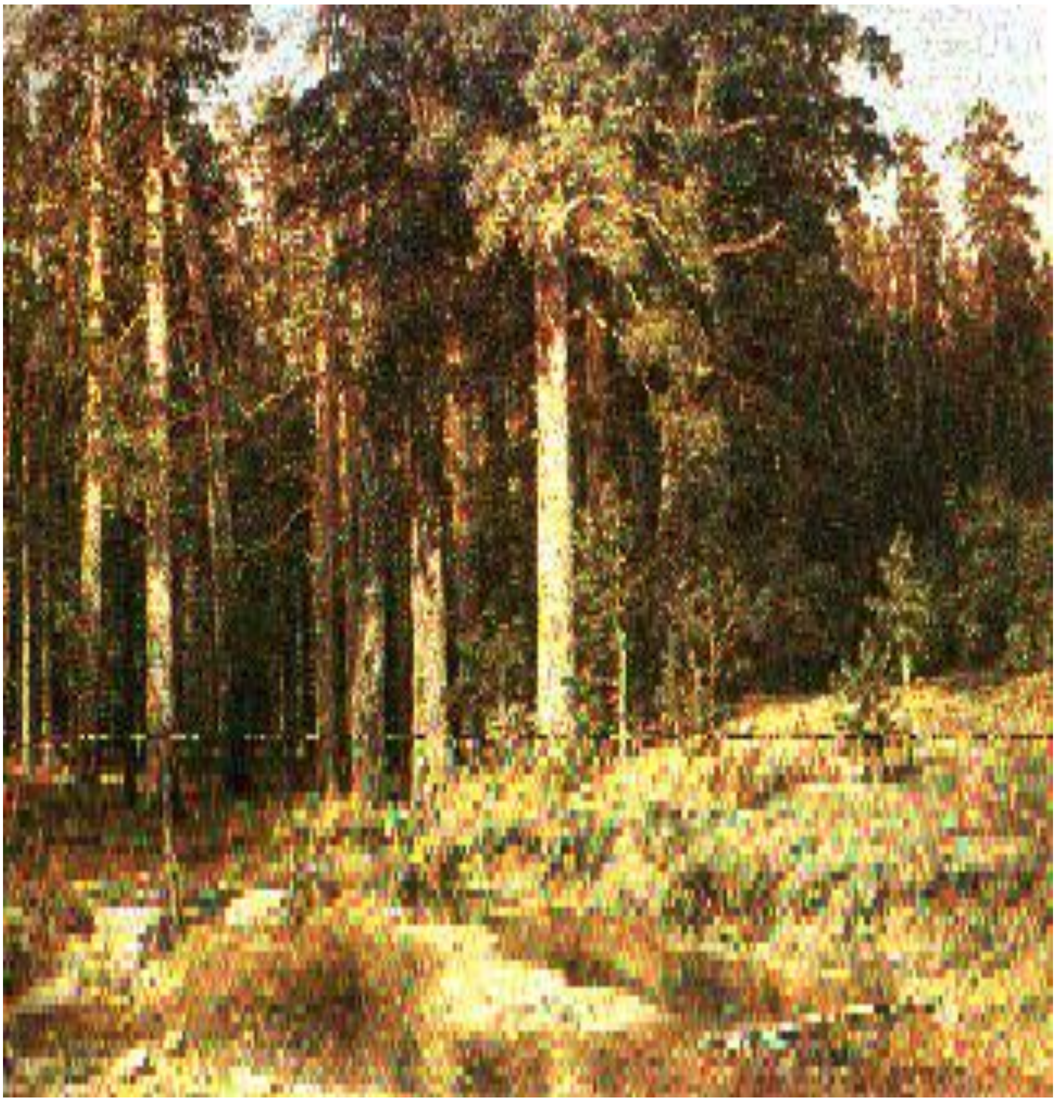


Рис.2

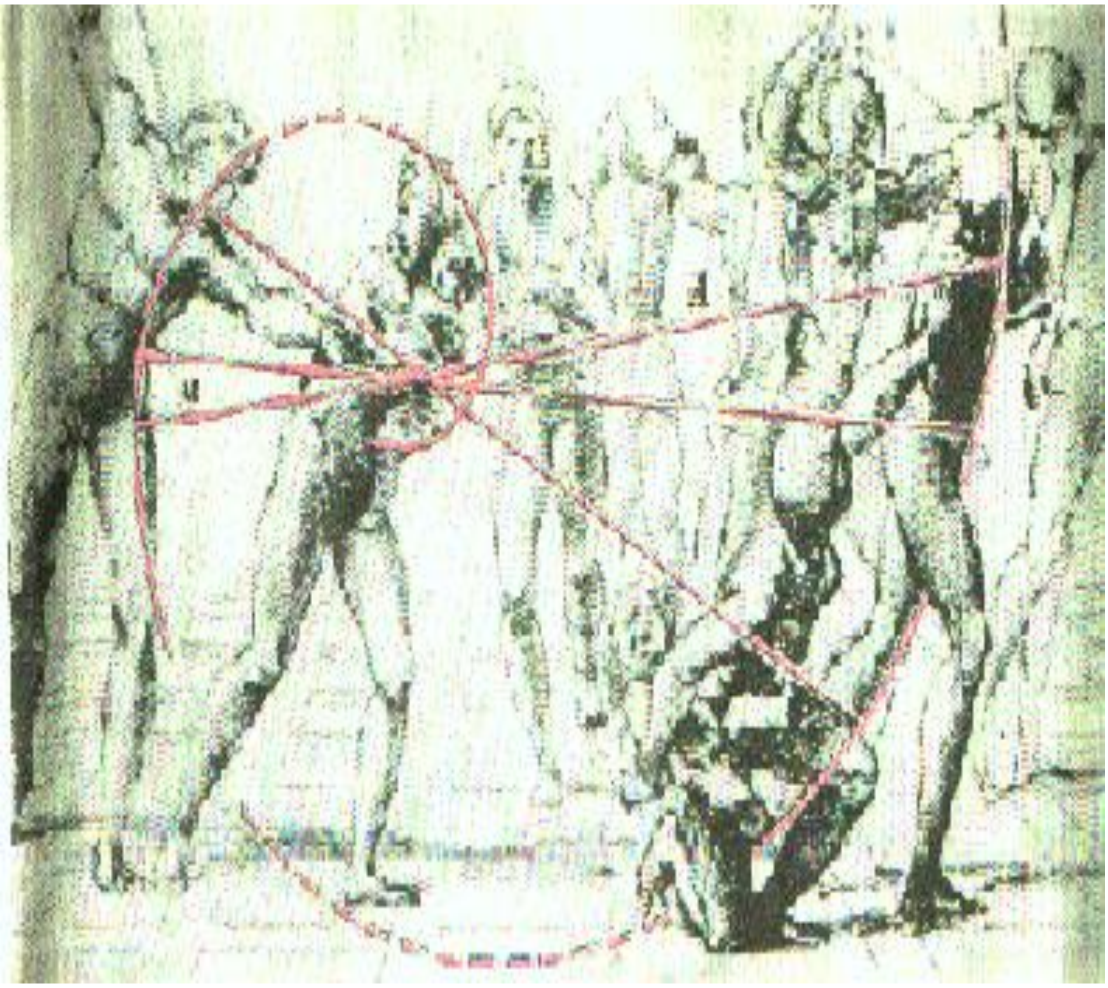
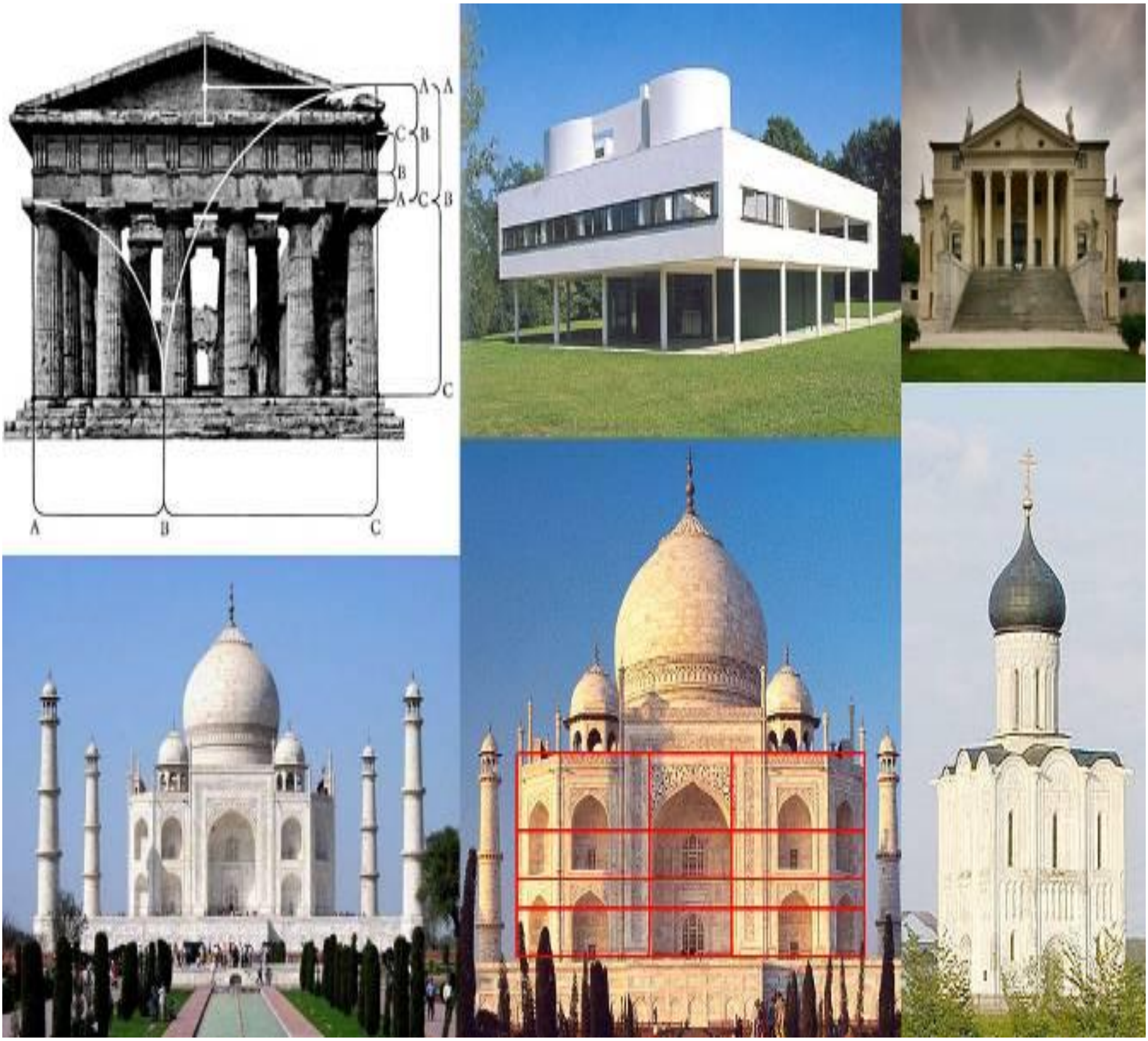


Рис.3



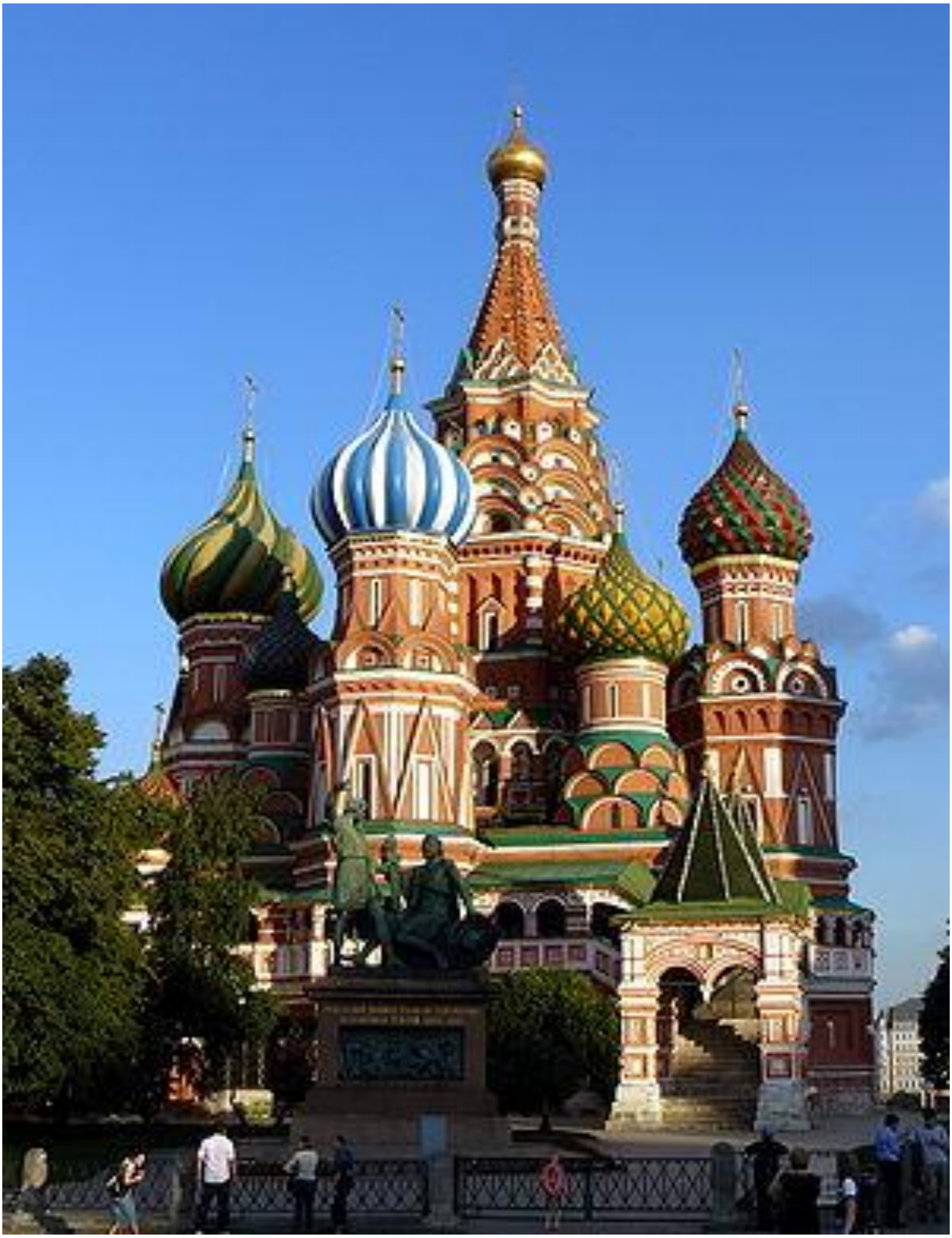
(рис.4)

Золотое сечение в живописи

Золотое сечение в скульптуре


0,382
0,618

Золотое сечение в архитектуре




M·AGRIPPA·L·F·COS·TERTIVM·FECIT