

Краевая научно-практическая конференция учебно-исследовательских и
проектных работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Дуга как элемент некоторых орудий труда

Джиганте Кирилл,
9 кл., МАОУ СОШ № 11 г. Чайковский,

Беркутова Татьяна Владимировна,
учитель математики

Пермь. 2013.

Содержание

1. Введение.....	3
2. Криволинейный треугольник Архимеда.....	4
3. Задача Архимеда.....	6
4. Практическая работа №1. Построение арбелоса с помощью циркуля и линейки.....	11
5. Практическая работа № 2. Правильность дуги некоторых сельскохозяйственных орудий.....	12
6. Заключение.....	14
7. Литература.....	17
8. Приложения.....	18

1. Введение

Порой мы не задумываемся, как появляются те или иные орудия труда. Орудия труда в сельском хозяйстве: коса, серп, скорняжный нож, плуг...

Исторический путь появления этих инструментов понятен... Древние люди должны были возделывать землю, чтобы получить продукты питания. Косой косили травы - готовили корм для животных, серпом срезали зерновые культуры, чтобы потом получить муку и испечь хлеб. Скорняжным ножом выделывали шкуры животных – шили одежду.

Если внимательно присмотреться, то увидим некоторые закономерности в моделях этих орудий труда. Все они имеют овалы, заострённые части, что свойственно для инструментария, направленного на срезание.

Попробуем разобраться, есть ли математическое обоснование этим закономерностям.

Цель работы:

Изучить геометрические модели некоторых орудий труда.

Задачи:

1. Рассмотреть математический материал о взаимном расположении дуг.
2. Провести практическую работу: геометрические модели некоторых сельскохозяйственных орудий.

Гипотеза:

Правильная дуга является элементом модели таких инструментов, как коса, серп, скорняжный нож.

Методы исследования:

- Поиск и отбор информации в Интернете;
- Проведение практической работы

2.Криволинейный треугольник Архимеда

Развитие человечества – это, прежде всего развитие человеческой мысли, а история геометрии является своего рода зеркалом истории развития человеческой мысли, удивительной сокровищницей, хранящей высшие достижения человеческого гения, жемчужины которой создавались величайшими мыслителями. Один из них древнегреческий ученый Архимед.

Один мудрец сказал: «Высшее проявление духа – это разум. Высшее проявление разума – это геометрия. Клетка геометрии – треугольник. Он так же неисчерпаем, как и Вселенная. Окружность – душа геометрии. Познайте окружность, и вы не только познаете душу геометрии, но и возвысите душу свою». В своей работе я рассматриваю треугольник Архимеда, построенный из трех полуокружностей – «арбелос». Эта фигура малоизученна и малоизвестна, причем арбелос красиво строится и с ним связаны оригинальные задачи. Поэтому эта тема и заинтересовала меня.

Одним из основоположников геометрии безусловно считается Архимед.

Великий ученый Архимед жил в III столетии до н. э в городе Сиракузы на Сицилии, бывшем в то время греческой колонией.

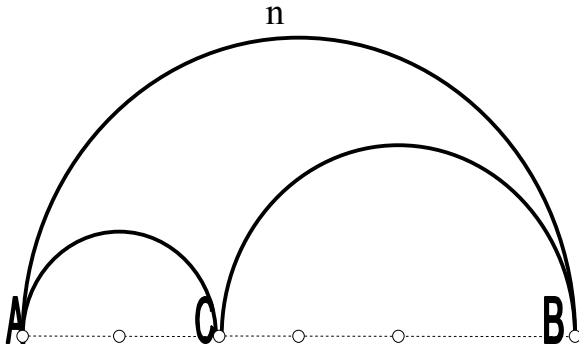
древнегреческий математик и механик, основоположник теоретической механики и гидростатики. Разработал методы нахождения площадей поверхностей и объемов различных фигур и тел. Архимеду принадлежит множество технических изобретений, завоевавших ему необычайную популярность среди современников.

Архимед получил блестящее образование у своего отца, астронома и математика Фидия, родственника сиракузского тирана Герона II, покровительствовавшего Архимеду. В юности провел несколько лет в крупнейшем культурном центре того времени Александрии, где познакомился с Эратосфеном. Затем до конца жизни жил в Сиракузах. Во время 2-й Пунической войны Архимед организовал инженерную оборону города. Изобретенные им военные метательные и др. машины в течение двух лет сдерживали осаду Сиракуз римлянами. Архимеду приписывается также сожжение римского флота направленным на него через систему вогнутых зеркал солнечным светом, но это вряд ли достоверно. Гений Архимеда вызывал такое восхищение у римлян, что Марцелл приказал сохранить ему жизнь, но при взятии Сиракуз он был убит не узнавшим его солдатом. Последними словами были: «Осторожно, не наступи на мои круги»

В своих занятиях геометрией Архимед много внимания уделил изучению свойств фигуры, носящей название арбелос, или скорняжный нож. Это название фигура получила из-за сходства с очертанием ножа, использовавшегося скорняками для разделки кож.

Если взять на прямой три последовательные точки A , B и C и построить три полуокружности с диаметрами AB , BC и AC расположенные по одну сторону от этой прямой, то фигура, ограниченная этими полуокружностями, и является арбелосом.

Фигуру арбелос Архимед рассматривает в «Книге лемм», которая сохранилась только в виде арабской обработки и латинского перевода этой обработки



Словом $AnBC$ (сапожный нож) будем вслед за Архимедом называть “криволинейным треугольником”, образованным тремя полуокружностями.

Задача Архимеда

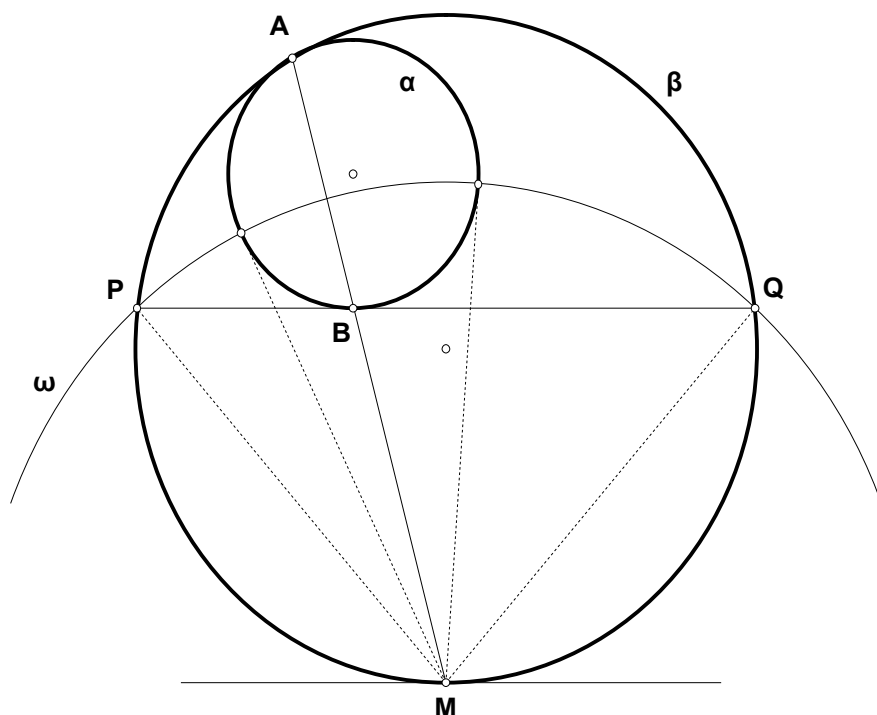
Лемма Архимеда

Пусть окружность α касается изнутри окружности β и ее хорды PQ соответственно в точках A и B . Тогда прямая AB делит дугу PQ , не содержащую точку касания, пополам.

Докажем сначала простую и полезную лемму.

Для доказательства рассмотрим гомотеию с центром A , которая переводит окружность α в окружность β .

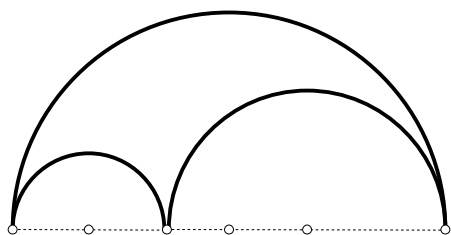
При этом точка B переходит в точку M , прямая PQ переходит в касательную к окружности β в точке M , параллельную PQ . Отсюда следует, что точка M – середина дуги PQ .



Теперь проведем через точки P и Q окружность ω с центром в точке M . При инверсии относительно окружности ω прямая PQ переходит в окружность β , а точка A – в точку B . Окружность α проходит через точки A и B , симметричные относительно окружности ω , и, следовательно окружности α и ω ортогональны по теореме (6). Значит, касательные к окружности α в точках ее пересечения с ω проходят через точку M , центр окружности ω .

Таким образом, оказывается верным следующее утверждение:
касательные, проведенные из точки M к окружности α равны расстояниям от точки M до точек P и Q .

Попробуйте доказать его справедливость, не используя инверсии.



Задача Архимеда

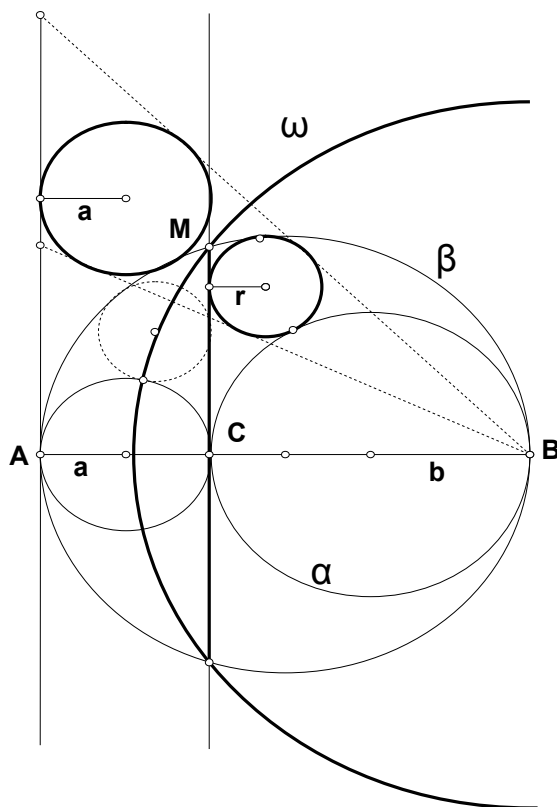
Пусть точка C лежит на отрезке AB . Построим полуокружности на диаметрах AB , BC , AC (это и есть арбелос). Перпендикуляр MC к отрезку AB делит арбелос на две части. Докажите, что радиусы окружностей, вписанных в эти части арбелоса, равны между собой.

Обозначим $AC = 2a$; $BC = 2b$

Рассмотрим инверсию относительно окружности ω с центром в точке B и радиусом BM .

При такой инверсии окружность β с диаметром AB перейдет в прямую CM , а окружность α с диаметром BC в прямую, параллельную CM , проходящую через точку A .

Таким образом, вписанная окружность радиуса r , касающаяся окружностей α и β , перейдет в окружность, касающуюся их образов, то есть двух параллельных прямых. Радиус этой новой окружности равен радиусу окружности с диаметром AC .



Рассмотрим теперь гомотетию с центром В, при которой окружность радиуса r переходит в окружность радиуса a , а точка С переходит в точку А.

$$r / a = BC / BA = 2b / 2(a + b)$$

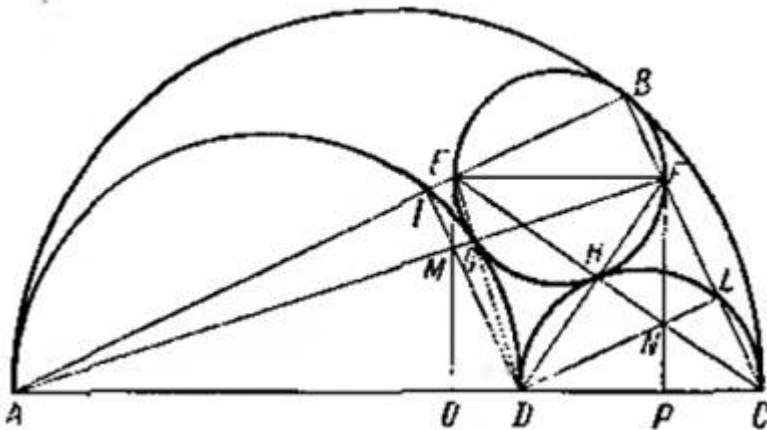
$$r = \frac{ab}{a + b}$$

Из симметричности полученной формулы относительно a и b следует утверждение задачи - **радиусы окружностей, вписанных в эти части арбелоса, равны между собой.**

Задача.

Дан полукруг ABC и на его диаметре взята точка D, причем AD в полтора раза больше DC, затем на AD и DC описаны два полукруга и между тремя (указанными) полукругами построен касающийся каждого из них круг EF, в котором проведен диаметр EF, параллельный диаметру AC.

Найти отношение диаметра AC к диаметру EF.



Доказательство.

Проведем две соединяющие линии AE и EB, а также две линии CF и FB; тогда CB и AB будут прямыми, как сказано в первом предложении. Затем начертим две линии FGA, EHC – можно показать, что они тоже будут прямыми; точно так же (будут прямыми) и обе линии DE

Рис 4 и DF; проведем соединяющие прямые DI, DL, а также EM и FM и продолжим последние до O и P. И так как в треугольнике AED прямая AG перпендикулярна к ED, а DI перпендикулярна к AE, и обе эти прямые взаимно пересекаются в M, то, значит, EMO тоже будет перпендикуляром, как это мы

показали в написанном нами рассуждении о свойствах треугольника, с доказательством чего мы уже встретились в предыдущем предложении; точно так же и EP будет перпендикуляром к CA. И так как два угла у L и у B прямые, то DL будет параллельна AB, и также DI параллельна CB; значит, отношение AD к DC будет таким же, как отношение AM к FM и как отношение AO к OP,

$$\frac{AP}{DC} = \frac{AM}{FM} = \frac{AO}{OP}$$

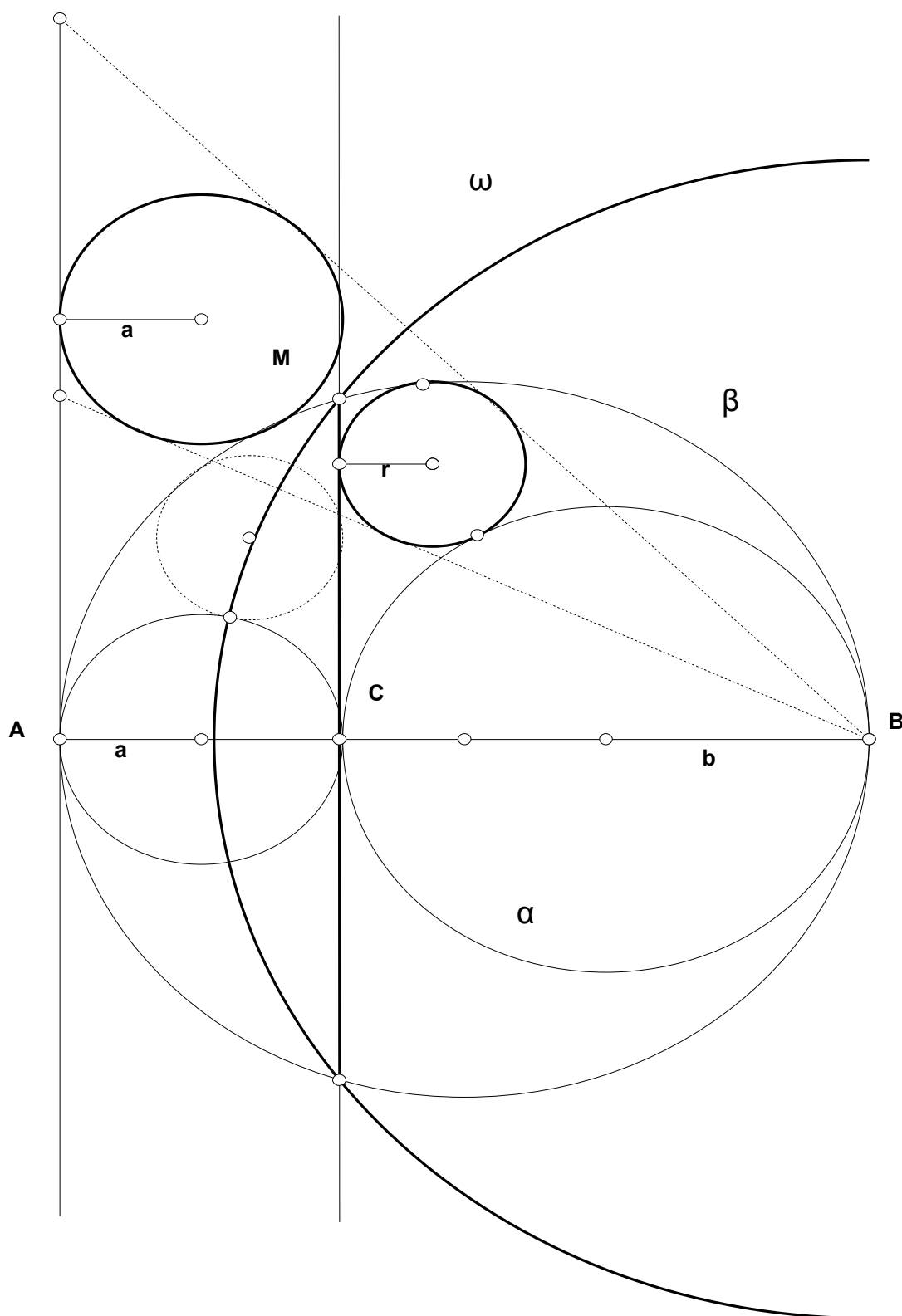
и отношение CD к DA будет таким же, как CN к NE, или как CP к PO.

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CN}{NE} = \frac{CP}{PO}$$

Но AD в полтора раза больше DC; значит, AO будет в полтора раза больше OP и OP в полтора раза больше CP. Значит, три линии AO, OP и PC будут пропорциональными, и каких единиц будет в CP четыре, таких в OP будет шесть, в AO девять и в CA девятнадцать. И так как PO равна EF, то отношение AC к EF будет таким же, как отношение девятнадцати к шести. Таким образом, мы нашли требуемое отношение. Точно так же, если бы отношение AD к DC было каким угодно, например четырех к трем, или пяти к четырем, или каким-нибудь другим, то рассуждения были бы таким же. Это и есть то, чего мы хотели.

Практическая работа № 1.

Построить с помощью циркуля и линейки точный чертеж к задаче Архимеда (т. е. арбелос и две вписанные окружности).



Практическая работа №2

Определение правильности дуги некоторых сельскохозяйственных орудий.

1.Орудие «Серп» (приложение 1)

Мы предположили, что модель серпа изображенного на листе бумаги составляют две правильные дуги: внутренняя и внешняя.

Для определения правильности дуги рассчитаем место расположения центров каждой из окружности для внешней и внутренней дуг.

Ход работы:

- 1.Изобразим на листе бумаги точную модель серпа.
- 2.Обозначим модель ABC.
- 3.Проведем хорду АВ.
- 4.Построим перпендикуляр к хорде АВ, на котором находится центр О окружности для внешней дуги.
- 5.ОА, ОВ, ОС – радиусы внешней дуги.
6. Проводим окружность с центром в точке О и с радиусом равным ОА.
- 7.Отложим расстояние ОА от внешней дуги по перпендикуляру – это центр окружности с точкой O_1 для внутренней дуги.
8. Проводим окружность в центре с точкой O_1 с радиусом равным O_1A .

Вывод:

Траектория получения окружности полностью не совпадает с дугами рассматриваемой модели.

2.Орудие «Коса»(приложение2)

Мы также предположили, что модель косы состоит из двух правильных дуг.

Для подтверждения гипотезы рассчитаем место расположение центров каждой из окружностей для внешней и внутренней дуг.

Ход работы:

- 1.Изобразим на листе бумаги точную модель косы.
- 2.Обозначим модель ABC.
- 3.Проведем две хорды АВ и АС.
- 4.Построим перпендикуляры к каждой хорде для выявления центров окружности.
- 5.Проводим окружности с центрами в точках О и O_1 .

Вывод:

В данном случае модель косы состоит из 2 неправильных дуг, так как слишком большое отклонение окружностей от рассматриваемых дуг.

Заключение

Начиная работу, мы лишь интуитивно понимали, что есть некоторые математические закономерности в моделях сельскохозяйственных орудий труда. Из литературы выяснили, что есть определённые преимущества в использовании орудий округлой формы. Такая форма удобна для, если радиус изгиба является оптимальным, чтобы легче было использовать этот предмет по назначению. В некоторых случаях при большем радиусе уменьшается площадь рабочего места, что является для орудия труда минусом.

В определении фигуры **арбелос** Архимеда – уточняется, что это фигура похожа на скорняжный нож, но это не совсем так, потому что есть еще несколько сельскохозяйственных инструментов элементы которых похожи на фигуру Архимеда, например, такие как коса и серп.

Мы легко нашли в сельской местности косу и серп. Методом наложения и некоторых расчётов установили, что коса и серп хотя и имеют в математической модели дуги, но они не являются правильными. Вместе с тем, нам не удалось найти скорняжный или сапожный нож, который в работах Архимеда назван **арбелосом**. Поэтому интерес к этому вопросу остался, думаем, что это будет продолжением работы.

Таким образом, мы сравнили фигуру точной науки геометрии - арбелос с орудиями труда, и зафиксировали элементы сходства и различия. В обоих случаях элементами модели являются дуги, но в арбелосе Архимеда это правильные дуги, а в орудиях труда такой закономерности не выявлено.

Литература.

1. И.Ф. Шарыгин. Геометрия. 7-9 классы. Дрофа. Москва-2001.
2. wikipedia.org
3. rodnik.3dn.ru
4. elementy.ru

