Краевая научно-практическая конференция учебно-исследовательских и проектных работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Трисекция угла

Марквирер Владлена Дмитриевна,
11 кл., МАОУ «Лицей №10» г. Пермь,

Золотухина Лариса Викторовна,
учитель математики

Пермь. 2013.

Оглавление

1. Введение

Итак, трисекция угла – одна из трёх неразрешимых задач, наряду с удвоением куба и квадратуре круга. В 1837 году было доказано, что трисекцию угла можно построить, когда разрешимо квадратное уравнение в радикалах:

$$X^3 - 3X - 2\cos\alpha = 0$$

Например, трисекция осуществима для $\alpha = 360^{o}/n$, где n – целое число, которое не делится на 3.

Но в своей работе я хочу предложить свое решение данной задачи, для этого нужно определиться с проблемами, целью, задачами, гипотезой и выбрать объект и предмет исследования.

Я начну с определения объекта и предмета исследования. Объектом исследования будет являться классические неразрешимые задачи древности. Предметом исследования будет являться сама задача о разделении угла на 3 части.

Проблема: Необходимы знания опорных теорем и некоторых свойств из курса школьной геометрии, а также соблюдение последовательности проведения доказательства и, самое главное, внимание!

Цель: Преподнести свое решение трисекции угла и её доказательство. Если оно окажется неверным, то признать, что данная задача является действительно нерешаемой. Привести примеры других решений этой задачи. Для достижения этой цели, необходимо выполнить следующее:

- Изучить историческую сторону вопроса;
- Понять суть построения трисекции;
- Выполнить аккуратно чертёж;
- Доказать, что чертёж выполнен верно;
- Сформулировать вывод.

Гипотеза: Если я смогу доказать правильность моего решения, то смогу утверждать, что эта задача не является неразрешимой.

Работа будет состоять из нескольких частей, посвящённых решению этой задачи: теоретическая часть, практическая (решение и доказательство) и, конечно же, вывод.

2. Основная часть

2.1. Теоретические сведения

Возникновение задачи о трисекции угла связанно с потребностями в архитектуре и строительной технике. В период с VI века до н.э. до настоящего времени многие математики бились и бьются над решением этой проблемы. В их числе самые гениальные – Гиппократ Хиосский, Архимед Сиракузский, Декарт, Ньютон, Эйлер, Гиппий, Никомед и др.

Доказано, что трисекция угла в общем случае невыполнима с помощью циркуля и линейки, но существуют кривые, с помощью которых это построение можно выполнить: Улитка Паскаля[1] или трисектриса (см. приложение 1), Квадратриса[2] (в древности тоже называлась трисектрисой) (см. приложение 2), Конхоида[3] Никомеда (см. приложение 3), Спираль Архимеда (см. приложение 4), невсис[4] (см. приложение 5), а также построение с помощью плоского оригами (см. приложение 6).

Я рассмотрю несколько способов решения трисекции угла, известных с древнейших времён:

Построение трисекции с помощью квадратрисы:

1) В квадрат ABCD вписан сектор четверти окружности. По дуге сектора точка E движется от точки D к точке B. В это же время Отрезок A'B' равномерно движется из DC в AB пересечение радиуса сектора и

---

[1] *Улитка Паскаля* — плоская алгебраическая кривая 4-го порядка; подера окружности, конхоида окружности относительно точки на окружности, частный случай Декартова овала, она также является эпитрохоидой. Названа по имени Этьена Паскаля (отца Блеза Паскаля), впервые рассмотревшего её.

[2] *Квадратриса* — плоская трансцендентная кривая, определяемая кинематически. Была предложена в античные времена для решения задач квадратуры круга и трисекции угла.

[3] *Конхоида кривой* — плоская кривая, получающаяся при увеличении или уменьшении радиус-вектора каждой точки данной плоской кривой на постоянную величину.

[4] *Невсис* — метод геометрического построения, цель которого — вписать отрезок заданной длины между двумя кривыми линиями таким образом, чтобы этот отрезок или его продолжение проходил через заданную точку.

прямой A'B' на протяжении одновременного движения сверху вниз кривая пересечения образует квадратрису.

2) Отмечаем на квадратрисе точку F и находится её ордината A'
3) На отрезке AA' откладывается третья часть, получается ордината H, которая соответствует точке K
4) Получается, данный угол FAB, а 1/3 этого угла – это угол KAB
5) Такой же угол можно отложить выше угла KAB => трисекция угла.

Софист Гиппий в V веке до нашей эры использовал квадратрису для решения трисекции угла.

Построение трисекции с помощью невсиса:

Дана полуокружность с радиусом OM, P ϵ данной полуокружности => ∟POM=α; необходимо построить угол β=α/3

1) Возьмём линейку, отложим на ней отрезок a=OM=AB
2) Приложив линейку так, чтобы B ϵ полуокружности, A ϵ продолжению OM и чтобы линейка проходила через точку P
3) Получается ∟BAO=β=α/3

Доказательство:

1) Т. к. AB=A=R=OM => BO=R=AB =>△ ABO – равнобедренный => ∟BAO=∟BOA=β
2) A ∟PBO=2β, т. к. ∟PBO – внешний для △ABO
3) △BOP: ∟PBO=∟BPO=2β => ∟BOP=180°-4β
4) С другой стороны, ∟BOP=180°-(β+α)
5) Значит, 180°-4β=180°-(β+α) => 3β=α => β=α/3 => трисекция выполнена, если отложить 3 угла BOA внутри ∟POM.

При решении трисекции угла и других задач, невсис использовали: Архимед(287—212 годы до н.э.) и Гиппократ Хиосский (около 430 года до н.э.).

Даже сейчас в печати появляются сообщения о найденных новых методах решения задачи. Но все они, как десятки и сотни, предлагавшихся ранее, страдают одним недостатком: используют, кроме циркуля и линейки, дополнительные средства – то трансцендентные кривые, которые не могут быть построены циркулем и линейкой, то какие-то механизмы, то специально изготовленные для этой цели вспомогательные инструменты. Тем самым не выполняется основное условие – "только с помощью циркуля и линейки".

2.2. Мои исследования

Я недавно нашла возможное решение данной задачи, оно заключается в утроении данного угла. Мне этот подход очень понравился. Но в этом случае нужно построить 3 равных равнобедренных треугольника, а это возможно с применением линейки с делениями. Но, в начале IV века до н.э. в "школе Платона" обосновали необходимость решения геометрических задач за счёт построения циркулем и линейкой. С тех пор и до настоящего времени формулировка задачи трисекции угла звучит так: "С помощью только циркуля и линейки требуется разделить произвольный угол на три равные части". При этом делений на линейке не должно быть, а в процессе построения никаких отметок на ней делать не допускается. Ибо, согласно Платону, все построения циркулем и линейкой должны вытекать из теоретических рассуждений, то есть из мысленных построений. Значит, предложенное решение не будет полностью удовлетворять условию задачи.

Есть ещё одно решение, но оно осуществляется по принципу оригами. Этот способ называется «Трисекция и папирофлексия[5]» (Предлагаю сделать это всем вместе)[5].

Алгоритм действий (см. приложение 6):

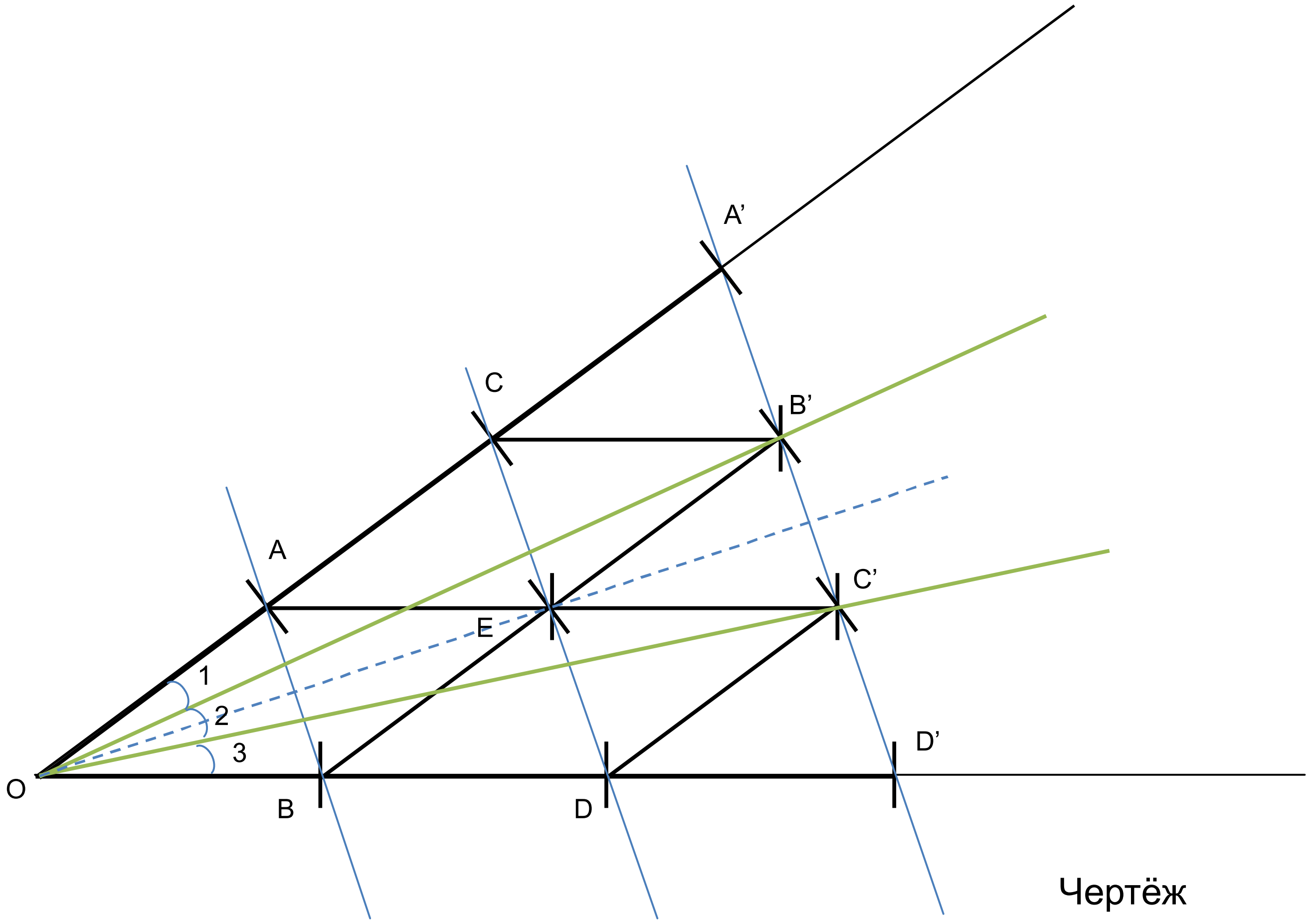
1. Берём любой лист бумаги, отмечаем угол альфа.
2. Проводим две параллельные нижней стороне листа линии, «режущие» отмеченную ими часть листа на две одинаковые полосы.
3. Загибаем угол листа так, чтобы нижний угол листа «попал» на нижнюю параллель, а начальная точка верхней параллели – на верхнюю сторону нашего угла альфа.
4. Через наклонный отрезок нижней параллели проводим линию и складываем лист по ней.
5. Разворачиваем лист и простым складыванием бумаги делим получившийся угол пополам.

[5] Папирофлексия – искусство складывания бумаги, базирующееся на знании основных геометрических законов.

Мы разделили наш угол на три равные части.

Это решение также не удовлетворяет условию задачи, так как мы не использовали циркуль, и для того чтобы разделить двумя параллельными прямыми часть листа на две одинаковые полосы, нам потребовались деления на линейке, что также недопустимо по условию задачи.

2.3. Собственное решение и доказательство



Чертёж

Доказательство (см. Чертёж):

1) OA’=3R; OD’=3R ⟹ OA’=OD’ => △ OA’D’ – равнобедренный => => ∟OA’D’=∟OD’A’

2)△A’CB’ – равнобедренный, т.к. CA’=CB’=R =>∟B’A’C(∟OA’D’)=∟CB’A’

3)△DC’D’ – равнобедренный, т.к. C’D=D’D=R =>∟C’D’D(∟OD’A’)=∟D’C’D

4) ∟B’A’C=∟CB’A’=∟OA’D’ =>∟A’CB’=180°-2*∟OA’D’

∟C’D’D=∟D’C’O=∟OD’A =>∟C’DD’=180°-2*∟OD’A’

∟OA’D’-∟OD’A =>∟A’CB’=∟C’DD’

5)△ △ A’CB’= C’DD’(по I признаку):

1. A’C=B’C=R
2. C’D=D’D=R ⟹ A’C=B’C=C’D=D’D=R
3. ∟ACB=∟C’DD’

6) Из равенства треугольников следует, что A’B’=C’D’

7) По обратной теореме Фалеса[6]: CD□A'D', т.к. CA'=DD'=R

8) CD□A'D', CB' – секущая =>∟A'B'C=∟B'CE

9) CB'=EB'=R =>△CB'E – равнобедренный => ∟CEB'=∟B'CE

10) ∟CB'E=180°-2*∟CEB'(∟CEB'=∟B'CE)
∟B'CE=∟CA'B'=∟OA'D'=∟A'B'C ⇒ ∟CB'E=∟A'CB'

11) Аналогично можно доказать, что: ∟EC'D=∟A'CB'=∟C'DD'=∟CB'E

12) ∟B'EC'=180°-(∟CEB'+∟C'ED), т.к. ∟B'EC' – развернутый
∟CEB'=∟EC'D=∟A'CB' ⇒

⇒∟B'EC'=∟EC'D=∟A'CB'=∟C'DD'=∟CB'E

13) Значит, △B'EC=△A'CB'(по I признаку):

1.A'C=B'E=R

2.B'C=C'E=R

3.∟A'CB'=∟B'EC'

14) △B'EC=△A'CB'
△A'CB'=△C'DD' ⇒ △B'EC=△A'CB'=△C'DD'

15) Из равенства треугольников следует, что A'B'=B'C'=C'D'

16) Значит, ∟1=∟2=∟3

<u>Ч. т. д.</u>

---

[6] *Обратная теорема Фалеса:* Если прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной и на другой стороне угла равные (или пропорциональные) между собой отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.

2.4. Итог

После тщательного изучения своего решения, я нашла у себя недочёт. Он состоит в том, что против равных сторон не всегда лежат равные углы. Некоторое время после этого я пыталась найти другие подходы в доказательстве, но все попытки сводились к похожему результату.

Жалко, что у меня не получилось доказать, что можно осуществить трисекцию угла с помощью циркуля и линейки, но так я убедилась в том, что эта задача действительно является неразрешимой без помощи дополнительных средств.

По завершении своего исследования я обнаружила небольшую ошибку в своём решении, а это значит, что проделав некоторые действия: чертёж, доказательство и анализ доказательства, я не пришла к поставленной цели: доказательстве, что трисекция угла не является неразрешимой задачей. Но, я считаю, что полученный мною результат тоже результат. Ведь я проделала огромную работу на пути исследования.

Однако мне хотелось бы отметить, что на протяжении всей работы мне было очень интересно искать различные способы «решения» этой задачи, выяснять подход авторов этих «решений», ну и, конечно же, выполнение собственного чертежа и доказательства.

3. Вывод

Несмотря на то, что уже тысячи лет великие умы человечества ищут способы осуществления трисекции угла с помощью циркуля и линейки, до сих пор решения не найдено. Это говорит о том, что она действительно не осуществима для большинства углов.

Но всё равно находятся те, кто пытается предложить свой вариант решения, но впоследствии они опровергаются из-за какого-то маленького недочёта.

Я оказалась в числе тех, кто остался не равнодушным к этой задачи и кто потратил своё время на поиск своего, уникального решения. Я не жалею, я однажды открыла для себя задачу о трисекции угла, ведь, благодаря процессу построения чертежей и выполнению доказательства, человек ищет какие-то алгоритмы, которые помогает ему мыслить логически. А без логики человеку в современном мире приходится очень тяжело.

Я считаю, что каждому необходимо хотя бы пытаться находить различные способы решения одной и той же задачи, так как это развивает человека, заставляет его мыслить рационально.

Надеюсь, что в следующей моей работе я представлю во внимание ещё более интересную неразрешимую или ещё не доказанную задачу, постараюсь в ней разобраться и найти какие-нибудь пути её разрешения.

4. Список литературы

1. Архимед. Достижения в математике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.univer.omsk.su/omsk/Edu/Math/aarhimed.htm.

2. Архимед. Научная деятельность. Математика [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Архимед.

3. Архимедова спираль [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Архимедова_спираль.

4. Квадратриса. Кинематическое определение. Применение [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Квадратриса.

5. Квадратура круга [Текст]: история одной головоломки. // Занимательные головоломки. – 2012. - №3 (3 марта). – С. 13-14.

6. Конхоида Никомеда [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Конхоида_Никомеда.

7. Невсис. Применение [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Невсис.

8. Попов, Н. С. Трисекция угла [Электронный ресурс] / Н.С. Попов // Юный техник. – 1994. - №12. – Режим доступа: http://nanoworld.org.ru/data/01/data/texts.rus/9960228.htm.

9. Теорема Фалеса. Задача № 385 [Текст] // Атанасян Л. С. Геометрия. 7-9 кл. – 17-е изд. – М.: Просвящение. – 2007. – С. 105-106.

10. Трисекция угла [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Трисекция_угла.

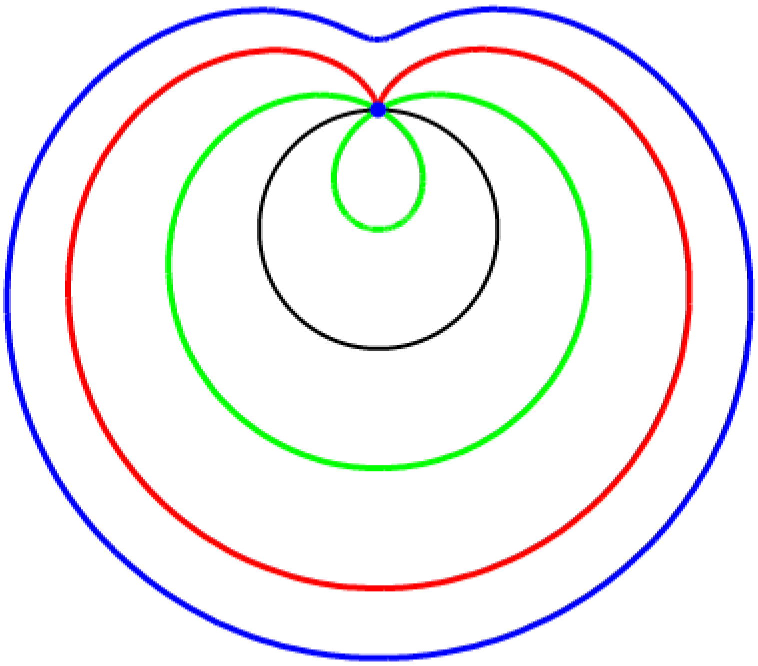
11. Улитка Паскаля [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Улитка_Паскаля.

12. Энциклопедия для детей. Математика [Текст]. - 2-е изд., перераб. / ред. кол.: М. Аксенова, В. Володин, М. Самсонов. – М.: Мир Энциклопедий Аванта +; Астрель, 2007. – 621[3] с.: ил.

Приложения

Приложение 1

Рисунок 1. Улитка Паскаля

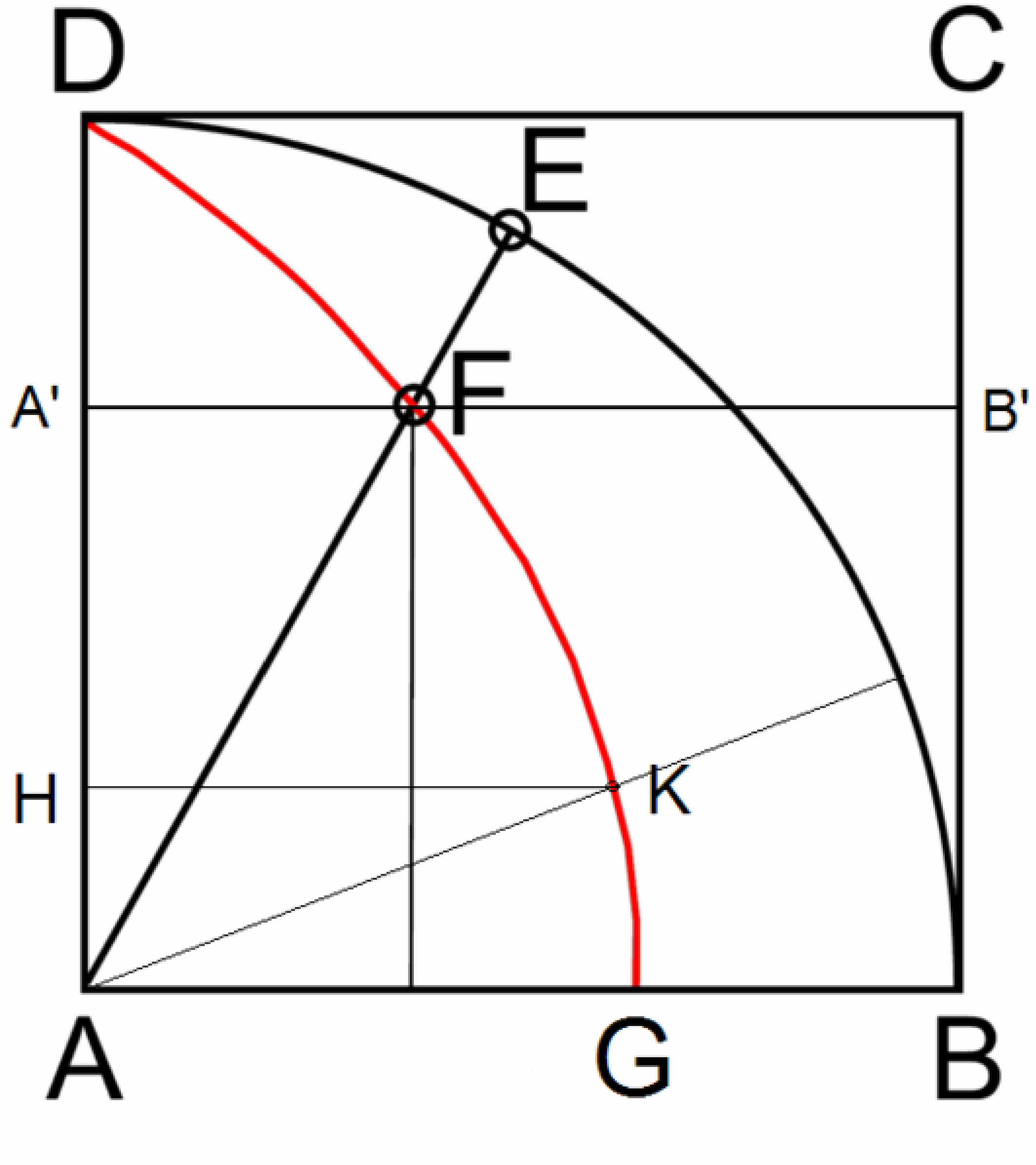


Три улитки паскаля, конхоиды чёрной окружности: зелёная $a>l$, красная (кардиоида) $a=l$ и синяя $a<l$.

В случае $l=2a$, улитка Паскаля также называется трисектриса. Такое название она получила из-за того, что если на плоскости задана трисектриса, то трисекцию угла можно построить с помощью циркуля и линейки.

Приложение 2

Рисунок 2. Квадратриса



Приложение 3

Рисунок 3. Конхоида Никомеда

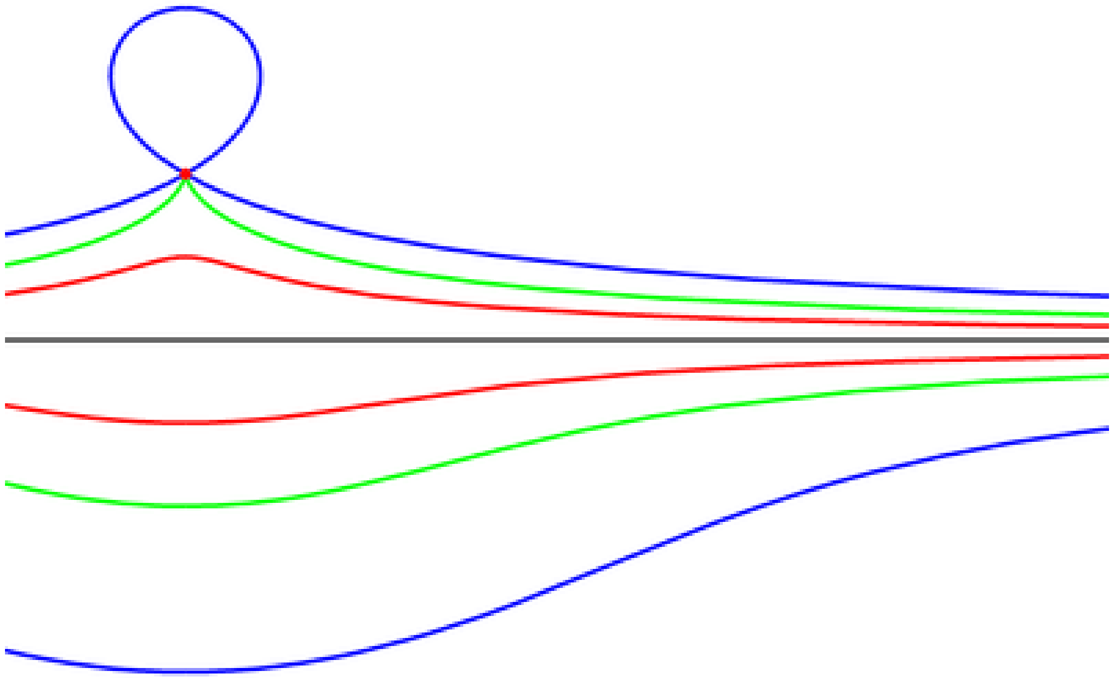


Рисунок 4. Архимедова спираль

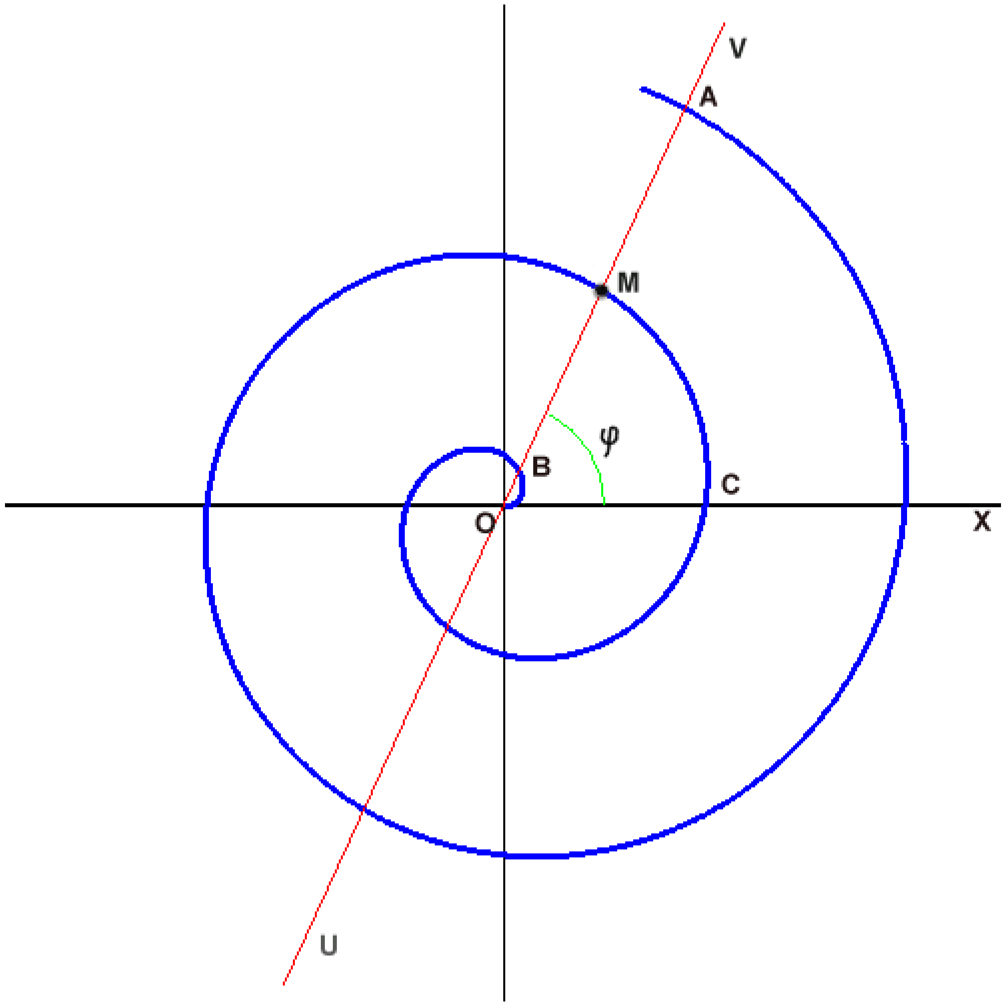
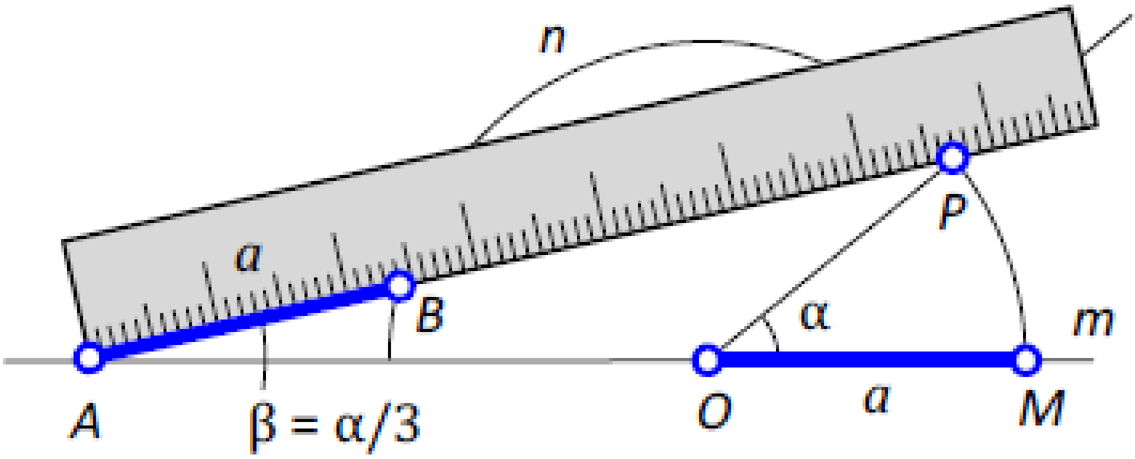
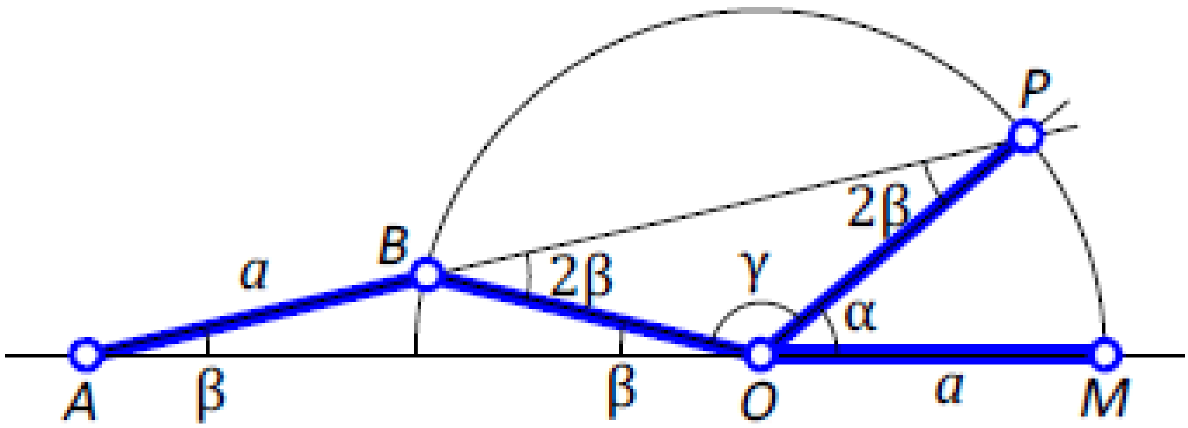


Рисунок 5. Невсис

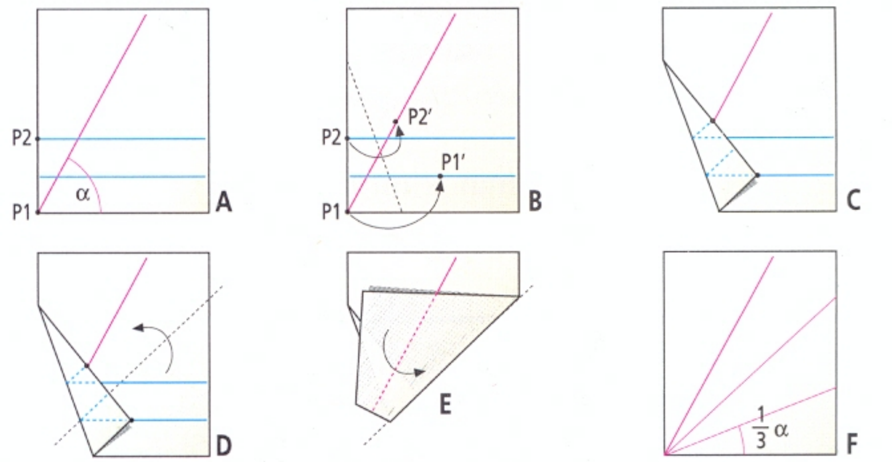




Приложение 6

Рисунок 6. Построение трисекции с помощью плоского оригами

Трисекция и папирофлексия



Трисекцию угла можно произвести с помощью папирофлексии — этим термином называется искусство складывания бумаги, базирующееся на знании основных геометрических законов. Алгоритм действий тут таков. Берем любой лист бумаги, отмечаем угол альфа и проводим две параллельные нижней стороне листа линии, «режущие» отмеченную ими часть листа на две одинаковые полосы (A). Загибаем угол листа так, чтобы нижний угол листа P1 «попал» на нижнюю параллель, а начальная точка верхней параллели P2 — на верхнюю сторону нашего угла альфа (B и C). Через наклонный отрезок нижней параллели проводим линию (D) и складываем лист по ней (E). Разворачиваем лист и простым складыванием бумаги делим получившийся угол пополам (F). В результате наш угол оказывается поделенным на три равных угла.