

Краевой конкурс творческих работ учащихся  
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

**Математическая модель движения нижних конечностей  
человека при прыжке**

Туснин Александр Константинович,  
Шуклин Кирилл Алесеевич,  
11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Шабрыкина Наталья Сергеевна,  
доцент ПНИПУ, к.ф.-м. н.

Пермь. 2012.

## Оглавление

Введение .....	3
Концептуальная постановка задачи .....	4
Математическая постановка задачи .....	6
Методы и результаты решения.....	9
Заключение .....	18
Список литературы .....	19
Приложение. Текст программы.....	20

## Введение

Человеческое тело – сложный механизм, состоящий более чем из двухсот костей, которые двигаются за счет слаженной работы множества мышц. Существует наука – биомеханика – изучающая движения человеческого тела. В современном мире биомеханика пользуется большим спросом: исследования в данной области применяются при создании протезов для людей с ограниченными возможностями. В спорте многое зависит не только от силы и выносливости, но и от высокого качества исполнения, поэтому в биомеханике выделен специальный раздел – биомеханика спорта, в котором ученые тщательно изучают движения спортсмена для нахождения оптимальных параметров и, как следствие, получения максимально возможного результата на соревнованиях.

Профессиональным легкоатлетам для достижения хороших результатов необходимо в совершенстве владеть техникой бега; при проектировании протезов нижних конечностей нужно создавать конструкцию таким образом, чтобы она была наиболее удобна для пациента. Все оптимальные параметры можно установить путем затратных экспериментов, а можно создать математическую модель нижних конечностей человека, сэкономив тем самым время и средства.

Целью данной работы является моделирование движения нижней конечности человека при приземлении из прыжков в фигурном катании. Фигурное катание относится к травмоопасным видам спорта и наибольшую опасность представляют прыжковые элементы. При приземлении из многооборотных прыжков кости и суставы ноги испытывают большие нагрузки. Математическое моделирование движения ноги при приземлении из прыжка может помочь тренерам и спортсменам выработать наименее опасную стратегию приземления.

## Концептуальная постановка задачи

В данной работе рассмотрена двухзвеньевая модель человеческого тела. С помощью данной модели можно получить оптимальные параметры прыжка и максимально допустимые нагрузки на суставы в фигурном катании.

При создании данной математической модели были приняты следующие допущения:

- Ограничения на гибкость суставов отсутствуют;
- Кости голени и бедра представлены абсолютно твёрдыми стержнями;
- Суставы представлены как шарниры, трение в которых отсутствует;
- Стопа рассматривается как материальная точка, потому что в фигурном катании она жестко зафиксирована коньком;
- Кости таза и тазобедренный сустав рассматриваются как материальная точка, в которой сосредоточена масса оставшейся части тела человека.

В модели рассматриваются:

- 1) Бедренная кость
- 2) Большеберцовая кость.

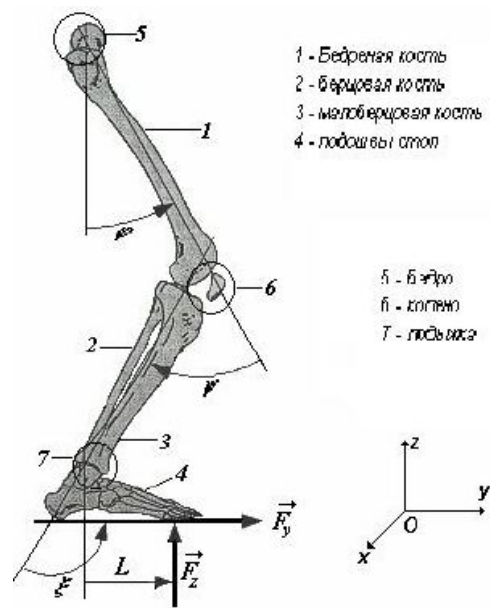


Рис. 1. Основные кости ноги человека.

## Математическая постановка задачи

Рассматриваемая двухзвеньевая модель изображена на рис. 2. Для описания движения модели используются обобщённые координаты  $q_1$  и  $q_2$ , которые представляют собой углы между звеньями ноги и вертикалью.

Кроме того на рис. 2 обозначается длина бедра  $l_1$ , длина голени  $l_2$ , расстояние  $r_1$  от тазобедренного сустава до точки  $S_1$ , в которой сосредоточена масса бедра (центр масс бедра), расстояние  $r_2$  от коленного сустава до точки  $S_2$ , в которой сосредоточена масса голени (центр масс голени).  $N_x$  и  $N_y$  - компоненты реакции опоры.

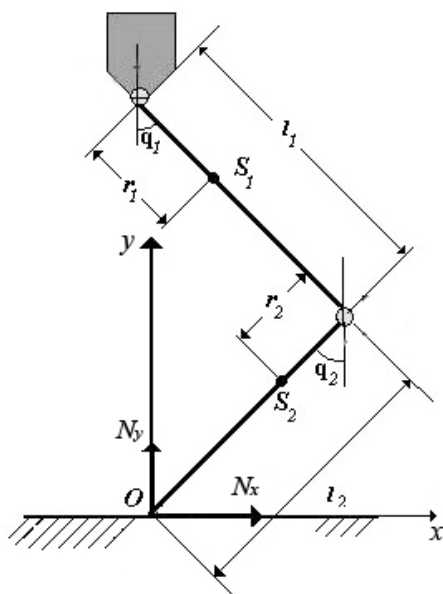


Рис. 2. Модель ноги человека.

На рис. 3а и рис. 3б многозвеньевая модель ноги разбивается на три части: бедро, голень и материальная точка, в которой сосредоточена масса всего остального тела.

Кроме того, на рисунках обозначены  $R_x$  и  $R_y$  - вертикальная и горизонтальная составляющие силы реакции в коленном суставе,  $F_x$  и  $F_y$  - вертикальная и горизонтальная составляющие силы реакции в тазобедренном суставе,  $N_x$  и  $N_y$  - вертикальная и горизонтальная составляющие реакции опоры.

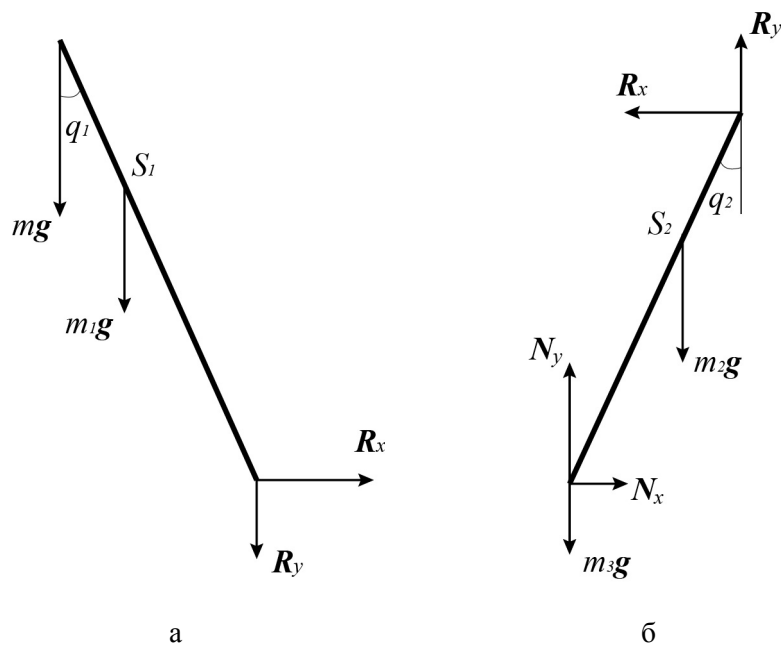


Рис. 3а, силы, действующие на бедро.

Рис. 3б, силы, действующие на голень.

Для каждой части конструкции можно записать второй закон Ньютона и уравнение вращательного движения.

Для бедра уравнения имеют вид:

$$m_1 \vec{a}_1 + m \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{R}_x + \vec{R}_y + m \vec{g}, \quad (1)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + m \ddot{x} = -R_x, \quad (2)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + m \ddot{y} = R_y - g(m_1 + m), \quad (3)$$

$$I_1 \ddot{q}_1 + m r_1^2 \ddot{q}_1 = r_1 (F_y \sin q_1 - F_x \cos q_1) + (l_1 - r_1)(R_x - R_y \sin q_1), \quad (4)$$

где координаты центра масс определяются формулами:

$$x_1 = l_2 \sin q_2 - (l_1 - r_1) \sin q_1, \quad (5)$$

$$y_1 = l_2 \cos q_2 + (l_1 - r_1) \cos q_1, \quad (6)$$

$$y = l_2 \cos q_2 + l_1 \cos q_1, \quad (7)$$

$$x = l_2 \sin q_2 - l_1 \sin q_1 \quad (8)$$

Для голени уравнения имеют вид:

$$(m_2 + m_3) \vec{a}_2 = \vec{N}_x + \vec{N}_y + \vec{R}_x + \vec{R}_y + (m_2 + m_3) \vec{g}, \quad (9)$$

$$(m_2 + m_3) \ddot{x}_2 = R_x + N_x, \quad (10)$$

$$(m_2 + m_3) \ddot{y}_2 = N_y - R_y - (m_2 + m_3)g, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 (I_2 + m_3 (l_2 - r_2)^2) = (l_2 - r_2) ((N_y - m_3 g) \sin q_2 - N_x \cos q_2) + \\ + r_2 (R_x \cos q_2 + R_y \sin q_2) \end{aligned} \quad (12)$$

где координаты центра масс голени определяются формулами:

$$x_2 = (l_2 - r_2) \sin q_2, \quad (13)$$

$$y_2 = (l_2 - r_2) \cos q_2. \quad (14)$$

Из уравнений (2), (8), (14) и (3), (9), после преобразований получается:

$$N_x = (m_2 + m_3) \ddot{x}_2 + m a_x + m_1 \ddot{x}_1, \quad (15)$$

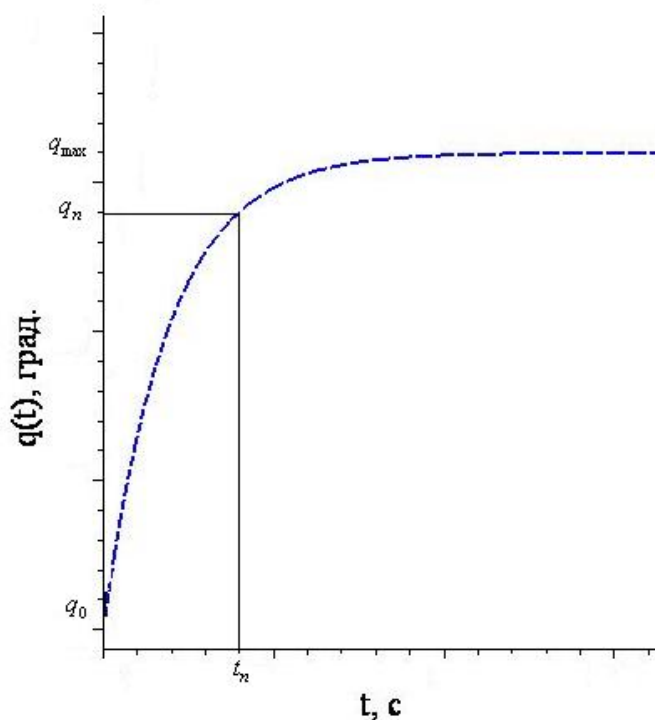
$$N_y = (m_2 + m_3) \ddot{y}_2 + (m_2 + m_3)g + m_1 \ddot{y}_1 + m_1 g + m g. \quad (16)$$

Данные реакции подставляются в уравнения (4) и (10).



## Методы и результаты решения

С помощью представленной выше модели ноги можно решать несколько типов задач, например задачи о прыжках, падениях или приземлениях из прыжков. Целью данной работы является исследование приземления при прыжках в фигурном катании. При этом по известным зависимостям углов  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  находятся сила реакции опоры и нагрузки на суставы. Зависимость изменения углов от времени определяется функцией  $q(t) = a + be^{-ct}$ , где коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  определяются следующим образом:  $a = q_{\max}$ ,  $b = q_0 - q_{\max}$ ,  $c = -\frac{1}{t_n} \ln\left(\frac{q_n - q_{\max}}{q_0 - q_{\max}}\right)$ , где  $q_n$  - известное значение угла в момент времени  $t_n$ ,  $q_0$  и  $q_{\max}$  начальные и конечные значения углов.



Полученные данные позволяют выработать наиболее безопасную для фигуриста стратегию приземления.

Из представленных выше уравнений (15), (16) можно определить реакции опоры. Из уравнений (4), (9) можно определить реакции в коленном суставе  $R_x$ ,  $R_y$ .

Для нахождения неизвестных реакций необходимо знать зависимости углов  $q_1$ ,  $q_2$  от времени. Они получены из экспериментальных данных [2, 4]. Кроме того, из литературных данных [6] взяты значения масс, длин, положения центров масс, моментов инерции сегментов человеческого тела (Таблица 1).

Таблица 1. Масс-инерционные характеристики частей тела человека

Величина	Значение	Единица измерения
Рост	1,75	м
Масса тела	75,21	кг
Масса бедра	14,17	кг
Масса голени	4,33	кг
Масса стопы	1,37	кг
Длина бедра	0,49	м
Длина голени	0,45	м
Положение центра масс бедра (величина $r_1$ )	45,5	% от длины сегмента тела
Положение центра масс голени (величина $r_2$ )	40,5	% от длины сегмента тела
Момент инерции бедра	0,2085	кг·м <sup>2</sup>
Момент инерции голени	0,0386	кг·м <sup>2</sup>

Уравнения (4), (9), (15), (16) были решены аналитически с помощью математического пакета Maple 14 [5]. Текст программы приведен в приложении.

На рис. 4 показаны зависимости углов от времени для типичного приземления из одинарного прыжка. На рис. 5, 6 представлены зависимости от времени реакции опоры и реакции в коленном суставе. На рис. 7 представлена зависимость от времени перегрузки в коленном суставе.

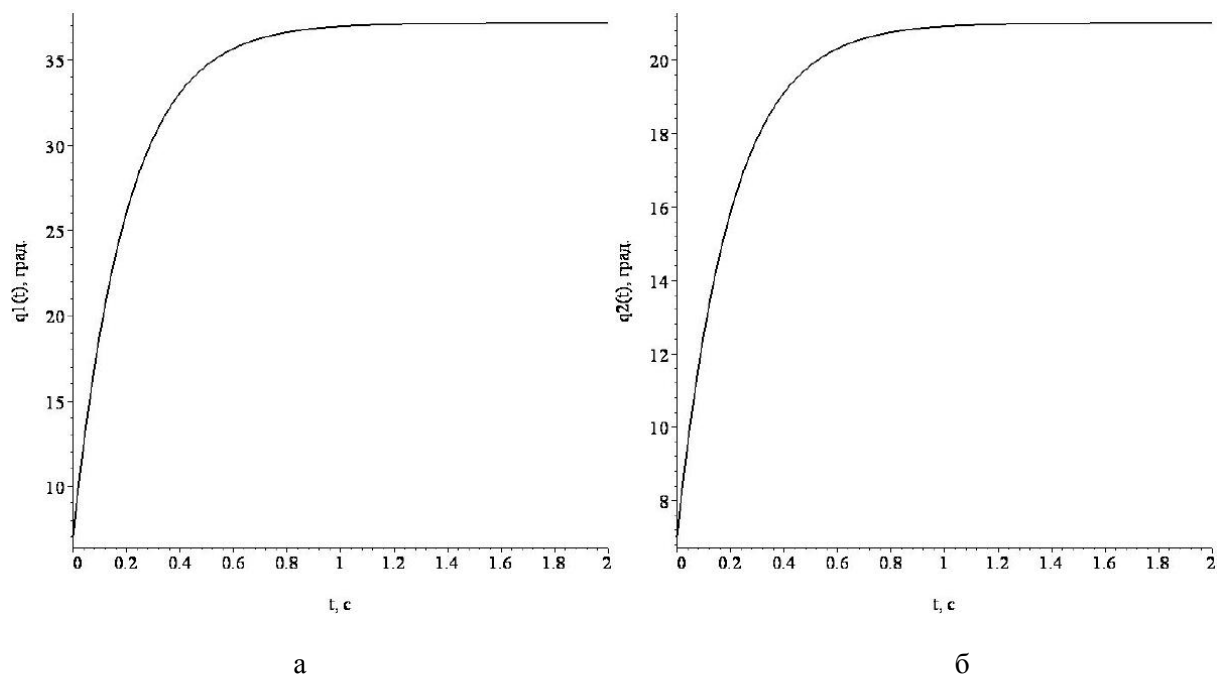


Рис.4. Зависимости углов наклона бедра (а) и голени (б) от времени для одинарного прыжка.

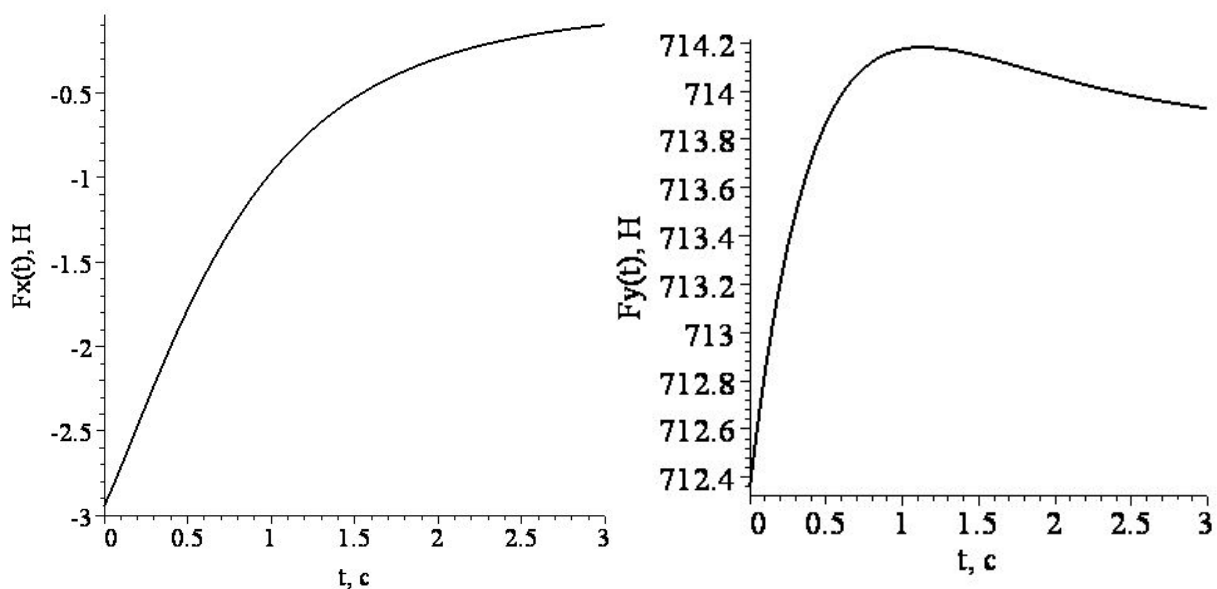


Рис.5. Зависимости компонент силы реакции опоры от времени для одинарного прыжка.

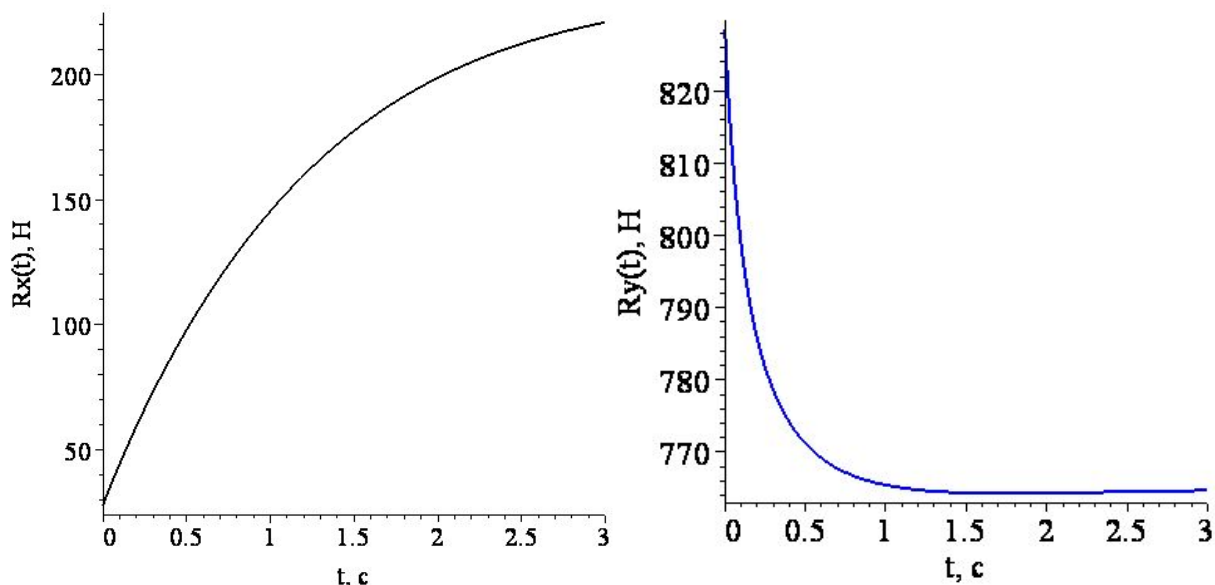


Рис.6. Зависимости компонент силы реакции в коленном суставе от времени для одинарного прыжка.

На рис. 6 видно, что наибольшая вертикальная составляющая реакции опоры в суставе возникает в момент приземления фигуриста, а наибольшая горизонтальная составляющая реакции опоры в суставе возникает уже тогда, когда наклон бедра и голени человека перестают изменяться. После «фиксации» фигуристом бедра и голени на графиках видно, что горизонтальная и вертикальная составляющая реакции в суставе выходят на постоянные значения.

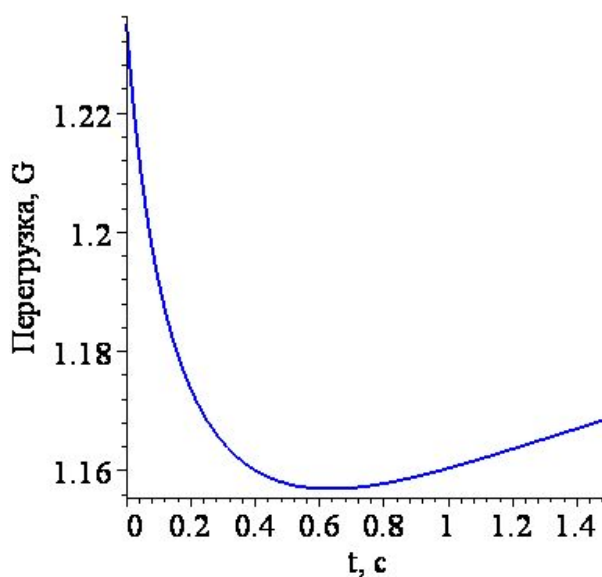


Рис.7. Зависимость перегрузки в коленном суставе от времени для одинарного прыжка.

На представленном графике зависимости перегрузки от времени (рис. 7) видно, что наибольшее значение перегрузки достигается в момент приземления фигуриста, хотя в данный момент времени горизонтальная составляющая реакции опоры была достаточно мала (рис. 6а). Однако если сравнить порядок величины  $R_x$  и  $R_y$ , то становится понятным, почему перегрузка максимальна именно в момент приземления.

На рис. 8 показаны зависимости углов от времени для неудачного приземления из тройного прыжка. На рис. 9, 10 представлены зависимости от времени реакции опоры и реакции в коленном суставе. На рис. 11 представлена зависимость от времени перегрузки в коленном суставе.

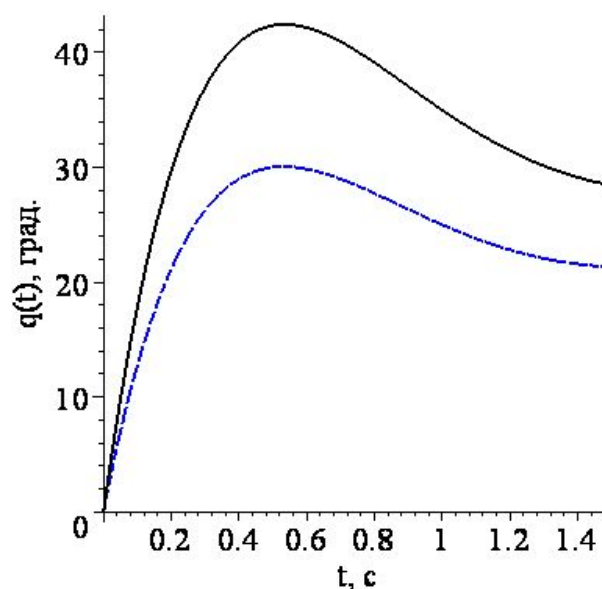


Рис.8. Зависимости углов наклона бедра (пунктирная линия) и голени (сплошная линия) от времени для неудачного прыжка.

Данный график зависимости углов от времени показывает то, что фигурист в момент приземления сильно подсаживается, после чего пытается приподняться. Момент максимального приседа соответствует абсциссе максимумов функций.

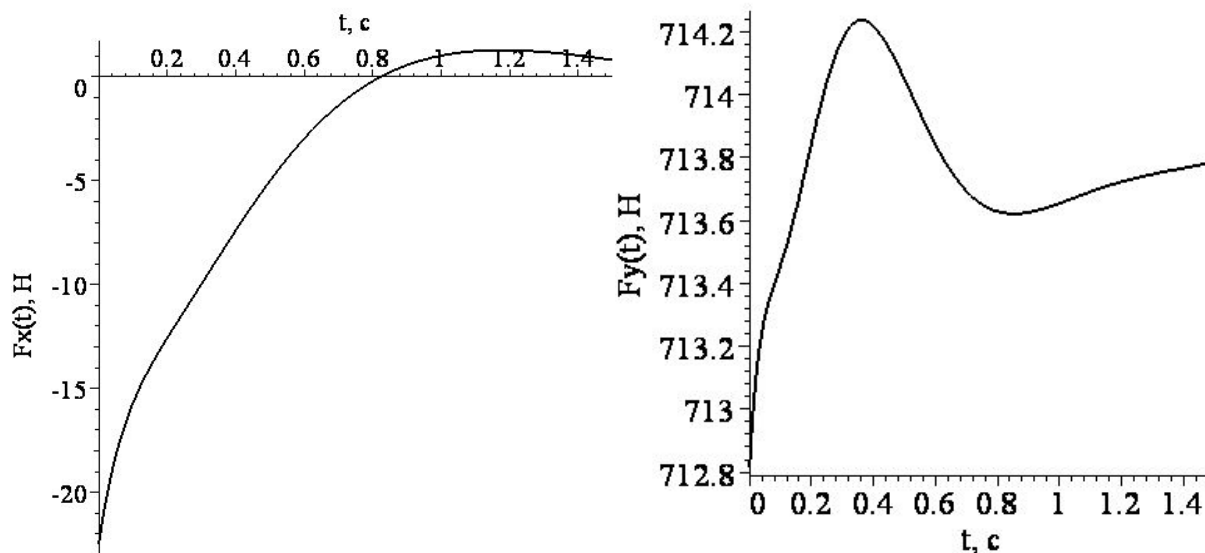


Рис.9. Зависимости компонент силы реакции опоры от времени для неудачного выезда.

На рис. 9б видно, что реакция опоры от времени достигает своего наибольшего значения именно в момент приседа фигуриста.

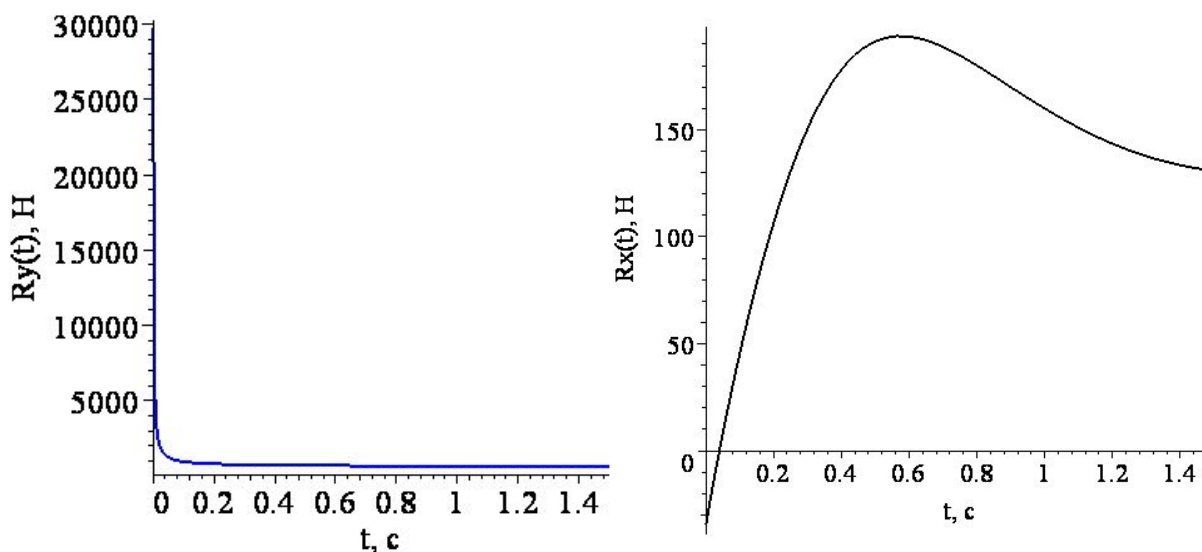


Рис.10. Зависимости компонент силы реакции в коленном суставе от времени для тройного прыжка.

Однако, как видно на рис. 10 реакция сустава непосредственно и напрямую не зависит от реакции опоры. Максимальная горизонтальная составляющая реакции в суставе достигает наибольшего значения в момент приземления. Большой порядок величины  $R_y$  объясняется тем, что, как видно на рис. 8, в момент приземления оба сегмента модели были

перпендикулярны поверхности, на которую приземляется фигурист, то есть фигурист приземляется на прямые ноги. График  $R_x$  достигает своего наибольшего значения в момент времени, когда фигурист окончательно подсел и начинает стараться приподняться. Как можно увидеть на рис. 6а в случае типичного ординарного прыжка этого не происходит, так как фигурист старается фиксировать положение сегментов ноги.

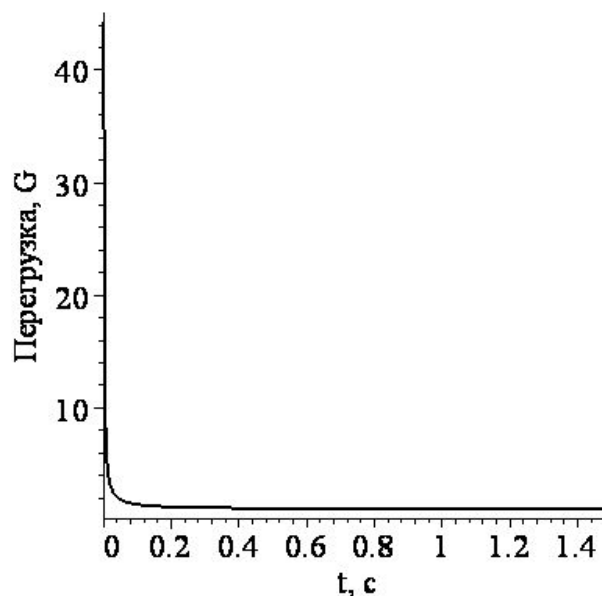


Рис.11. Зависимость перегрузки в коленном суставе от времени для тройного прыжка.

Поведение графика зависимости перегрузки на рис. 11 схоже с поведением перегрузки на рис. 7. Основное отличие лишь в порядке величины, однако, как было сказано выше, столь большая перегрузка возникает из-за того, что фигурист пытается приземлиться на прямые ноги.

В представленной ниже таблице приведены результаты исследования значения сил и перегрузки, полученные с помощью математической модели, при типичных одинарных, двойных и тройных прыжках, используемых в фигурном катании.

Таблица 2. Значения сил и перегрузки, полученные с помощью математической модели.

Вид прыжка	Начальный угол (град)	Конечный угол между бедром и вертикалью (град)	Конечный угол между голенью и вертикалью (град)	Время достижения конечных углов (с)	Реакция в коленном суставе (Н)	Перегрузка (G)
Одинарный прыжок	3	35	20	0.53	2642	3.9
	7			0.53	1364	2
	10			0.53	1065	1.6
Двойной прыжок	3	42	25	0.53	4097	6.1
	7			0.53	1876	2.8
	10			0.53	1388	2
Тройной прыжок	3	45	50	0.41	12665	18.9
				0.51	8443	12.6
				0.61	6121	9.1
	7	45	50	0.41	5198	7.74
				0.51	3617	5.39
				0.61	2748	4
	10	45	50	0.41	3531	5.3
				0.51	2540	3.8
				0.61	1995	2.9

В ходе исследования варьировались такие величины, как время достижения максимального угла и начальные углы. В результате стало известно, что какой ни был бы прыжок, чем больше угол сегмента относительно вертикали при приземлении, тем «комфортнее» будет само приземление. Время достижения максимального угла изменялось только при тройном прыжке, так как это самый технически трудновыполнимый из прочих представленных прыжков. В результате исследования было так же



получено, что чем медленнее фигурист пытается присесть после прыжка, тем меньше наибольшее значение перегрузки в коленном суставе.

## Заключение

В результате проделанной работы была построена математическая модель движения человеческой ноги при приземлении из прыжка в фигурном катании. Для описания движения ноги человека для каждого из сегментов были составлены дифференциальные уравнения, представляющие собой II закон Ньютона и основное уравнения динамики вращательного движения. Данные уравнения были решены аналитически с помощью математического пакета. При этом из литературных данных были взяты массы сегментов тела и их линейные размеры, время приземления и зависимости углов от времени. В результате были получены зависимости внешних сил и реакций в суставе от времени при различных стратегиях приземления фигуриста. Было выявлено, что чем больше группируется человек во время приземления, тем безопасней получается приземление. Так же было выявлено, что чем медленней углы между сегментами и вертикалью достигают наибольшего значения, тем меньше перегрузка, возникающая в суставе, то есть плавность приземления фигуриста так же играет важную роль. Опираясь на полученные в ходе исследования результаты, была составлена общая концепция наиболее безопасной стратегии приземления.

## Список литературы

1. From a One-Legged Vertical Jump to the Speed-Skating Push-off. A Simulation Study / M.F. Bobbert, H. Houdijk, J.J. de Koning, G. de Groot // Journal Of Applied Biomechanics, 2002, 18, 28-45
2. Kinematic characteristics of impact absorption during landings of multi-revolution jumps in figure skating / K.L. Lockwood, J.P. Baudin & P.L. Gervais // ISBS Symposium, 1995, 236-239.
3. The Biomechanical Analysis of Standing Fall / M. Barbuceanu, D. Barbuceanu, D. Giosanu, I. Iorga-Simăn // Rom. Journ. Phys., Volume 51, Nos. 3–4, P. 379–389, Bucharest, 2006.
4. Variation in landing during gymnastic skills / Karen T Beatty, Andrew S McIntosh and Bertrand O Frechede // ISBS Symposium 2007, Ouro Preto – Brazil.
5. Дьяконов В. Maple: учебный курс. – СПб., 2001.
6. Зациорский В.М. и др. Биомеханика двигательного аппарата человека. – М.: Физкультура и спорт, 1981. – 143 с.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М., 1963.

## Приложение. Текст программы

```
> restart;
> r1:=0.22295; r2:=0.18225; m1:=14.17; m2:=4.33; m3:=2.37; m:=54.34;
J1:=0.2085; J2:=0.0386; l1:=0.49; l2:=0.45;
g:=9.8; t1:=3; ax:=0; ay:=9.8; q01:=10; q1(inf):=43; tn1:=0.53; qn1:=42;
q02:=q01; q2(inf):=26; tn2:=tn1; qn2:=25;
> b:=q01-q1(inf); a:=q1(inf); c:=-1/tn1*ln((qn1-q1(inf))/(q01-q1(inf)));
d:=q02-q2(inf); e:=q2(inf); f:=-1/tn2*ln((qn2-q2(inf))/(q02-q2(inf)));
>q01:=(a+b*exp(-c*t)); q02:=(e+d*exp(-f*t)); q1(t):=(a+b*exp(-c*t))*Pi/180;
q2(t):=(e+d*exp(-f*t))*Pi/180;
>plot({q02,q01},t=0..t1,labels=["t,c","q(t),град."],font=["TIMES","ROMAN",1
6],linestyle=[solid,dash],labeldirections=[horizontal,vertical],color=[black,blue],
thickness=2);
> x2:=(l2-r2)*sin(q2(t)); y2:=(l2-r2)*cos(q2(t));
x1:=l2*sin(q2(t))-(l1-r1)*sin(q1(t)); y1:=l2*cos(q2(t))-(l1-r1)*cos(q1(t));
x:=l2*sin(q2(t))-l1*sin(q1(t)); y:=l2*cos(q2(t))+l1*cos(q1(t));
> Fy:=m1*diff(y1,t$2)+m2*diff(y2,t$2)+g*(m1+m2+m):
Fx:=m1*diff(x1,t$2)+m2*diff(x2,t$2):
plot(Fx,t=0..t1,labels=["t,c","Fx(t),H"],font=["TIMES","ROMAN",16],linestyle
=[solid],labeldirections=[horizontal,vertical],color=[black],thickness=2);
plot(Fy,t=0..t1,labels=["t,c","Fy(t),H"],font=["TIMES","ROMAN",16],linestyle
=[solid],labeldirections=[horizontal,vertical],color=[black],thickness=2);
>eq1:=-1/tn2*(J2+m3*(l2-r2)^2)*diff(q2(t),t$2)=(l2-r2)*(Fx*cos(q2(t))-
Fy*sin(q2(t)))+r2*(Rx*cos(q2(t))+Ry*sin(q2(t)))+m3*g*(l2-r2)*sin(q2(t)):
eq2:=(J1+m*r1^2)*diff(q1(t),t$2)=m*g*r1*sin(q1(t))+(l1-r1)*(Rx*cos(q1(t))-
Ry*sin(q1(t))):
> sol:=solve({eq1,eq2},{Rx,Ry}):
R_x:=eval(Rx,sol); R_y:=eval(Ry,sol):
```

```

>plot(R_x,t=0..t1,labels=["t,c","Rx(t),H"],font=["TIMES","ROMAN",16],linest
yle=[solid],labeldirections=[horizontal,vertical],color=[black],thickness=2);
plot(R_y,t=0..t1,labels=["t,c","Ry(t),H"],font=["TIMES","ROMAN",16],linestyl
e=[solid],labeldirections=[horizontal,vertical],color=[blue],thickness=2);
>N0:=g*(m+m1);          Nk:=sqrt(R_x^2+R_y^2);          p:=Nk/N0:
plot(p,t=0..t1,labels=["t,c","Перекрытка,G"],font=["TIMES","ROMAN",16],lin
estyle=[solid],labeldirections=[horizontal,vertical],color=[blue],thickness=2);
plot(Nk,t=0..t1);
> pm:=eval(p,t=0); Nm:=eval(Nk,t=0);

```