Краевая научно-практическая конференция учебно-исследовательских и проектных работ учащихся 6-11 классов «Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

# Математическое моделирование движения фигуриста по дуге

Ларионова Анна Алексеевна,
Тихонова Александра Алексеевна,
11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Шабрыкина Наталья Сергеевна,
к.ф.-м.н., доцент ПНИПУ

Пермь. 2013.

# Оглавление

Введение ..... 3

Концептуальная постановка задачи ..... 5

Математическая постановка задачи..... 6

Результаты исследования ..... 9

Заключение .....15

Приложение .....16

Summery ..... **Ошибка! Закладка не определена.**

Список литературы.....17

## Введение

Один из самых красивых и сложных видов спорта - это фигурное катание. Это совершенное явление, стоящее на грани спорта и искусства. Занятия фигурным катанием развивают грацию, пластичность, способствуют формированию красивой фигуры, но главное весь комплекс упражнений направлен на укрепление здоровья. Можно смело утверждать, что фигурное катание — это составная часть спорта, в основе которой лежат систематические тренировки и участие в соревнованиях с целью достижения спортсменами высоких показателей.

Начальный период обучения этому виду спорта представляет собой нелегкий процесс. Современное направление развития фигурного катания на коньках характеризуется выраженной тенденцией к сочетанию основных компонентов катания, сбалансированности содержания программы. Перед спортсменами ставится задача продемонстрировать владение всеми группами элементов — шагами, спиралями, вращениями, прыжками. В преодолении этих трудностей может существенно помощь математическая модель, позволяющая подбирать различные параметры для более успешного выполнения элементов фигурного катания с учетом индивидуальных параметров фигуристов.

В работе будет рассмотрено движение фигуриста по дуге. Движение по дуге – основной элемент фигурного катания, с него начинается обучение фигурному катанию. Данный элемент позволяет фигуристу развить скорость, необходимую для выполнения других элементов,более сложных в своем выполнении. При движении по дуге фигурист стоит на одной ноге, а лезвие конька соприкасается со льдом одним ребром. Фигурист движется не вертикально, а под некоторым углом к горизонту, из-за чего траектория его движения криволинейная, а не прямая.

Созданию математической модели движения по дуге посвящена данная работа. Такая модель поможет фигуристам выполнять простые и сложные элементы фигурного катания, а начинающим фигуристам освоиться в фигурном катании.

## Концептуальная постановка задачи

В данной работе будет рассматриваться фигурист, который совершает движение по дуге на одной ноге. Целью работы является построение модели процесса движения по дуге, которая характеризуется физическим параметром - радиусом кривизны.

При построении модели были приняты следующие допущения:

- Фигурист рассматривается как движущаяся материальная точка.
- Сила трения постоянная и направлена против движения конька фигуриста.
- Коэффициент силы трения конька фигуриста об лед остается постоянным, т.к. скорость фигуриста небольшая.
- Сила сопротивления воздуха на фигуриста не учитывается, т.к пренебрежимо мала при скоростях, развиваемых фигуристом.
- Фигурист движется в поле тяжести земли.
- Будем считать, что голень и конек лежат на одной прямой. Данная прямая наклонена под некоторым углом ко льду.

## Математическая постановка задачи

Будет рассмотрена материальная точка, которая движется по траектории с некоторым радиусом кривизны. При этом на материальную точку действуют следующие силы: сила реакции опоры, сила трения, сила тяжести (рис. 1). На рис.1 оси координат введены следующим образом: x – касательная к траектории движения конька, y – нормаль, z – перпендикулярна плоскости xOy (поверхности льда). Реакция опоры направлена вдоль прямой, на которой лежат конек и голень фигуриста. Угол $\alpha$ – между вертикалью и силой реакции опоры, угол $\beta$ - между осью x и проекцией реакции опоры на плоскость xOy.

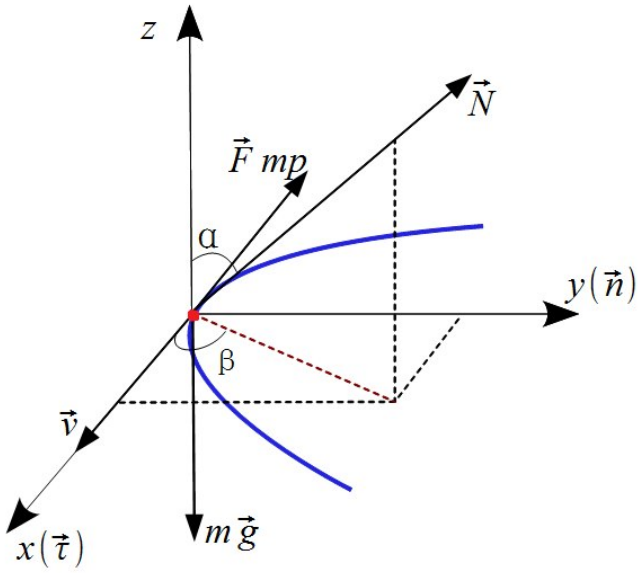


Рис.1. Силы, действующие на фигуриста при движении по дуге

С учетом принятых допущений можно записать второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + m\vec{g}\ , \qquad (1)$$

где $m$ - масса фигуриста, $\vec{a}$ – вектор полного ускорения, $\vec{g}$ - вектор ускорения свободного падения, $\vec{N}$ – вектор реакции опоры, $\vec{F}_{тр}$ - вектор силы трения. Сила трения равна $\mu \times \vec{N}$, где $\mu$ - коэффицент трения.

Зная, что полное ускорение раскладывается на нормальное и тангенциальное составляющие, можно спроецировать ур. (1) на оси координат:

$$ma_\tau = N\sin\alpha\cos\beta - \mu N, \tag{2}$$

$$ma_n = N\sin\alpha\sin\beta, \tag{3}$$

$$mg = N\cos\alpha, \tag{4}$$

где $a_\tau$ - тангенцильное ускорение, $a_n$ - нормальное ускорение,

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

При подстановке силы реакции опоры из ур. (4) в ур. (2) и (3), получаются следующие уравнения:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g(\sin\alpha\cos\beta - \mu)}{\cos\alpha}, \tag{5}$$

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{g\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha}. \tag{6}$$

Углы $\alpha$ и $\beta$ зависят от времени по некоторым законам. Будем считать, что они зависят линейно и их можно определить по следующим формулам:

$$a(t) = \frac{\alpha_\partial - \alpha_0}{t_\partial} t + \alpha_0, \tag{7}$$

$$\beta(t) = \frac{\beta_\partial - \beta_0}{t_\partial} t + \beta_0 \tag{8}$$

где $\alpha_0$ и $\beta_0$ - начальные уголы, $\alpha_\partial$ и $\beta_\partial$ - конечные уголы, при которых заканчивается движение по дуге, $t_\partial$ - конечное время, при котором заканчивается движение по дуге.

Ур. (5) является дифференциальным относительно скорости, для того чтобы его решить нужно начальное условие:

$$v(0) = v_0 \tag{9}$$

Решив ур. (5) с помощью ур. (6) можно найти радиус кривизны траектории выражающийся по формуле:

$$\rho = \frac{v^2 \cos\alpha}{g \sin\alpha \sin\beta}. \tag{10}$$

## Результаты исследования

Зная формулу угловой скрости $\omega = \frac{v}{\rho}$, подставим в нее формулу радиуса кривизны ур. (10), и зная, что $\omega = (\varphi)'$, запишем уравнение:

$$(\varphi)' = \frac{g \sin\alpha \sin\beta}{v \cos\alpha} \tag{11}$$

С помощью математического пакета Maple 14 выразим угол $\varphi$ и подставим в систему уравнений для траектории движения фигуриста:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{v^2 \cos\alpha}{g \sin\alpha \sin\beta} \cos\varphi \\ y(t) = \dfrac{v^2 \cos\alpha}{g \sin\alpha \sin\beta} \sin\varphi \end{cases} \tag{12}$$

Все результаты приведены для параметров : $m = 55\text{кг}$, $g = 9.8\text{м/с}^2$, $\mu = 0.01$, $t = 1.55c$.

Рассмотрим результаты, полученные для процесса движения по дуге. Исследуем зависимость траектории движения фигуриста от угла наклона конька ко льду. На Рис. 2 представлены графики траектории движения фигуриста с переменным углом $\alpha$ и начальной скоростью $v_0 = 2\text{м/с}$

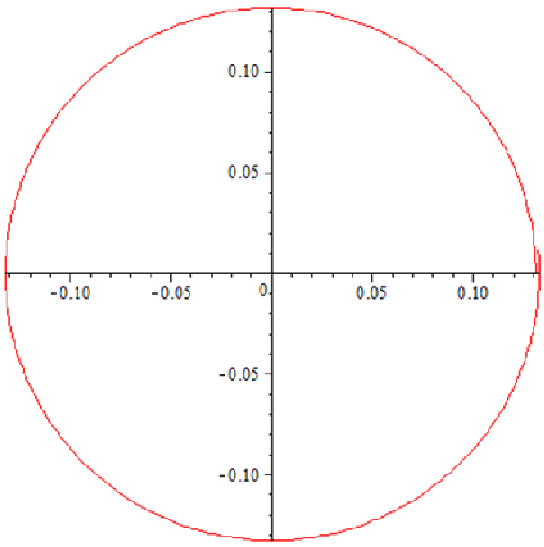

Рис. 2а. Траектория движения фигуриста. Угол $\alpha$ меняется от 20 до 25 градусов.

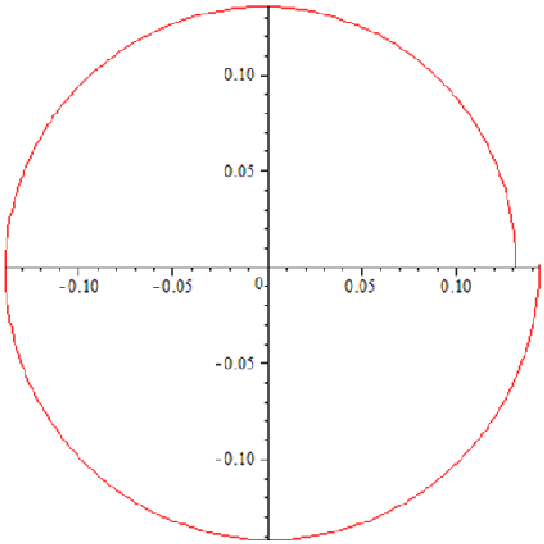


Рис. 2б. Траектория движения фигуриста с углом $\alpha$ от 20 до 30 градусов.

По Рис. 2 видно, что если угол $\alpha$ будет увеличиваться, то фигурист будет двигаться так же по спирали, но ее радиус будет увеличиваться.

На Рис. 3 представлены графики траектории движения фигуриста для постоянных углов $\alpha = 30^{\circ}$ и $\beta = 90^{\circ}$. Начальная скорость на Рис. 3а $v_0 = 2$м/с, а на Рис. 3б $v_0 = 3$м/с

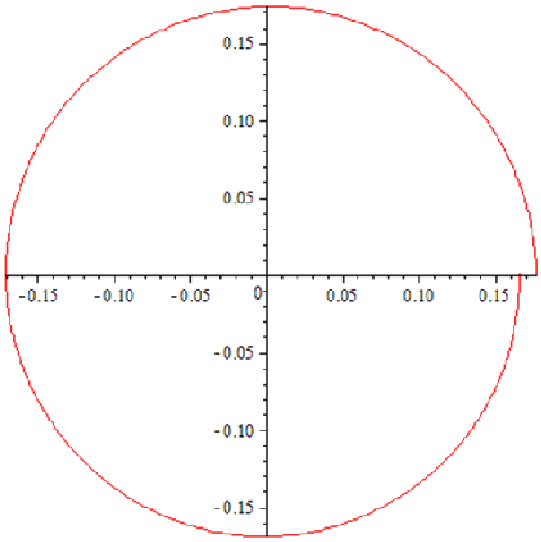


Рис. 3а Траектории движения фигуриста с постоянными углами.

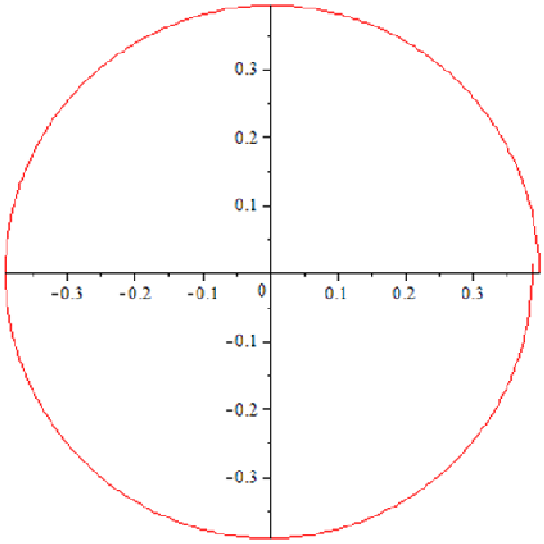


Рис. 3б Траектории движения фигуриста для постоянных углов.

По графикам можно заметить,что чем начальная скорость будет больше, тем сильнее фигуриста будет закручивать по спирали.

На Рис. 4 представлены графики траектории движения фигуриста с переменным углом $\beta$ и постоянной начальной скоростью $v_0 = 2$м/с .

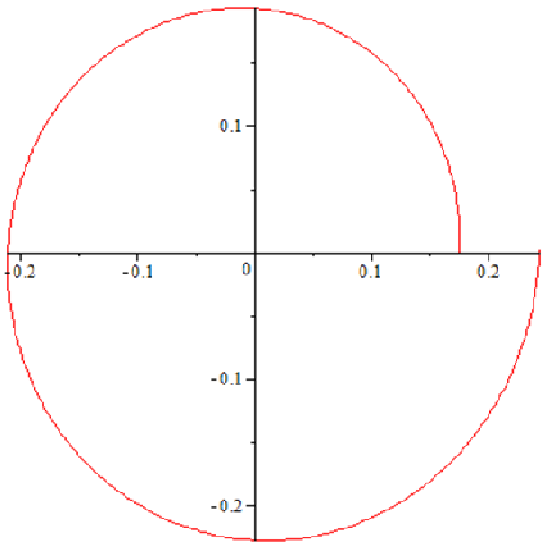


Рис. 4а Траектория движения фигуриста. Угол $\beta$ меняется от 81 до 86 градусов.

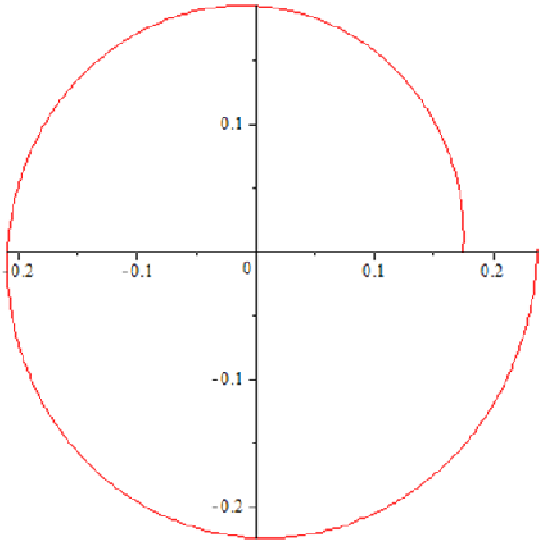


Рис. 4б Траектория движения фигуриста. Угол $\beta$ меняется от 81 до 90градусов.

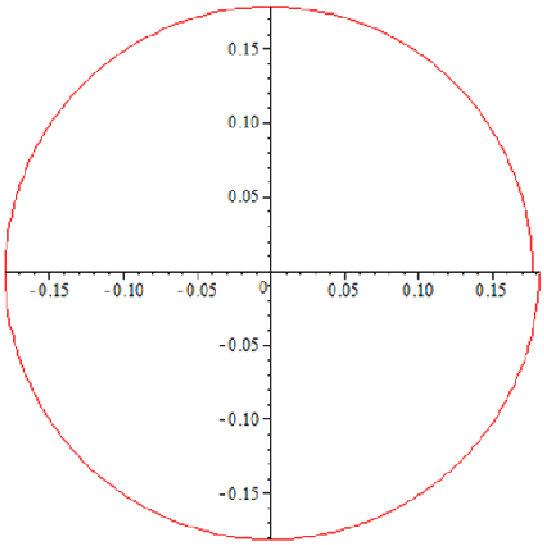


Рис. 4в Траектория движения фигуриста. Угол $\beta$ меняется от 88 до 90градусов.

По Рис. 4 видно, что чем больше изменяется угол, тем фигурист больше раскручивается по спирали.

На Рис. 5 представлены графики траектории движения фигуриста для постоянных углов $\alpha = 20^{\circ}$ и $\beta = 81^{\circ}$ с постоянной скоростью $v_0 = 2$ м/с, но переменным коэффициентом трения.

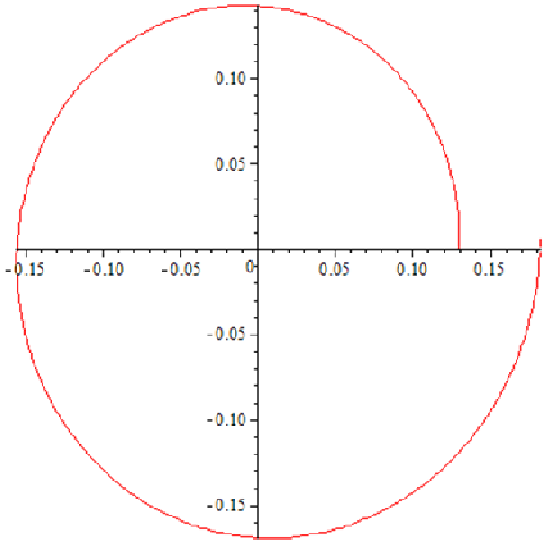


Рис. 5а Траектории движения фигуриста для постоянных углов. $\mu = 0.01$

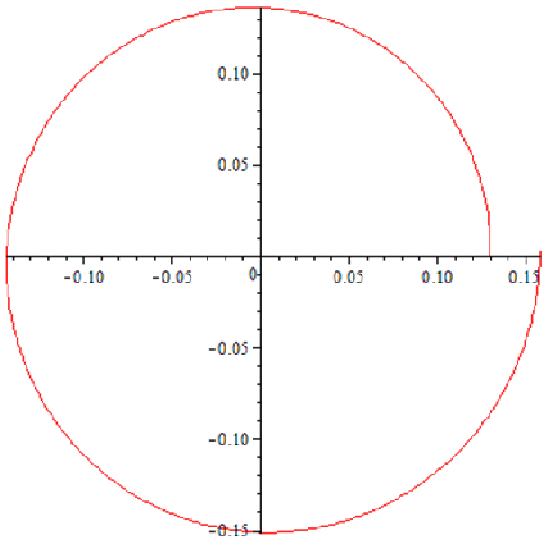


Рис.5б Траектории движения фигуриста для постоянных углов $\mu = 0.03$

На Рис. 6 представлены графики траектории движения фигуриста для постоянных углов $\alpha = 20^{O}$ и $\beta = 81^{O}$ при постоянной скорости $v_0 = 4$, но переменным коэффициентом трения.

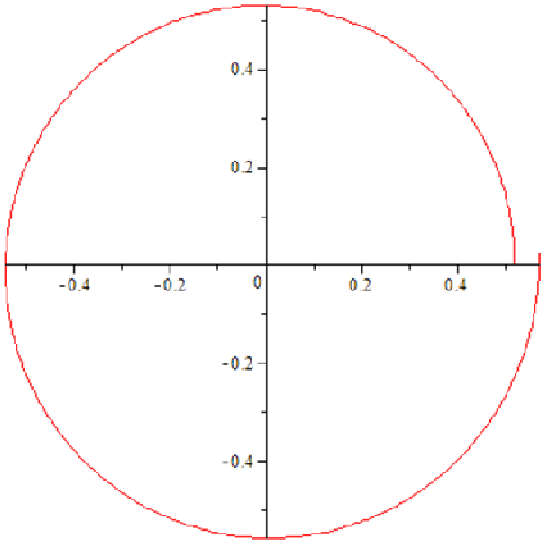


Рис. 6а Траектории движения фигуриста для постоянных углов $\mu = 0.01$

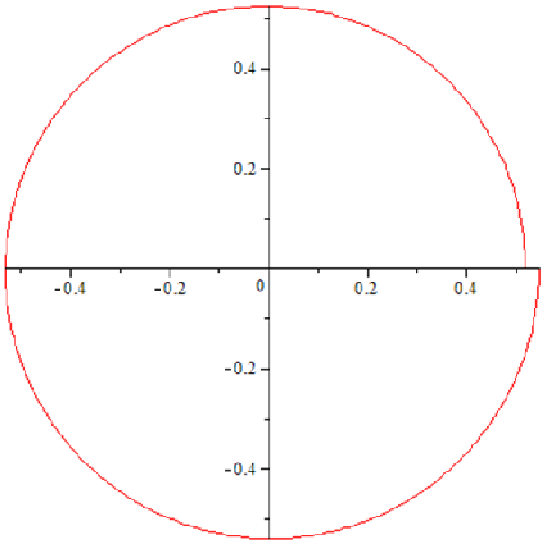


Рис. 6б Траектории движения фигуриста для постоянных углов $\mu = 0.03$

По Рис. 5 и Рис.6 заметно, что чем меньше коэффициент трения, тем траектория фигуриста будет более пологой.

## Заключение

В работе была построена математическая модель движения фигуриста по дуге. И получены зависимости угловой и линейной скорости фигуриста от времени. Была проанализирована связь данных зависимостей с начальными параметрами: угол наклона ребра конька к вертикали и угол между осью абсцисс и проекцией силы реакции опоры. Были построены графики траектории движения фигуриста для различных параметров.

Рекомендации:

1)Для того чтобы больше закрутиться по спирали, фигурист должен иметь как можно большую скорость, а изменение угла $\beta$ должно быть как можно меньше.

2)Если фигурист хочет двигаться по большему радиусу, он должен увеличить угол $\alpha$

3)Чтобы дуга, по которой движется фигурист, была более пологой, коэффициент трения должен быть как можно меньше, а скорость движения фигуриста должна увеличиваться.

## Приложение

```
> restart;
> with(plots):
> V0:=2; m:=55; my:=0.01; k:=0.01; alpha:=Pi/6; g:=9.8; beta:=Pi/2; alpha1:=Pi/6; alpha2:=Pi/6; beta1:=82*Pi/180; beta2:=Pi/2; tk:=1.55;
> alpha:=((alpha2-alpha1)*t/tk)+alpha1;
> beta:=((beta2-beta1)*t/tk)+beta1;
> N:=m*g/cos(alpha);
> sys:=diff(V(t),t)=g*(sin(alpha)*cos(beta)-my)/cos(alpha);
> k:=dsolve({sys,V(0)=V0},V(t));
> V1:=eval(V(t),k);
> plot(V1,t=0..10);
> R:=(V1^2*cos(alpha))/g*sin(alpha)*sin(beta);
> W:=diff(phi(t),t)=(g*sin(alpha)*sin(beta))/cos(alpha)*V1;
> l:=dsolve({W,phi(0)=0},phi(t));
> phi1:=eval(phi(t),l);
> plot(phi1,t=0..10);
> x(t):=R*cos(phi1);
> y(t):=R*sin(phi1);
> plot([x(t),y(t),t=0..1]);
```

## Список литературы


1. . Фигурное катание на коньках как вид спорта. 2012. http://vladled.ru/index.php?option=com_content&view=article&id=196:2010-09-29-11-09-38&catid=6:2010-09-26-07-44-55&Itemid=50
2. Мишин А. Н. Биомеханика движений фигуриста. М., ФиС, 1981. http://www.tulup.ru/articles/82/glava_4_biomehanicheskie_osnovy_tehniki_dvizhenij_figurista.html
3. Мишин А. Н. Фигурное катание для всех. Лениздат, 1976. http://www.fizkult-ura.ru/node/1228