Краевая научно-практическая конференция учебно-исследовательских и проектных работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Использование прогрессий при решении практических задач

Караваев Андрей Алексеевич,

10 кл., МБОУ «Лицей №1 г. Березники,

Устинова Светлана Арсеньевна,

учитель математики

Пермь. 2013.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Математика – наука очень древняя и возникла из практических нужд человека. Видимо, и прогрессии имеют определенное практическое значение.

Термин “прогрессия” был введен римским автором Боэцием (в 6 веке) и понимался в более широком смысле, как бесконечная числовая последовательность. Названия “арифметическая” и “геометрическая” были перенесены из теории непрерывных пропорций, которыми занимались древние греки.

Формула суммы членов арифметической прогрессии была доказана древнегреческим ученым Диофантом (в 3 веке).

Некоторые формулы, относящиеся к прогрессиям, были известны китайским и индийским ученым (V в.).

Примеры отдельных арифметических и геометрических прогрессий можно встретить еще в древневавилонских и греческих надписях, имеющих возраст около четырех тысячелетий и более. В древней Греции еще пять столетий до н.э. были известны такие суммы:

$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$;

$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$.

В клинописных табличках вавилонян, как и в египетских папирусах, относящихся ко второму тысячелетию до нашей эры, встречаются примеры арифметических и геометрических прогрессий. Вот пример задачи из египетского папируса Ахмеса: «Пусть тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между 10 человеками и, разность же между каждым человеком и его соседом равна $\frac{1}{8}$ меры».

Формула, которой пользовались египтяне:

$$a=\frac{S}{n}-(n-1)\bullet\frac{d}{2}\left(S=\frac{a+b}{2}\bullet n\right)$$

Задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности, были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деление наследства и другие.

В связи свыше перечисленными фактами была поставлена

Цель: научиться применять прогрессии на практике.

Задачи, поставленные для достижения этой цели:

- Изучить в каких областях жизни используются прогрессии

- Решить задачи из разных областей знаний

Глава I. Прогрессии

Понятие «арифметическая прогрессия»

Арифметическая прогре́ссия — числовая последовательность, в которой каждое последующее число, начиная со второго, получается из предыдущего увеличением его на определённое число.

Понятие «геометрическая прогрессия»

Геометри́ческая прогре́ссия — последовательность чисел, в которой каждое последующее число, начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на определённое число.

Глава II. Задачи

Исторические задачи:

1.Задача-легенда

Индийский царь Шерам позвал к себе изобретателя шахматной игры, своего подданного Сету, чтобы наградить его за остроумную выдумку. Сета, издеваясь над царем, потребовал за первую клетку шахматной доски 1 зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — 4 зерна и т. д. Обрадованный царь посмеялся над Сетой и приказал выдать ему такую «скромную» награду. Стоит ли царю смеяться?

Решение:

Дано: ∺; 1, 2, 4, 8, 16…

$b_1 = 1,$ q=2, n = 64

$S_{64} - ?$

$S_{64} = 2^{64} - 1$

Сумма равна 18 446 744 073 709 551 615

2.Идеи Мальтуса

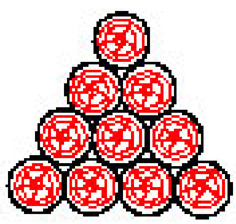
В первоначальной формулировке Мальтуса, численность населения увеличивается в геометрической прогрессии (1, 2, 4, 8, 16 и т.д.), а производство продуктов питания — в арифметической прогрессии (1, 2, 3, 4, 5 и т.д.). По Мальтусу, именно этот разрыв и является причиной многих общественных бед — бедности, голода, эпидемий, войн.

Интересные задачи, которые встречаются в учебниках математики

1. При хранении бревен строевого леса их укладывают, как показано на рисунке. Сколько брёвен находится в одной кладке, если в ее основании положено 12 бревен?

Решение:

Составим математическую модель задачи: 1, 2, арифметическая прогрессия, a_1=1, d=1,a_n=12. Надо



$a_n=a_1+d(n-1)$; 12=1+1(n-1); n=12.

$S_n=(a_1+a_n)\cdot n:2$; $S_n=(1+12)\cdot 12:2$; $S_n=78$.

В одной кладке находится 78 бревен.\

2. Улитка ползет по дереву. За первую минуту она проползла 30 см, а за каждую следующую минуту — на 5 см больше, чем за предыдущую. За какое время достигнет улитка вершины дерева длиной 5,25 м, если считать, что движение начато от его основания?

Решение:

$a_1 = 30$, $d = 5$, $S_n = 525$, $n > 0$.

$S_n = (2a_1 + d\,(n-1))n:2$; $525 = (2 \cdot 30 + 5\,(n-1))n:2$; $1050 = (60 + 5\,(n-1))n$;

$1050 = 55\,n + 5n^2$;

$n^2 + 11\,n - 210 = 0$, $n_1 = -21$, $n_2 = 10$ $(n>0)$.

Улитка достигнет вершины за 10 дней.

О финансовых пирамидах:

Разберёмся в механизмах этих организаций. Организатор начинает вовлекать в свою организацию и говорит, что, если внести указанную плату по указанным адресам по 1 рублю, а затем заплатить ещё по 5 таким же адресам, вычеркнув первый адрес и дописав свой последним, то через некоторое время вы получите уйму денег. Хотя желающих разбогатеть по щучьему веленью немало, но в выигрыше оказываются только учредители такой игры.

Решение:

Дело в том, что число участников увеличивается в 5 раз с каждым кругом. Если пятёрка устроителей подпишет, допустим, 120 человек со своими адресами, то в первом круге участвуют 120 человек, во втором – 600, в третьем – 3 000, …, в десятом – 234 375 000 человек; это намного больше населения страны. Так что участник, включившийся в восьмом или девятом круге, уже ничего не получит.

Прогрессии в природе:

Все организмы обладают интенсивностью размножения в геометрической прогрессии.

1. Инфузории

Летом инфузории размножаются бесполым способом делением пополам.

Вопрос: сколько будет инфузорий после 15-го размножения?

$b_{15} = 2 \cdot 2^{14} = 32\ 768$

2. Известно, что бактерии размножаются делением: одна бактерия делится на две; каждая из этих двух в свою очередь тоже делится на две, и получаются четыре бактерии; из этих четырех в результате деления получаются восемь бактерий и т. д. Результат каждого удвоения будем называть поколением. Способность к размножению у бактерий настолько велика, что если бы они не гибли от разных причин, а беспрерывно размножались, то за трое суток общая масса потомства одной только бактерии могла бы составить 7500 тонн. Таким громадным количеством бактерий можно было бы заполнить около 375 железнодорожных вагонов.

3. Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и

т.д. Найдите число бактерий, образующихся из одной бактерии к концу суток.

Решение:

В сутках 1440 минут, каждые двадцать минут появляется новое поколение - за сутки 72 поколения. По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии, у которой $b_1=1$, $q=2$, $n=72$, находим, что $S_{72}=2^{72}-1= 4\ 722\ 366\ 482\ 869\ 645\ 213\ 696 - 1=$

$= 4\ 722\ 366\ 482\ 869\ 645\ 213\ 695.$

Прогрессии в литературе:

Отличие ямба от хорея состоит в различных расположениях ударных слогов стиха.

Ямб – это стихотворный размер с ударением на четных слогах 2; 4; 6; 8;…Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью прогрессии 2.

«Мой дЯдя сАмых чЕстных прАвил…», прогрессия 2; 4; 6; 8;…

Хорей – это стихотворный размер с ударением на нечетные слогах стиха. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию 1; 3; 5; 7;..

«Я пропАл, как звЕрь в загОне»Б.Л.Пастернак, «БУря мглОю нЕбо крОет»

А.С. Пушкин, прогрессия 1; 3; 5;7.

Использование прогрессий в других разных науках:

1. Химия. При повышении температуры по арифметической прогрессии скорость химических реакций растет по геометрической прогрессии.

2. Геометрия. Вписанные друг в друга правильные треугольники образуют геометрическую прогрессию.

3. Физика. а) Нейтрон, ударяя по ядру урана, раскалывает его на две части. Получаются два нейтрона. Затем два нейтрона, ударяя по двум ядрам, раскалывает их еще на 4 части и т.д. – это геометрическая прогрессия.

б) При свободном падении тело прошло в первую секунду 5м, а в каждую следующую на 10м больше. Найдите глубину шахты, если свободно падающее тело достигло его дна через 5 с. после начала падения.

Решение:

Составим математическую модель задачи:

в первую секунду 5м,

во вторую секунду 15м,

в третью секунду 25м,

в четвертую секунду 35м,

в пятую секунду 45м.

Всего за пять секунд 5+15+25+35+45=125(м).

Заключение

Сделав анализ задач на прогрессии с практическим содержанием, мы увидели, что прогрессии встречаются при решении задач в медицине, в строительстве, в банковских расчетах, в живой природе, в спортивных соревнованиях и в других жизненных ситуациях. Следовательно, многим необходим навык применения знаний, связанных с прогрессиями.

Список литературы

1. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для общеобразовательных учреждений/ А.Г.Мордкович. – 9-е изд., стер. – М.:Мнемозина, 2007.

2. Алгебра. 9 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений/ Ю.Н. Макарычев и др. под ред. С.А. Теляковского –М.: Просвещение, 2009.

3. Алгебра. 9 класс, : Учебник для общеобразовательных учреждений / Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Феактистов И.Е. . -М.: Мнеозина, 2008.

4. Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных.9 кл.: Учебник для общеобразовательных учебных заведений/ Г.В. Дорофеев , С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева; под ред. Г.В. Дорофеева. -М. :Дрофа, 2000.

5. Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры. Книга для учащихся 7-9 классов средней школы -М.: Просвещение, 1990.

6. Энциклопедический словарь юного математика /Сост. А.П.Савин.- М.: Педагогика, 1989.

7. http://n-t.ru/tp/iz/zs.htm

8. http://students.tspu.ru/students/legostaeva/index.php?page=op

9. http://festival.1september.ru/articles/568100/

Приложения

1. Лео́нтий Фили́ппович Магни́цкий — русский математик, педагог. Преподаватель математики в Школе математических и навигацких наук в Москве (с 1701 по 1739), автор первой в России учебной энциклопедии по математике.

2. То́мас Ро́берт Ма́льтус — английский священник и учёный, демограф и экономист, автор теории, согласно которой неконтролируемый рост народонаселения должен привести к голоду на Земле.