

Краевая научно-практическая конференция учебно-исследовательских и  
проектных работ учащихся 6-11 классов  
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

**УМК «Живая математика» и ЕГЭ**

Анферов Егор Павлович,  
Арисов Ильнур Азатович,  
11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Шабрыкина Наталья Сергеевна,  
к.ф.-м.н., доцент ПНИПУ

Пермь. 2013.

## Введение

В наше время изучение стереометрии вызывает трудности у большинства учащихся. Наиболее очевидная причина этого заключается в том, что формулировки и доказательства не выводятся учениками в процессе работы, а заучиваются. Многие идеологи современного образования считают, что факты, открытые учащимися самостоятельно, усваиваются ими лучше, чем преподнесенные учителем в готовом виде. Большую роль в изменении содержания и стиля преподавания играют компьютерные технологии. Современный компьютерный чертеж можно тиражировать, деформировать, перемещать и видоизменять. Элементы чертежа легко измерить компьютерными средствами, а результаты этих измерений допускают дальнейшую компьютерную обработку.

В основе нашей работы лежит использование такого учебно-методического комплекса, как "Живая математика". При помощи такой программы преподаватель может наглядно решать различные задачи и доказывать теоремы ученикам, затрачивая при этом минимальное количество усилий, но получая максимальный результат.

Но все-таки, данная работа предназначена в помощь ученикам при изучении стереометрии, той части школьной математики, которая вызывает наибольшие трудности. Обычному, среднестатистическому ученику старших классов сложно дается стереометрия. Обозначим проблемы. В первую очередь, сложности в освоении связаны с представлением объемных фигур в пространстве, особенно выполнение действий над сложными объектами. Иначе говоря, ученик имеет плохое пространственное мышление. Во-вторых, многократное исправление задачи запутывает, а изменения, дополнительные построения и обозначения загромождают первоначально рассматриваемый объект.

При использовании компьютерной программы предназначенной для построения стереометрических фигур, учащиеся получают изображение пространственной фигуры, являющееся объектом и инструментом, и средой

конструирования и исследования. Такие модели сочетают в себе двумерное и трехмерное представление фигуры в одном изображении. Это достигается за счет возможности произвольного изменения ракурса, а также других эффектов трехмерной графики. Работа в такой "квазитрехмерной среде" - это уникальное средство развития пространственного воображения, навыка являющегося важнейшей предпосылкой и результатом успешного изучения стереометрии, решения стереометрических задач.

В данной работе необходимо пройти освоить программу "Живая математика", сформировать набор шаблонов, построить трехмерные объекты и записать инструкции для их построения, провести классификацию типичных задач ЕГЭ и оформить решение нескольких из них.

### **Программы для построения чертежей**

Существуют различные программы для построения чертежей: AutoCAD, Ozz Digital, Ashlar Vellum Graphite. AutoCAD и Ozz Digital имеет возможности построения различных чертежей для строительной деятельности, часто используются для проектирования зданий, и других строительных объектов. Ashlar Vellum Graphite - это профессиональная программа для создания чертежей и схем. Она предназначена для инженеров-конструкторов, учащихся ВУЗов и всех, кто сталкивается с необходимостью подготовить те или иные чертежи. Проблемы этих программ заключаются в том, что все они предназначены для профессиональной деятельности и являются платными для учебных заведений.

Модуль "Живая математика" прост и удобен в освоении, бесплатен для учебных заведений, поэтому в работе используется именно он.

В данной работе будут рассматриваться задания ЕГЭ части С, связанные со стереометрией, в частности задания С2.

## Возможности комплекса «Живая Математика»

Учебно-методический комплекс «Живая Математика» (Общий вид программы приведен на Рис.1) имеет массу возможностей, которые пригодятся школьнику и студенту. Перечислим некоторые из них:

- Построения основных геометрических объектов: точек, отрезков, прямых, лучей, дуг и окружностей (Рис.1). На основе этих элементов можно построить любые сложные фигуры.
- Ввод текста (Рис.1).
- Анимация объектов.
- Создание инструментов для последующего их использования (Рис.1).
- Создание кнопок.
- Построение системы координат. Задание множества функций и построение их графиков.

С геометрическими объектами можно выполнять различные действия:

- Построение биссектрисы угла (Рис.2).
- Построение параллельных прямых и перпендикуляров через точку (Рис.2).
- Измерение длины отрезка, угла, периметра, площади, длины окружности, расстояния между точками и любыми другими геометрическими объектами, угловой меры дуги, длины дуги (Рис.3).

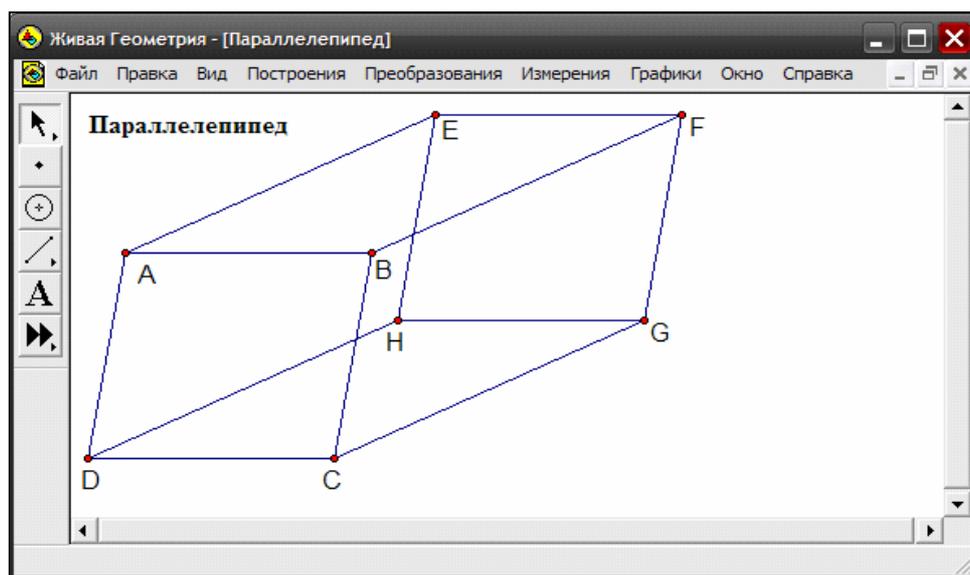


Рис. 1. Общий вид программы.

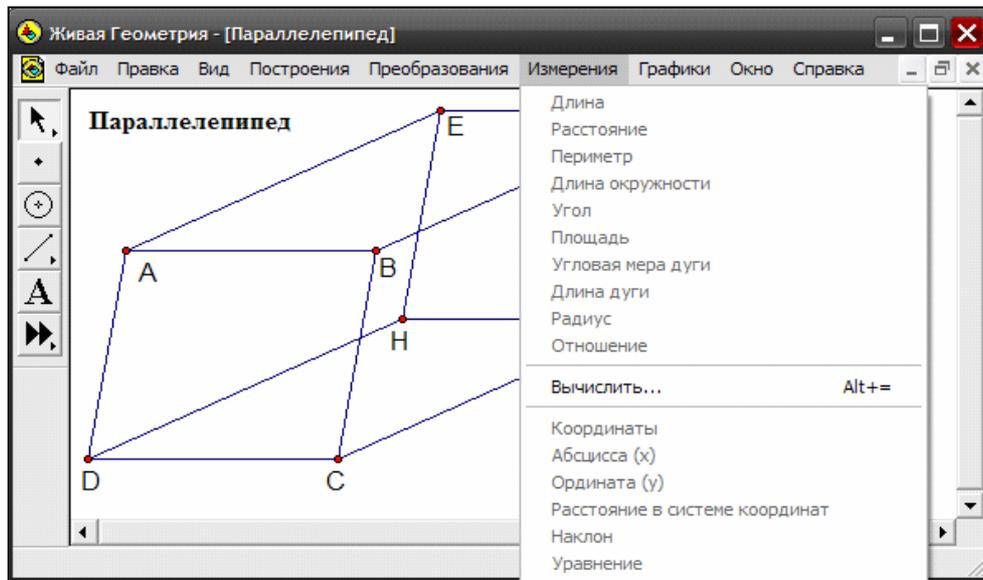


Рис. 2. Меню Измерения.

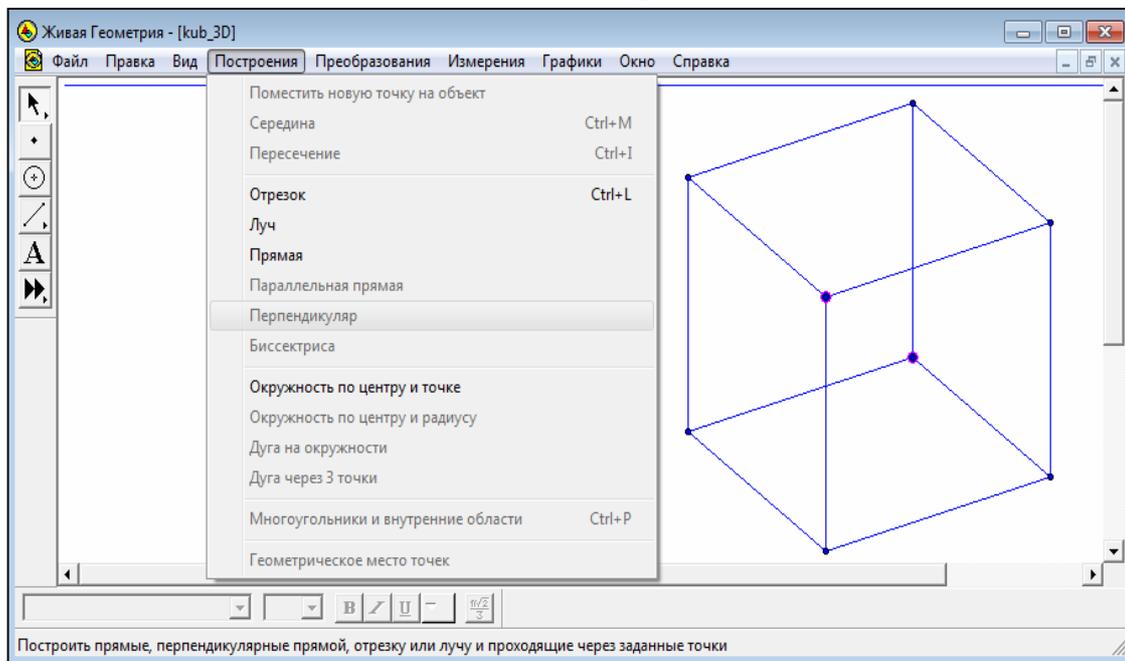


Рис. 3. Меню Построения.

## Построение объемных тел

Выше были описаны основные возможности комплекса «Живая математика», но для решения реальных задач необходимы некоторые шаблоны объемных тел. В данной работе были построены: куб, прямоугольный параллелепипед, правильные треугольные, четырехугольные и шестиугольные пирамиды и призмы. Построение этих тел не так-то просто поэтому в данной работе использовались заранее построенные трехмерные системы координат: «Coordinate frame» (Рис.4). Далее будут рассмотрены алгоритмы построения этих тел.

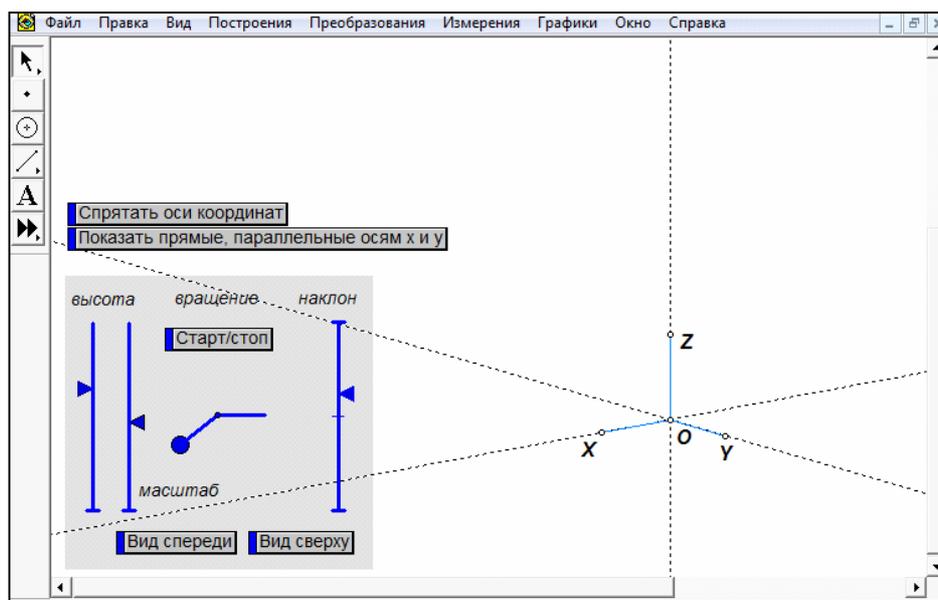


Рис.4. Оси координат.

## Построение куба

- Постройте две окружности с центром в начале координат и радиусами равными единичным отрезкам на осях  $OX$  и  $OY$ .
- Постройте точки на пересечениях построенных окружностей и соответствующих им осей.
- Скройте окружности и построьте прямые, параллельные осям  $OX$  и  $OY$ , через точки из пункта 2,  $X$  и  $Y$ .
- Постройте точки на пересечении прямых из предыдущего пункта, скройте эти прямые и точки из пункта 2.
- Постройте отрезки по точкам, полученным в пункте 4, чтобы получился квадрат.
- Сделайте **Преобразование/Гомотетию** точки  $Z$  относительно точки  $O$  в отношении  $2/1$ .
- Постройте диагонали квадрата из пункта 5.
- Постройте через точку из пункта 6 прямые, параллельные этим диагоналям.
- Через вершины квадрата постройте прямые, параллельные оси  $OZ$ .
- Постройте точки на пересечении прямых из пунктов 8 и 9.

- Скройте диагонали квадрата и все прямые, чтобы остался только нижний квадрат, его вершины и точки из пункта 10.
- Соедините все точки, чтобы получился куб (Рис.5).

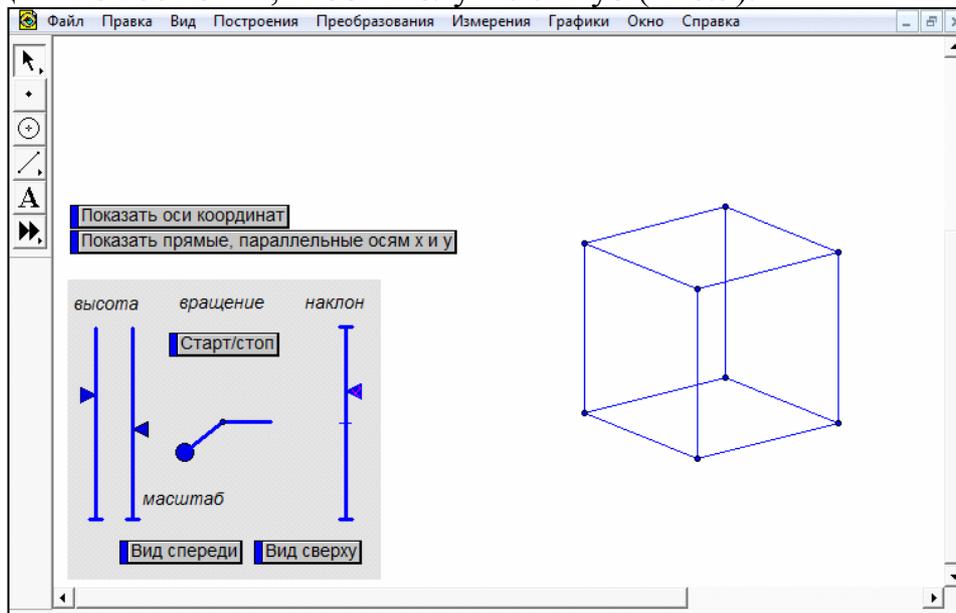


Рис.5. Куб.

### Построение правильной четырехугольной пирамиды

- Прodelайте все шаги до 5 из построения куба.
- Постройте произвольную точку на оси Z.
- Соедините эту точку со всеми вершинами квадрата так, чтобы получилась пирамида (Рис.6).

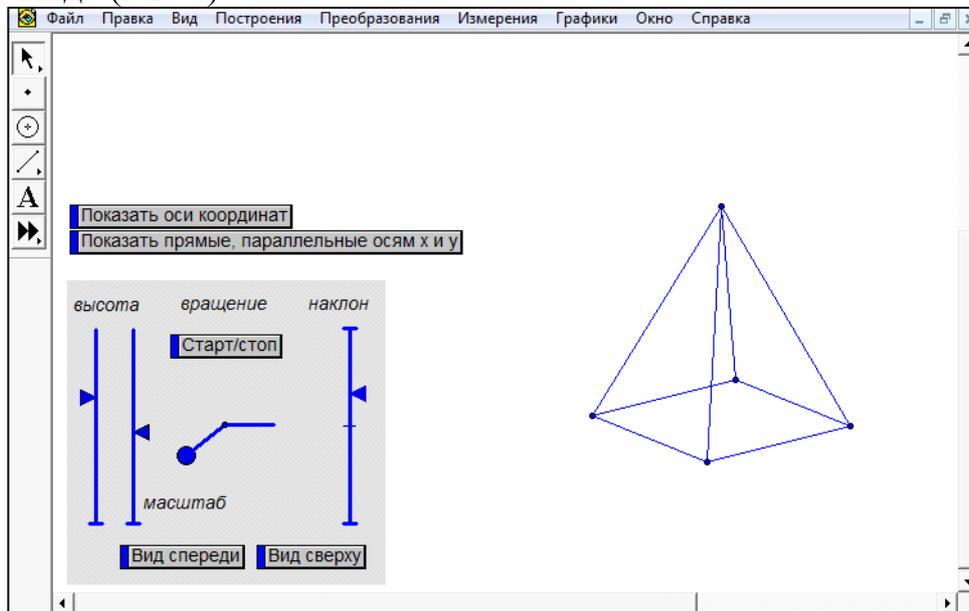


Рис.6. Правильная четырехугольная пирамида.

### Построение правильной треугольной пирамиды

- Измерьте  $\text{tg}(60)$

- Сделайте **Преобразование/гомотетию** точки  $Y$  относительно точки  $O$  в отношении равном  $\text{tg}(60)$ .
- Постройте окружность с центром в начале координат и радиусом  $OX$ .
- Постройте точку на пересечении окружности и оси  $X$ .
- Скройте окружность.
- Постройте отрезки, соединяющие точку из пункта 2 с точкой  $X$  и точкой из пункта 4.
- Постройте произвольную точку на оси  $Y$  в положительном направлении.
- Сделайте гомотетию этой точки относительно точки  $O$  в отношении минус  $1/2$ .
- Через точку из пункта 7 постройте прямые, параллельные отрезкам из пункта 6.
- Через точку, полученную в пункте 8, постройте прямую параллельную оси  $X$ .
- Постройте точки на пересечении прямых из пункта 9 и прямой из пункта 10.
- Скройте все, чтобы остались оси координат, и точки из пунктов 11 и 7.
- Постройте произвольную точку на оси  $Z$ .
- Соедините точки из пунктов 11, 7 и 13 так, чтобы получилась правильная треугольная пирамида (Рис.7).

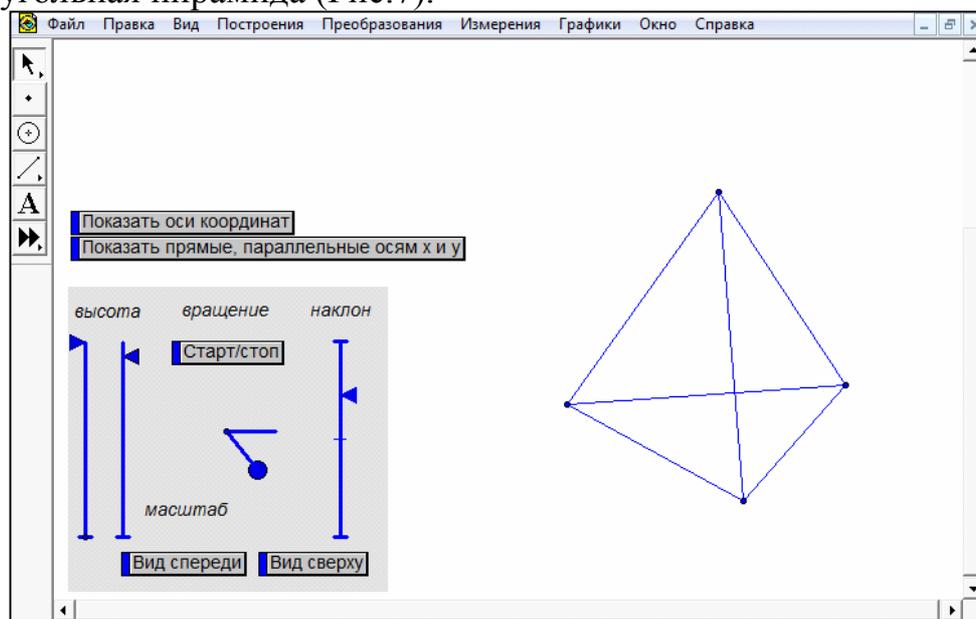


Рис.7. Правильная треугольная пирамида.

### Построение правильной треугольной призмы

- Прodelайте все шаги до 12 в построении правильной треугольной пирамиды.
- Соедините точки из пункта 12.
- Постройте через точки из пункта 12 прямые, параллельные оси  $Z$ .
- На прямой, пересекающей ось  $Y$ , постройте произвольную точку.
- Через точку из пункта 4 постройте прямые, параллельные двум сторонам треугольника.

- Постройте точки на пересечении прямых из пунктов 3 и 5.
- Спрячьте все прямые.
- Соедините вершины треугольника и точки из пунктов 4 и 6, так чтобы получилась **правильная треугольная призма** (Рис.8).

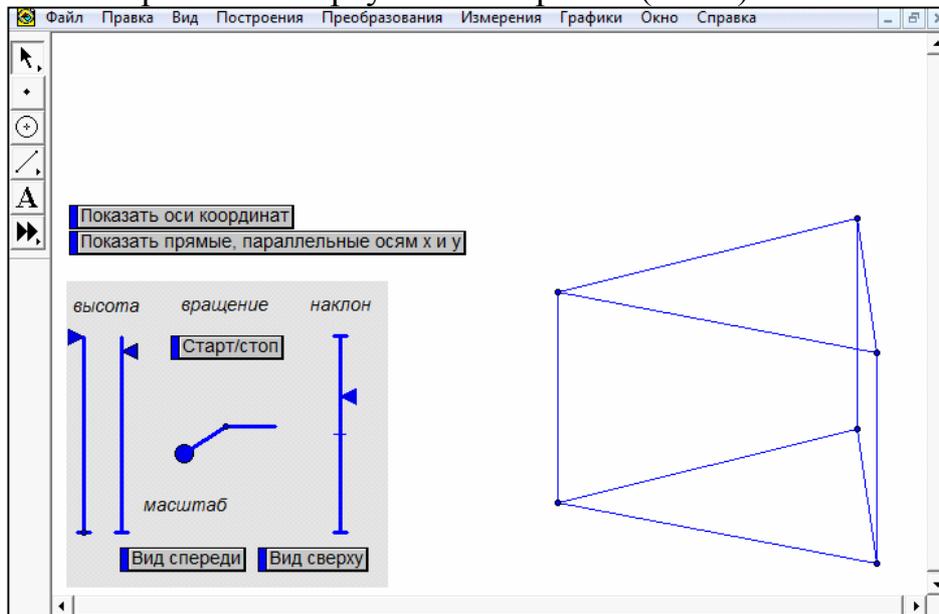


Рис.8. Правильная треугольная призма.

### **Построение правильной шестиугольной пирамиды**

- Прodelайте все шаги до 12 из построения правильной треугольной пирамиды.
- Постройте прямые, соединяющие точку  $O$  и точки из пункта 11.
- Постройте три окружности с центром в начале координат и радиусами равными расстоянию от начала координат до вершин треугольника.
- Постройте точки на пересечениях окружностей и соответствующих им прямых, на которых брались радиусы.
- Скройте все, оставив только вершины треугольника и точки из пункта 4.
- Соедините вершины, чтобы получился шестиугольник.
- Постройте точку на оси  $Z$ .
- Постройте отрезки, соединив построенную точку с вершинами шестиугольника так, чтобы получилась правильная шестиугольная пирамида (Рис.9).

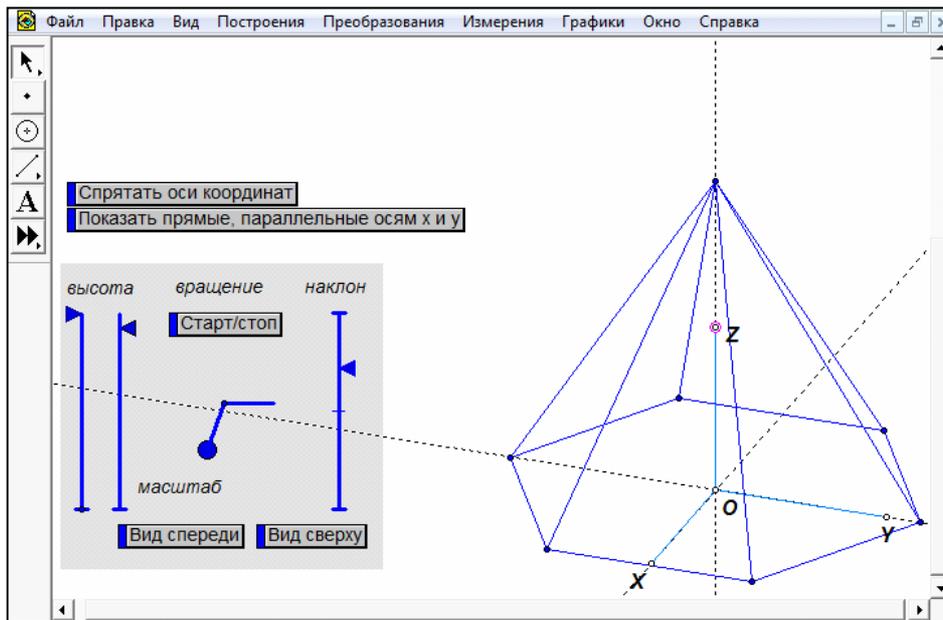


Рис.9. Правильная шестиугольная пирамида.

### Построение правильной шестиугольной призмы

- Прodelайте все шаги до 6 из построения правильной шестиугольной призмы.
- Постройте через вершины шестиугольника прямые, параллельные оси  $Z$ .
- На прямой, пересекающей ось  $Y$ , постройте произвольную точку.
- Через эту точку проведите прямые параллельные смежным сторонам шестиугольника, лежащего в основании.
- Поставьте пересечения этих прямых как у основания.
- Спрячьте все объекты кроме точек пересечения (вершин оснований).
- Соедините вершины оснований отрезками так, чтобы получилась правильная шестиугольная призма.

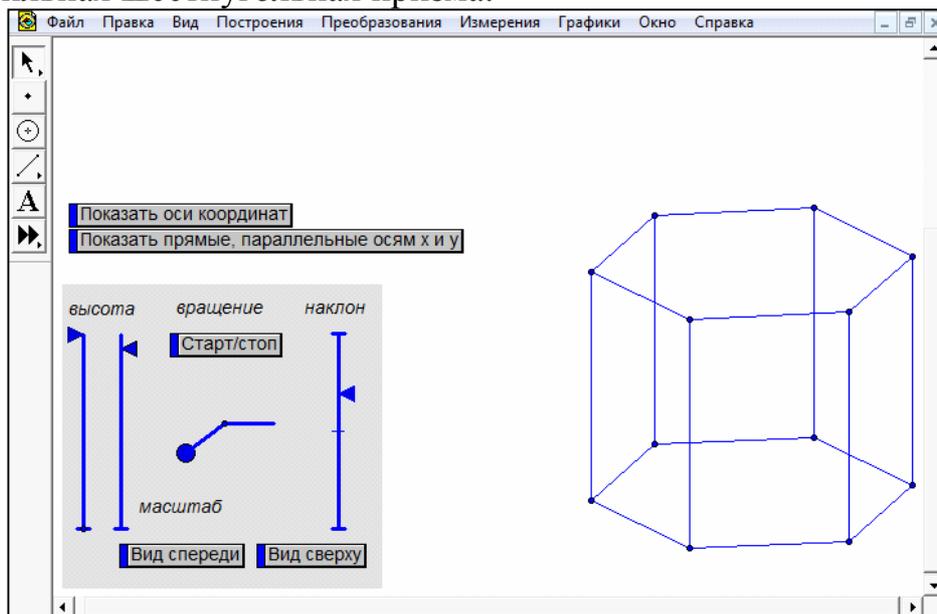


Рис.10. Правильная шестиугольная призма.

## **Классификация задач ЕГЭ**

Задачи на нахождение углов и расстояний в пространстве:

1. Найти угол между двумя прямыми.
2. Найти угол между прямой и плоскостью.
3. Найти угол между двумя плоскостями.
4. Найти расстояние между точкой и прямой.
5. Найти расстояние между двумя прямыми.
6. Найти расстояние между прямой и плоскостью.
7. Найти расстояние между двумя плоскостями.

## Решение задач ЕГЭ

Рассмотрим

задачи

C2

ЕГЭ:

1) В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A'B'C'D'$   $AB=1$ ,  $AD=AA'=2$ .  
Найдите угол между прямой  $AB'$  и плоскостью  $ABC'$ .

В решении задачи можно открывать ход решения и построения постепенно, а также вращать фигуру в трехмерной системе координат:

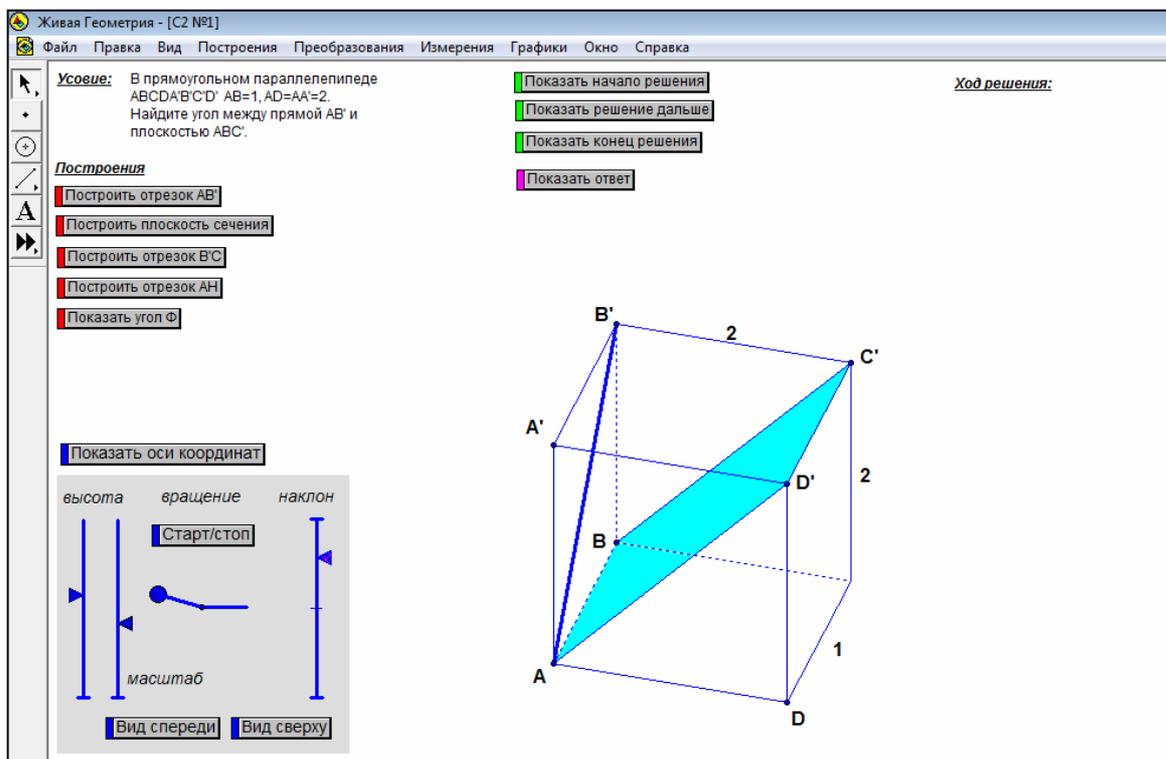


Рис.11. Условия задачи.

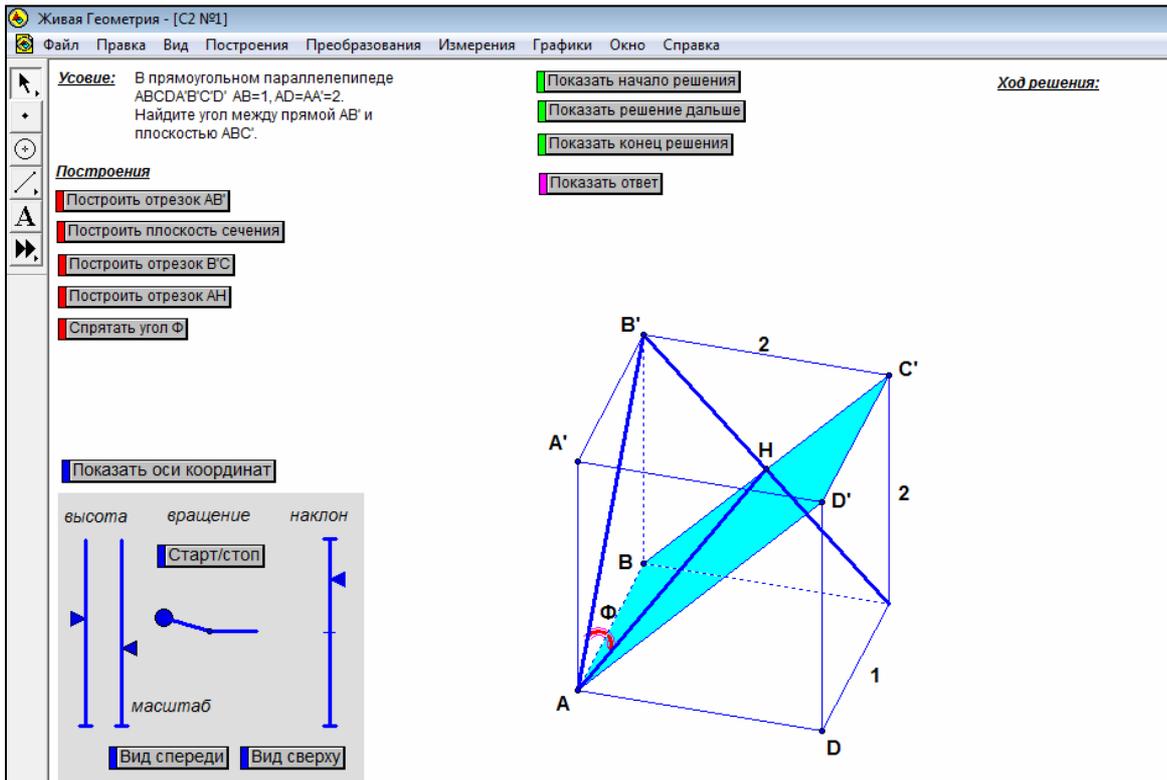


Рис.12. Дополнительные построения.

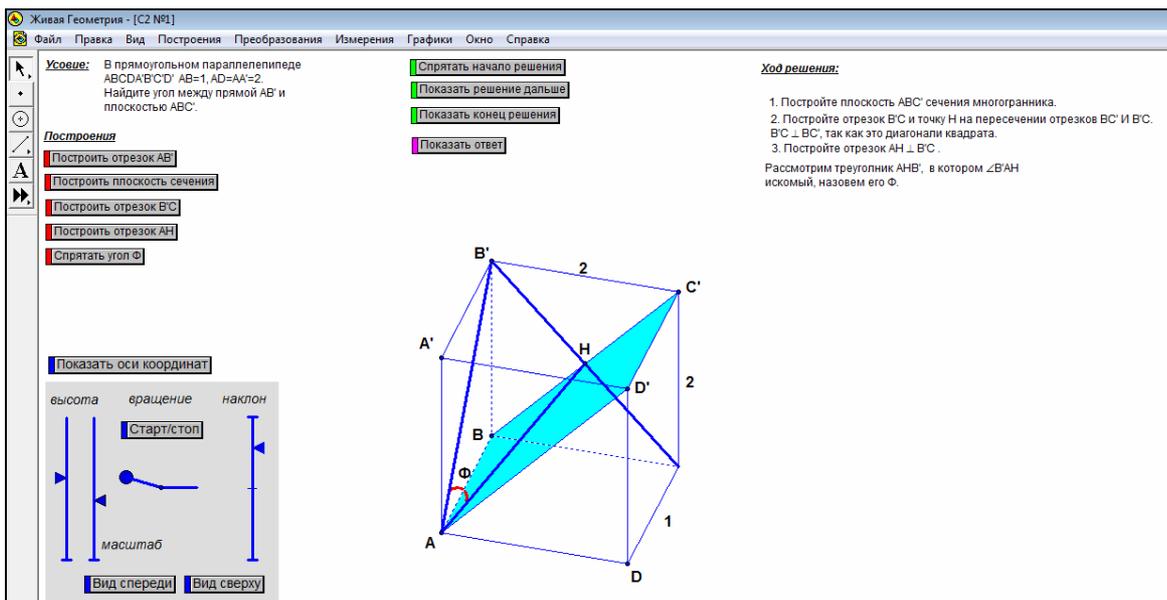


Рис.13. Начало решения.

Живая Геометрия - [C2 №1]

Файл Правка Вид Построения Преобразования Измерения Графики Окно Справка

**Условие:** В прямоугольном параллелепипеде ABCDA'B'C'D' AB=1, AD=AA'=2. Найдите угол между прямой AB' и плоскостью ABC'.

**Построения**

- Построить отрезок AB'
- Построить плоскость сечения
- Построить отрезок B'C
- Построить отрезок AH
- Спрятать угол Ф

Спрятать начало решения  
Спрятать решение дальше  
Показать конец решения  
Показать ответ

Показать оси координат

высота вращение наклон  
Старт/стоп масштаб  
Вид спереди Вид сверху

**Ход решения:**

1. Постройте плоскость ABC' сечения многогранника.
2. Постройте отрезок B'C и точку H на пересечении отрезков BC' и V'C.  $B'C \perp BC'$ , так как это диагонали квадрата.
3. Постройте отрезок AH  $\perp B'C$ .

Рассмотрим треугольник AHB', в котором  $\angle B'AH$  искомый, назовем его Ф.

$B'H=?$   
В треугольнике BHB',  $BH=B'H$  и этот треугольник прямоугольный с прямым углом BHB'. Так как гипотенуза известна  $BB'=2$ , то по теореме Пифагора  $B'H = \sqrt{BB'^2/2}$   
 $B'H = \sqrt{2}$

$AB'=?$   
В треугольнике A'AB',  $AA'=2, A'B'=1$  и этот треугольник прямоугольный с прямым углом AA'B'. по теореме Пифагора  $AB' = \sqrt{AA'^2 + A'B'^2}$   
 $AB' = \sqrt{5}$

Рис.14. Продолжение решения.

**Ход решения:**

1. Постройте плоскость ABC' сечения многогранника.
2. Постройте отрезок B'C и точку H на пересечении отрезков BC' и V'C.  $B'C \perp BC'$ , так как это диагонали квадрата.
3. Постройте отрезок AH  $\perp B'C$ .

Рассмотрим треугольник AHB', в котором  $\angle B'AH$  искомый, назовем его Ф.

$B'H=?$   
В треугольнике BHB',  $BH=B'H$  и этот треугольник прямоугольный с прямым углом BHB'. Так как гипотенуза известна  $BB'=2$ , то по теореме Пифагора  $B'H = \sqrt{BB'^2/2}$   
 $B'H = \sqrt{2}$

$AB'=?$   
В треугольнике A'AB',  $AA'=2, A'B'=1$  и этот треугольник прямоугольный с прямым углом AA'B'. по теореме Пифагора  $AB' = \sqrt{AA'^2 + A'B'^2}$   
 $AB' = \sqrt{5}$

$\sin(\Phi)=?$   
Треугольник AHB' прямоугольный, так как B'H перпендикулярно плоскости ABC', а значит перпендикулярно всем прямым принадлежащим плоскости. Прямой угол AHB'.  
AH принадлежит плоскости ABC'  
Искомый угол между прямой AB' и плоскостью ABC' равен  
 $\sin(\Phi) = B'H/AB'$   
 $\Phi = \arcsin(B'H/AB')$

**Ответ:**  
 $\Phi = \arcsin(0,4)$

Рис.15. Весь ход решения.

2) В правильной треугольной призме ABCA'B'C' стороны основания равны единице, а ребра двум, точка D - середина ребра CC'. Найдите угол между плоскостями ABC и ADB'.

В решении задачи можно открывать ход решения и построения постепенно, а

также вращать фигуру в трехмерной системе координат:

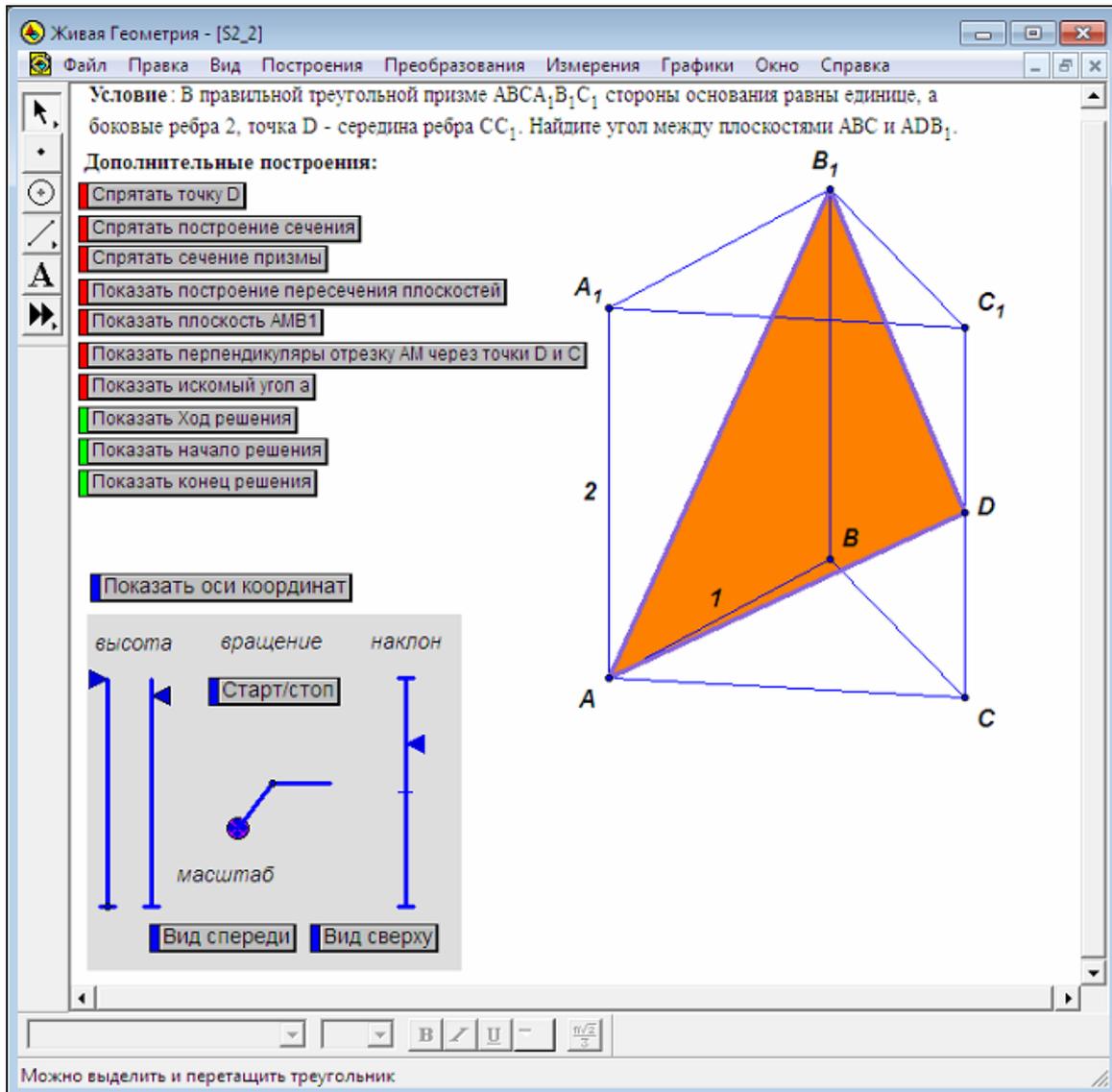


Рис.16. Условие и начальное построение.

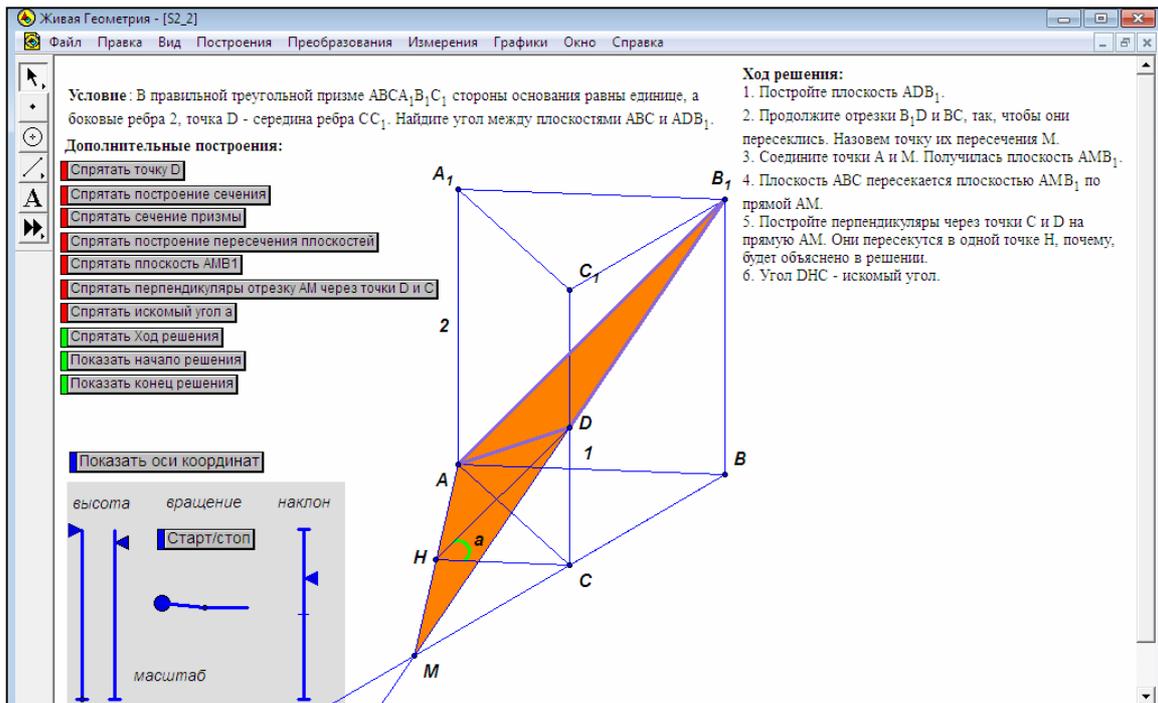


Рис.17. Дополнительные построения и их обоснования.

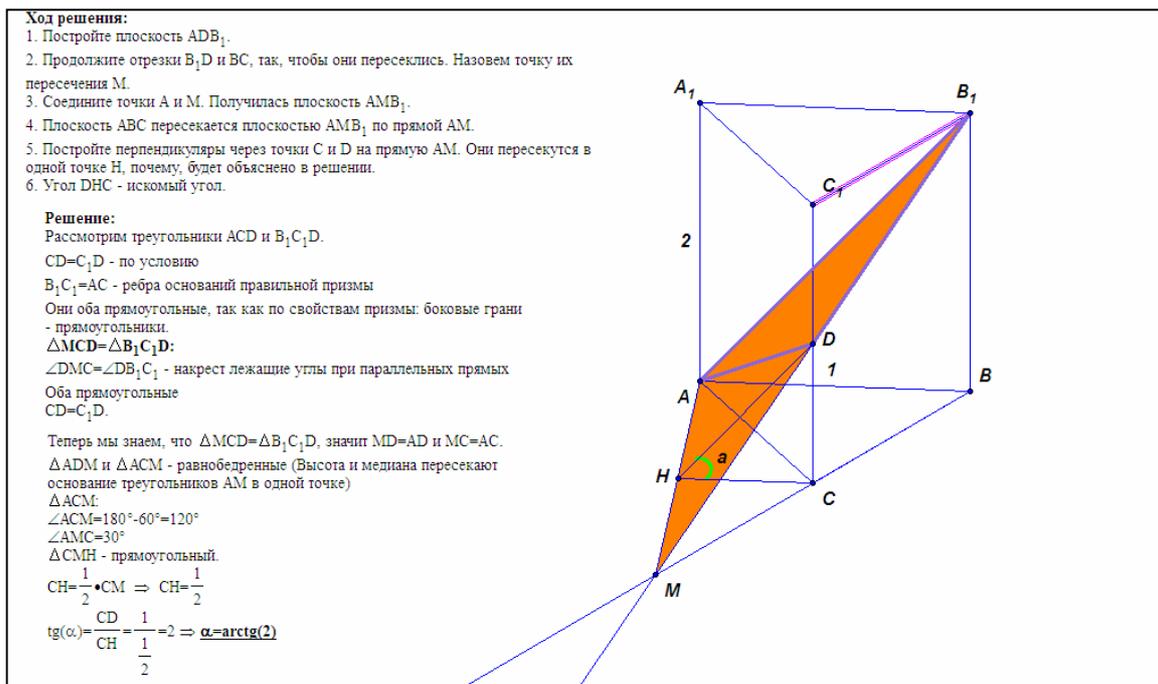


Рис.18. Полное решение задачи.

### **Заключение**

В работе было проделано: освоена программа "Живая математика", сформирован набор шаблонов, построены трехмерные объекты и записаны инструкции для их построения, проведена классификация типичных задач ЕГЭ и оформлено решение нескольких из них.

Таким образом было выполнена работа по созданию методики изучения стереометрии с помощью программы "Живая математика", а также исследовано задание С2 ЕГЭ.

### **Список литературы**

- Г.Б.Шабат, В.М.Чернявский, В.Н.Дубровский – Живая Математика  
Сборник методических материалов. Раздел стереометрия, раздел работа с программой.
- Обучающая система Дмитрия Гущина «Решу ЕГЭ». Задачи С2: № 484562, № 484569 - <http://xn--c1ada6bq3a2b.xn--p1ai/test?theme=168>