

Краевая научно-практическая конференция учебно-исследовательских и
проектных работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

**Численные методы решения краевых задач
теплопроводности**

Меншарапов Руслан,
10 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Цаплин Алексей Иванович,
д.т.н., профессор

Пермь. 2013.

Содержание

Введение.....	3
1 Постановка задачи стационарной теплопроводности плоского слоя.....	4
2 Методы решения.....	6
2.1 Метод прогонки.....	6
2.2 Метод последовательной линейной верхней релаксации.....	7
3 Программы реализации.....	9
3.1 Программа реализации метода прогонки.....	9
3.2 Программа реализации метода последовательной линейной верхней релаксации.....	11
4 Анализ полученных результатов.....	13
4.1 Анализ метода прогонки.....	13
4.2 Анализ метода последовательной линейной верхней релаксации.....	15
5 Постановка двумерной задачи нестационарной теплопроводности.....	18
6 Методы решения.....	20
6.1 Решение задачи по явной схеме.....	20
6.2 Метод расщепления.....	23
Заключение.....	26
Список использованной литературы.....	27

Введение

Численное решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – одна из наиболее часто встречающихся задач в научно-технических исследованиях. Такая задача возникает в математической физике (численное решение дифференциальных и интегральных уравнений), экономике, статистике, а также в металлургии. На сегодняшний день, оптимизация технологических процессов в металлургии, связанных с переносом и использованием тепловой энергии, предъявляет все более сложные требования к расчету

теплообмена. Для технологических схем, например, получения литого металла, в которых необходимость отвода или перераспределения тепла раньше вообще не принималась во внимание или учитывалась упрощенно с использованием эмпирических соотношений теории подобия, теперь требуется применение достаточно точных методов теплового расчета. Существуют прямые и итерационные способы решения СЛАУ. Метод прогонки является прямым способом, а метод последовательной линейной верхней релаксации относится к итерационному.

Целью данной работы является ознакомление с основными методами решения задач стационарной и нестационарной теплопроводности и их анализ.

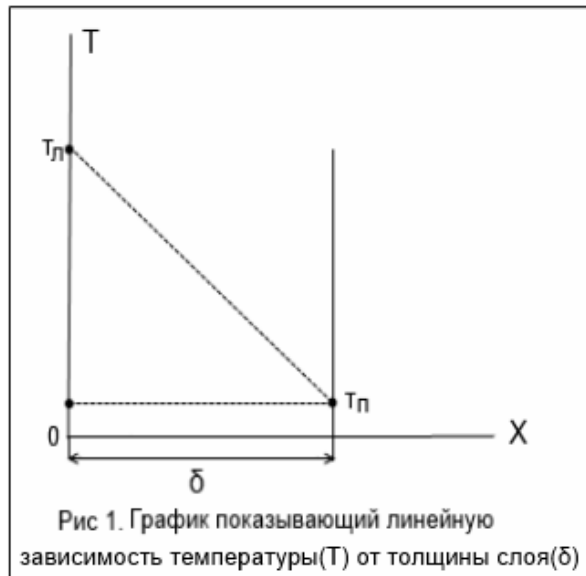
1. Постановка задачи стационарной теплопроводности плоского слоя

В качестве теста для проверки методов прогонки и последовательной линейной верхней релаксации предлагается задача стационарной теплопроводности плоского слоя толщиной δ на поверхностях которого $x = 0$ и $x = \delta$ поддерживаются температуры соответственно T_l и T_n , т.е. заданы граничные условия первого рода ($\alpha = \infty$). Математическая формулировка краевой задачи теплопроводности имеет вид

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0. \quad T(x = 0) = T_l. \quad T(x = \delta) = T_n.$$

Решением ее является линейное распределение температуры:

$$T = T_l - \frac{T_l - T_n}{\delta} x.$$



Решение задачи на регулярной сетке дает систему уравнений с граничными условиями:

$$\begin{aligned}T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} &= 0; \\i &= 2, 3, \dots, N; \\T_1 &= T_l; \quad T_{N+1} = T_n;\end{aligned}$$

В этом случае при численном решении на регулярной сетке с четным числом разбиений N точное значение температуры в центре слоя $T_{N/2+1} = (T_l + T_n)/2$, а приближенное значение отличается от точного из-за ошибок округления при вычислении прогоночных коэффициентов.

Ошибку

можно вычислить по формуле:

$$\varepsilon = \left| \frac{T_{N/2+1} - T_y}{T_y} \right| 100\%$$

Данную формулу, в дальнейшем, можно применить для анализа точности методов решения задачи.

2. Методы решения

2.1 Метод прогонки

Метод прогонки является модификацией метода исключения Гаусса.
Решение системы

$$AT_{i-1} + BT_i + CT_{i+1} = F_i, \quad i=2, 3, \dots, N, \quad (2.1)$$

ищется в виде линейной функции. В частности, для (i-1)-й точки эта функция имеет вид

$$T_{i-1} = \beta_i T_i + z_i \quad (2.2)$$

где β_i, z_i – неизвестные пока вспомогательные коэффициенты.
Подставим
(2.2) в (2.1):

$$A(\beta_i T_i + z_i) + BT_i + CT_{i+1} = F_i \quad (2.3)$$

откуда находим

$$T_i = -\frac{c}{a\beta + b_i} T_{i+1} - \frac{az_i - f_i}{a\beta_i + b} \quad (2.4)$$

Полученное соотношение имеет ту же форму, что и функция (2.2), только для (i-й) точки

$$T_i = \beta_{i+1} T_{i+1} + z_{i+1} \quad (2.5)$$

Откуда заключаем, что неизвестные коэффициенты определяются из соотношений:

$$\beta_{i+1} = -\frac{C}{A\beta_i + B}; \quad z_{i+1} = -\frac{Az_i - F_i}{A\beta_i + B} \quad (2.6)$$

Полученные коэффициенты называются прогоночными.

Формулы (2.5 – 2.6) дают процедуру решения. Сначала при $i = 2, 3, \dots, N$ считаются прогоночные коэффициенты (β_{i+1}, z_{i+1}), при этом начальные значения прогоночных коэффициентов β_2, z_2 определяются из граничных

условий на левой границе ($i = 1$). Эта операция называется прямой прогонкой. После определения всех β_i, z_i в обратном направлении ($i = N, N-1, \dots, 2$) с учетом значения параметра T_{N+1} , найденных из граничного условия на правой границе ($i = N + 1$), по формуле (2.5) последовательно находятся неизвестные значения T_i в узловых точках сетки.

2.2 Метод последовательной линейной верхней релаксации

Наряду с прямыми методами для решения сеточных уравнений применяются итерационные методы, дающие решения в виде предела последовательности однообразных итераций. Основное их преимущество перед прямыми методами заключается в самокорректирующемся решении, дающем минимальные ошибки округления. Привлекает в них и простота вычислительного алгоритма.

Решение системы линейных алгебраических уравнений

$$AT_{i-1} + BT_i + CT_{i+1} = F_i, \quad i=2, 3, \dots, N, \quad (2.7)$$

в соответствии с итерационным методом последовательных смещений (методом Зейделя) определяется по итерационной процедуре:

$$T_i^{(q)} = \frac{1}{B} \left(F_i - A \cdot T_{i-1}^{(q)} - C \cdot T_{i+1}^{(q-1)} \right) \quad (2.8)$$
$$i=2, 3, \dots, N, \quad q=1, 2, 3, \dots,$$

где q - номер итерации. Расчет по формуле (2.8) продолжается до тех пор, пока искомое решение не будет удовлетворять требуемой наперед заданной точности eps :

$$\left| 1 - \frac{T_i^{(q-1)}}{T_i^{(q)}} \right|_{\max} \leq eps \quad (2.9)$$

Недостатком метода Зейделя является медленная сходимость, поэтому для ускорения сходимости используют метод последовательной линейной верхней релаксации:

$$T_i^{(q)} = \frac{\gamma}{B} \left(F_i - A \cdot T_{i-1}^{(q)} - C \cdot T_{i+1}^{(q-1)} \right) + (1 - \gamma) \cdot T_i^{(q-1)} \quad (2.10)$$
$$i=1, \dots, N-1, \quad q=1, 2, \dots,$$

где γ - параметр релаксации. При $\gamma=1$ итерационные процедуры (2.8) и (2.10) совпадают. Введение параметра верхней релаксации $1 \leq \gamma \leq 2$ позволяет ускорить сходимость итерационного процесса (4.4). причем наибольшая скорость сходимости имеет место при оптимальном значении параметра релаксации $\gamma = \gamma_{\text{опт}}$. Последнее зависит от порядка системы и может быть вычислено в области с регулярной сеткой с

числом разбиений N по формуле:

$$\gamma_{om} = \frac{2}{1 + \sqrt{\sin \frac{\pi}{2N} \left(2 - \sin \frac{\pi}{2N} \right)}} \quad (2.11)$$

3. Программы реализации

3.1 Программа реализации метода прогонки

Паскаль-программа для решения стационарного уравнения теплопроводности методом прогонки.

```
program progonka;
const n = 4;
h = 1/n;
var T: array [0..n] of real;
beta,zeta : array [1..n] of real;
a,b,c,f,e,sr: real;
T1,T2: real;
i,m: integer;
begin
  {1. Ввод исходных данных}
  T1:=100;      {температура левого конца}
  T2:=200;     {температура правого конца}
  sr:=(t1+t2)/2;
  m:=round(n/2);
  {2. Рабочий блок}
  a := -1;
  b := 2;
  c := -1;
  f := 0;
  {Прямой ход прогонки}
  beta[1]:= 0;
  zeta[1]:= T1;
  for i:=1 to n-1 do
  begin
    beta[i+1]:= -c/(a*beta[i] + b);
    zeta[i+1]:= (f-a*zeta[i])/(a*beta[i] + b);
  end;
  {Обратный ход прогонки}
  T[n]:= t2;
  for i:=n-1 downto 0 do
  T[i]:=beta[i+1]*T[i+1]+ zeta[i+1];
  e:=abs((t[m]-sr)/sr)*100;
  writeln;
  {3. Вывод результата}
  for i:=1 to n do
  writeln('T[' ,i, ' ] ',T[i]:8:3);
  writeln('e=',e,'%');
end.
```

Алгоритм программы реализуется при $N=4$, $T_n=100$, $T_n=200$, $A=C=1$, $B=-2$ следующим образом:

Прямой ход прогонки:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 0; \quad z_1 = T_n = 100; \\ \beta_2 &= -\frac{C}{A\beta_1 + B} = \frac{1}{1 \cdot 0 - 2} = \frac{1}{2}; \quad z_2 = -\frac{Az_1 - F_1}{A\beta_1 + B} = -\frac{1 \cdot 100 - 0}{1 \cdot 0 - 2} = 50; \\ \beta_3 &= -\frac{C}{A\beta_2 + B} = \frac{1}{1 \cdot 1/2 - 2} = \frac{2}{3}; \quad z_3 = -\frac{Az_2 - F_2}{A\beta_2 + B} = -\frac{1 \cdot 50 - 0}{-3/2} = \frac{100}{3}; \\ \beta_4 &= -\frac{C}{A\beta_3 + B} = \frac{1}{1 \cdot 2/3 - 2} = \frac{3}{4}; \quad z_4 = -\frac{Az_3 - F_3}{A\beta_3 + B} = -\frac{1 \cdot 100/3 - 0}{1 \cdot 2/3 - 2} = 25;\end{aligned}$$

Обратный ход прогонки:

$$\begin{aligned}T_4 &= T_n = 200; \\ T_3 &= \beta_4 T_4 + z_4 = \frac{3}{4} \cdot 200 + 25 = 175; \\ T_2 &= \beta_3 T_3 + z_3 = \frac{2}{3} \cdot 175 + \frac{100}{3} = 150; \\ T_1 &= \beta_2 T_2 + z_2 = \frac{1}{2} \cdot 150 + 50 = 125; \\ T_0 &= T_n = 100;\end{aligned}$$

3.2 Программа реализации метода последовательной линейной верхней релаксации

Паскаль-программа для решения стационарного уравнения теплопроводности методом последовательной линейной верхней релаксации:

```
program relax;
const n=4;
h = 1/n;
pi =3.141592654;
epsilon = 10e-3;
gamma = 2/(1+sqrt(sin(pi/2/n*(2-sin(pi/2/n)))));
var T,Tx: array [0..n] of real;
a,b,c,f,delta,e,sr : real;
i,iter,m : integer;
begin
  {1. Ввод исходных данных}
  T[0]:=100;
  T[n]:=200;
  sr:=abs((T[0]+T[n])/2);
  m:=round(n/2);
  for i:=0 to n-1 do T[i]:= T[0];
  Tx[0]:=T[0];
  Tx[n]:=T[n];
  {2. Рабочий блок}
  a := 1;
  b :=-2;
  c := 1;
  f := 0;
  {Релаксация}
  iter:=1;
  repeat
  delta:=0;
  for i:=1 to n-1 do
  begin
  Tx[i]:= gamma/b*(f-a*Tx[i-1]-
  c*T[i+1])+(1-gamma)*T[i];
  if (tx[i]=0) then delta:=1 else
  if abs(1-T[i]/Tx[i]) > delta
  then delta:=abs(1-T[i]/Tx[i]);
  end;
  T := Tx;
  iter := iter + 1
```

```

until (delta < epsilon);
e:=abs((T[m]-sr)/sr)*100;
{3. Вывод результата}
For i:=1 to n do
writeln(i, ' ', T[i]:8:10);
writeln('iter=', iter);
writeln('e=', e, '%');
writeln('gamma=', gamma);
end.

```

В таблице 1 представлена реализация итерационного алгоритма программы при $N=4$, $T_n=200$, $T_n=100$, $A=C=1$, $B=-2$, $\gamma=1$ для первых пяти итераций.

Таблица 1

Значения переменных при решении задачи итерационным методом

Номер итерации	Номер точки сетки i				
	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0
1	200	100	50	75	100
2	200	125	100	100	100
3	200	150	125	112,5	100
4	200	162,5	137,5	118,75	100
5	200	168,75	143,75	121,875	100
... точное решение	200	175	150	125	100

Относительная ошибка в точке $i=2$: $1 - T_1^{(4)}/T_1^{(5)} = 1 - 162,5/168,75 = 0,037$, что составляет 3,7% это далеко от требуемой точности, которую выбирают в пределах $\varepsilon = 10^{-3} \dots 10^{-4}$, поэтому итерационный процесс продолжается.

4. Анализ полученных результатов

4.1 Анализ метода прогонки

В ходе работы с программой, реализующей метод прогонки, была определена относительная погрешность на сгущающейся сетке в центральной точке слоя численного $T_{N/2+1}$ и аналитического $T(x=\delta/2)=(T_{\text{л}} + T_{\text{п}})/2$ решений по формуле:

$$E = \left| \frac{T_{N/2+1} - T_{x=\delta/2}}{T_{x=\delta/2}} \right| \cdot 100\% \quad (4.1)$$

Она возникает из-за ошибок округления при вычислении прогоночных коэффициентов. Для уменьшения погрешности в программу были внесены коррективы для расчета прогоночных коэффициентов с двойной точностью. Зависимость относительной погрешности от числа разбиений регулярной сетки при одинарной и двойной точности изображена на графике:

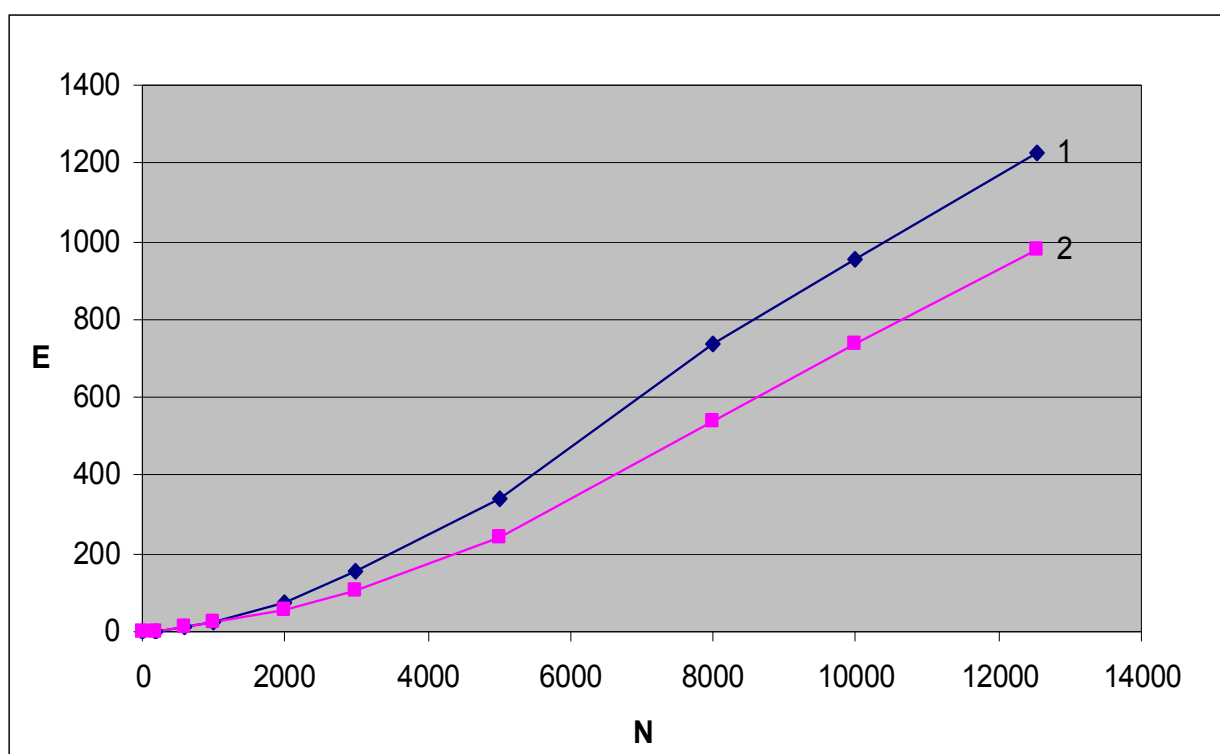


Рис.2 Зависимость относительной погрешности (E), выраженной в 10^{-12} %, от числа разбиений регулярной сетки (N). Счет с одинарной(1) и двойной(2) точностью.

Как видно из графика погрешность, возникающая при расчете прогонных коэффициентов с двойной точностью, значительно меньше погрешности при расчете с одинарной точностью. Однако при счете с двойной точностью программа работает медленнее:

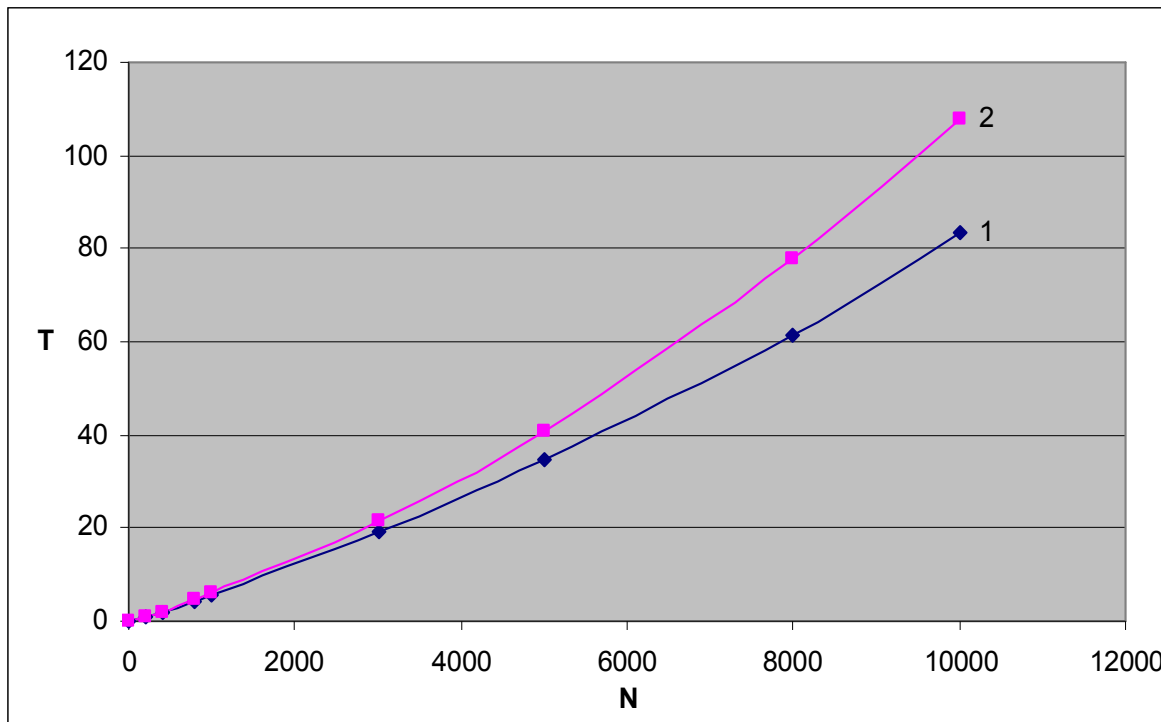


Рис.3 Зависимость времени (T), выраженного в секундах, от числа разбиений регулярной сетки (N). Счет с одинарной(1) и двойной(2) точностью.

Таким образом, точность следует выбирать в зависимости от поставленной задачи, если требуется уменьшить погрешность, нужно считать с двойной точностью, если необходимо сократить время выполнения программы - считать с одинарной.

4.2 Анализ метода последовательной линейной верхней релаксации

При помощи программы, реализующей метод последовательной линейной верхней релаксации, была определена относительная погрешность на сгущающейся сетке в центральной точке слоя численного $T_{N/2+1}$ и аналитического $T(x=\delta/2)=(T_n + T_p)/2$ решений по формуле (4.1). Она возникает из-за ошибок округления и зависит от наперед заданной точности (ε). Чем меньше значение заданной точности (ε), тем меньше относительная погрешность. Также погрешность зависит от числа разбиений регулярной сетки:

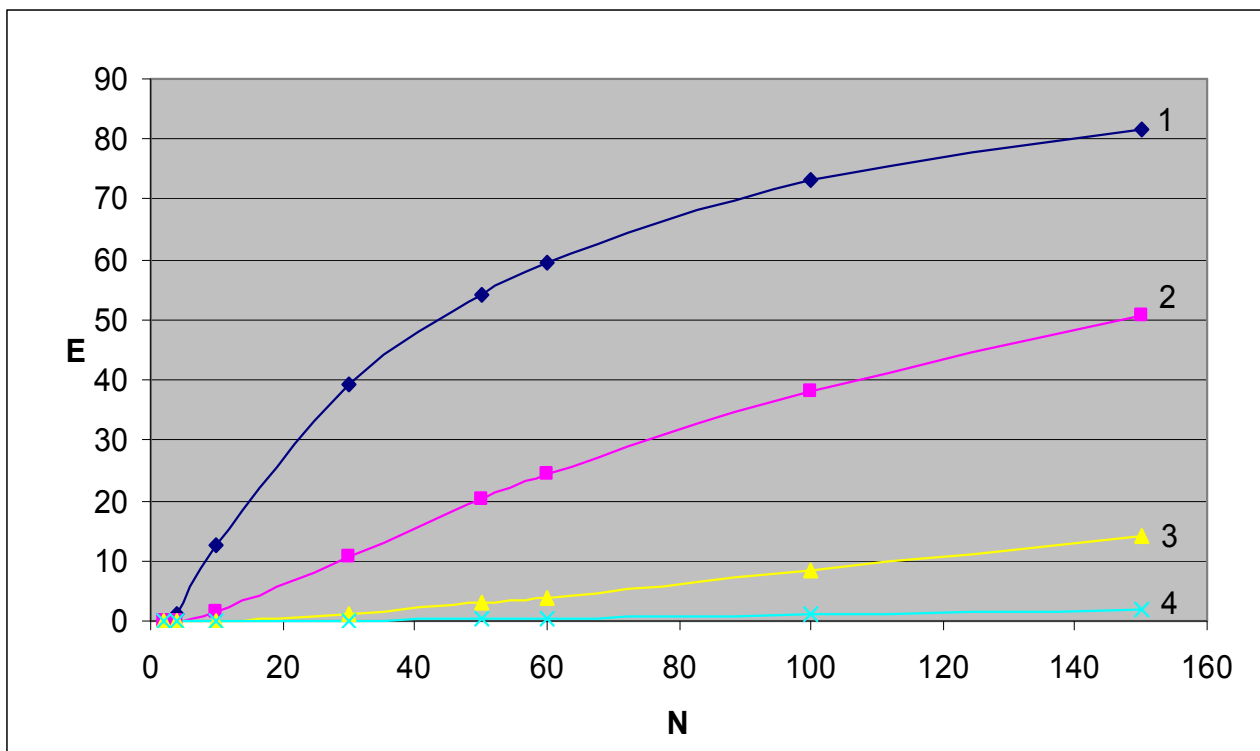


Рис.4 Зависимость относительной погрешности (E), выраженной в %, от числа разбиений регулярной сетки (N). Счет ведется с точностью(ε): 1) $\varepsilon = 10^{-2}$, 2) $\varepsilon = 10^{-3}$, 3) $\varepsilon = 10^{-4}$, 4) $\varepsilon = 10^{-5}$.

Но от заданной точности зависит также время выполнения программы. Чем меньше значение точности (ε) тем больше время выполнения:



Рис.5 Зависимость времени выполнения программы, выраженного в секундах, от числа разбиений регулярной сетки. Счет ведется с точностью(ϵ): 1) $\epsilon = 10^{-2}$, 2) $\epsilon = 10^{-3}$, 3) $\epsilon = 10^{-4}$, 4) $\epsilon = 10^{-5}$.

Также время выполнения программы зависит и от параметра релаксации γ , Введение параметра верхней релаксации $1 \leq \gamma \leq 2$ позволяет ускорить сходимость итерационного процесса. причем наибольшая скорость сходимости имеет место при оптимальном значении параметра релаксации $\gamma = \gamma_{\text{опт}}$:

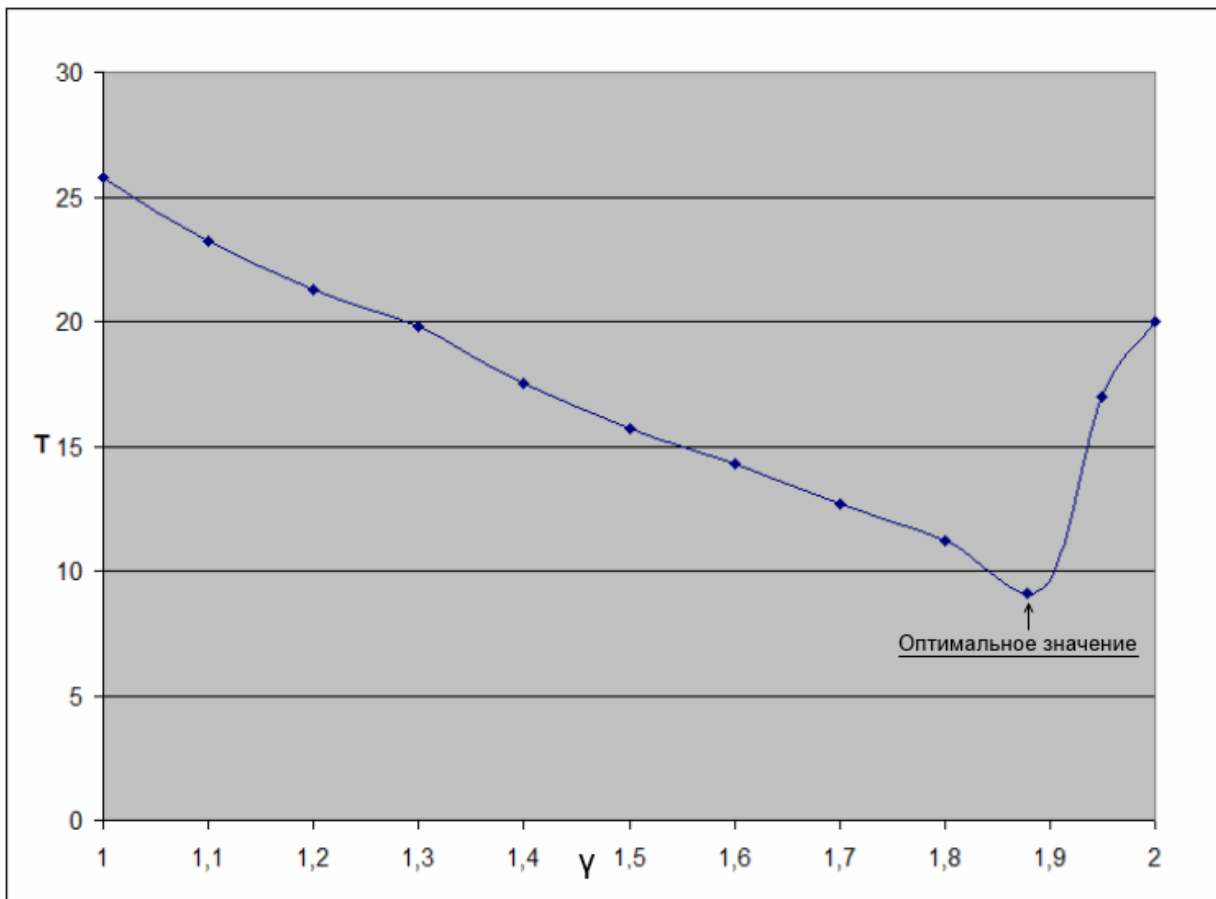


Рис.6 Зависимость времени выполнения программы (T),
выраженного в секундах, от значения параметра релаксации (γ).

Оптимальное значение параметра релаксации вычисляется по формуле:

$$\gamma_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{\sin \frac{\pi}{2N} \left(2 - \sin \frac{\pi}{2N} \right)}}$$

Для программы с числом разбиений регулярной сетки $N=1000$, $\gamma_{opt} \approx 1,894$.

Таким образом, чтобы сократить время выполнения программы, следует использовать оптимальное значение параметра релаксации γ , а также выбирать точность в пределах $\epsilon = 10^{-2} \dots 10^{-4}$. Но чтобы добиться меньших погрешностей точность должна быть не больше $\epsilon = 10^{-4}$.

5. Постановка двумерной задачи нестационарной теплопроводности.

Охлаждение бруса квадратного сечения (блюдса) размерами $2\delta \cdot 2\delta$ симметрично относительно осей координат, выбранных в центре бруса. Поэтому рассматривается четверть сечения бруса с охлаждаемой поверхностью и адиабатными осями симметрии (рис. 6.1).

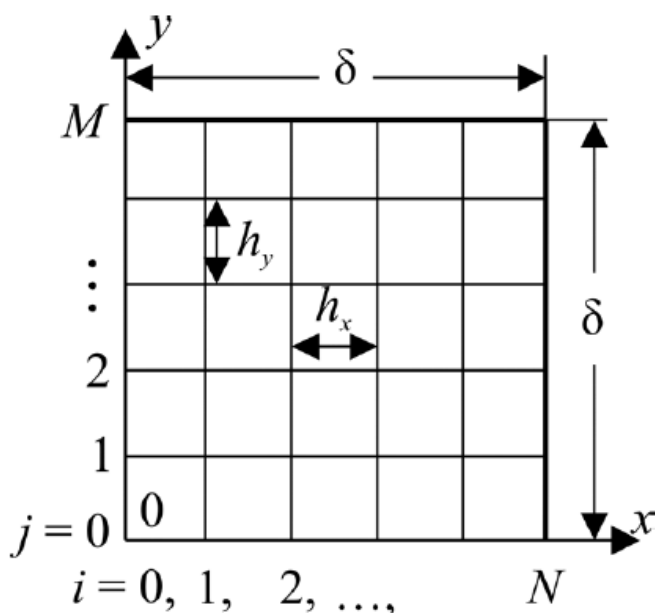


Рис.7 Разбиение расчетной области

Математическая формулировка краевой задачи нестационарной теплопроводности в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right),$$

$$T(x, y, 0) = T_0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0,$$

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\delta} = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\delta} = \alpha (T_{\text{п}} - T_{\text{с}}),$$

где T – температура; τ – время; a – коэффициент температуропроводности; λ – коэффициент теплопроводности; α – коэффициент теплоотдачи; T_p , T_c – температуры поверхности и окружающей среды.

Для численного решения задачи на расчетную область наносится регулярная сетка с координатами узлов:

$$x_i = ih_x; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N; \quad h_x = \delta/N,$$

$$y_j = jh_y; \quad j = 0, 1, 2, \dots, M; \quad h_y = \delta/M,$$

$$\tau_k = kh_\tau; \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где N , M – числа разбиений расчетной области соответственно в направлении координат x , y ; h_x , h_y , h_τ – соответственно шаги пространственной (по x , y) и временной (по τ) сеток; i , j , k – номера узловых точек в направлении координат x , y , τ .

6. Методы решения.

6.1 Решение задачи по явной схеме.

Уравнение теплопроводности (6.1) может быть представлено в дискретном виде по явной схеме, в соответствии с которой вторая производная по координатам записывается на текущем k -м временном слое с известным распределением температуры (рис. 6.2). В результате аппроксимации уравнения (6.1)

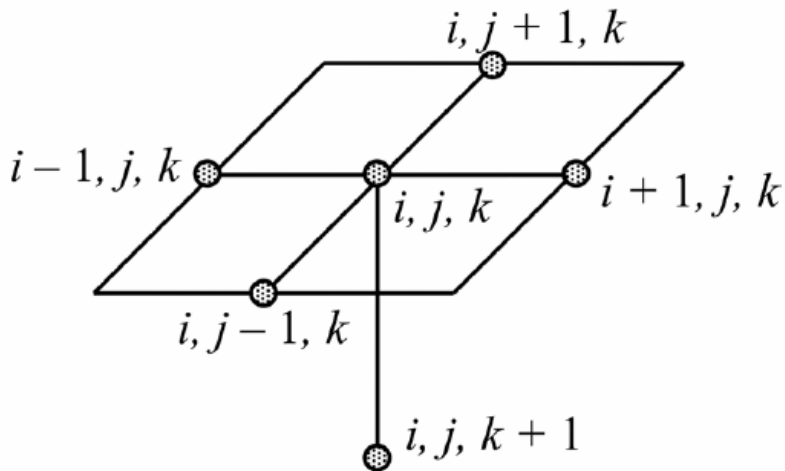


Рис.8 Сеточный шаблон явной схемы

$$\frac{T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}}{h_\tau} = a \left(\frac{T_{i-1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i+1,j,k}}{h_x^2} + \frac{T_{i,j-1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j+1,k}}{h_y^2} \right)$$

С применением формул односторонней разности записываются граничные условия (2) на поверхностях блюмса:

$$-\lambda \frac{T_{N,j} - T_{N-1,j}}{h_x} = \alpha (T_{N,j} - T_c),$$

$$-\lambda \frac{T_{i,M} - T_{i,M-1}}{h_y} = \alpha (T_{i,M} - T_c),$$

из которых определяется температура на поверхностях блюмса:

$$T_{N,j} = \frac{T_c + \frac{\lambda}{\alpha h_x} T_{N-1,j}}{1 + \frac{\lambda}{\alpha h_x}}, j = 1, \dots, M - 1;$$

$$T_{i,M} = \frac{T_c + \frac{\lambda}{\alpha h_y} T_{i,M-1}}{1 + \frac{\lambda}{\alpha h_y}}, i = 0, \dots, N - 1,$$

а также граничные условия на осях симметрии

$$T_{0,j} = T_{1,j}, j = 1, \dots, M - 1; T_{i,0} = T_{i,1}, i = 1, \dots, N - 1.$$

Угловые точки области (0,0; 0,М; N,0; N,М) в расчетах не участвуют. Для вычисления температур в угловых точках применяют аппроксимацию стационарного уравнения теплопроводности (1). Например, для угловой точки (N, М, рис. 6.3) это уравнение в конечных разностях принимает вид: разбиения

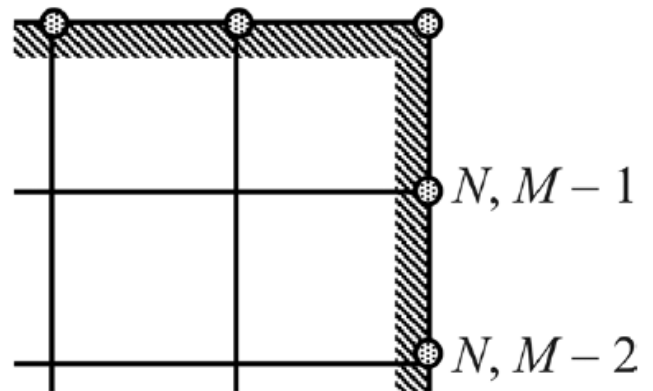


Рис.9 Фрагмент

расчетной области

$$\frac{T_{N-2,M} - 2T_{N-1,M} + T_{N,M}}{h_x^2} + \frac{T_{N,M-2} - 2T_{N,M-1} + T_{N,M}}{h_y^2} = 0,$$

из которого в частном случае при $h_x = h_y$ получаем формулу аппроксимации:

$$T_{N,M} = T_{N-1,M} + T_{N,M-1} - (T_{N-2,M} + T_{N,M-2})/2.$$

Аналогично для других угловых точек:

$$T_{0,0} = T_{1,0} + T_{0,1} - (T_{2,0} + T_{0,2})/2;$$

$$T_{0,M} = T_{0,M-1}; \quad T_{N,0} = T_{N-1,0}.$$

6.2 Метод расщепления.

При решении многомерного (двух- и трехмерного) уравнения переноса методом сеток объем вычислений резко возрастает по сравнению с решением одномерного уравнения. Идея расщепления заключается в том, что многомерное уравнение переноса сводится к сходящейся последовательности одномерных уравнений с одновременным сокращением числа арифметических операций.

Область покрывается регулярной сеткой:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= (i-1)h_x, \quad i=1, 2, \dots, N+1; \quad h_x = H_x/N, \\ y_j &= (j-1)h_y, \quad j=1, 2, \dots, M+1; \quad h_y = H_y/M, \\ \tau_k &= (k-1)h_\tau, \quad k=1, 2, \dots, h_\tau, \end{aligned} \right\}$$

где N, M – числа разбиений области в направлении координат x, y .

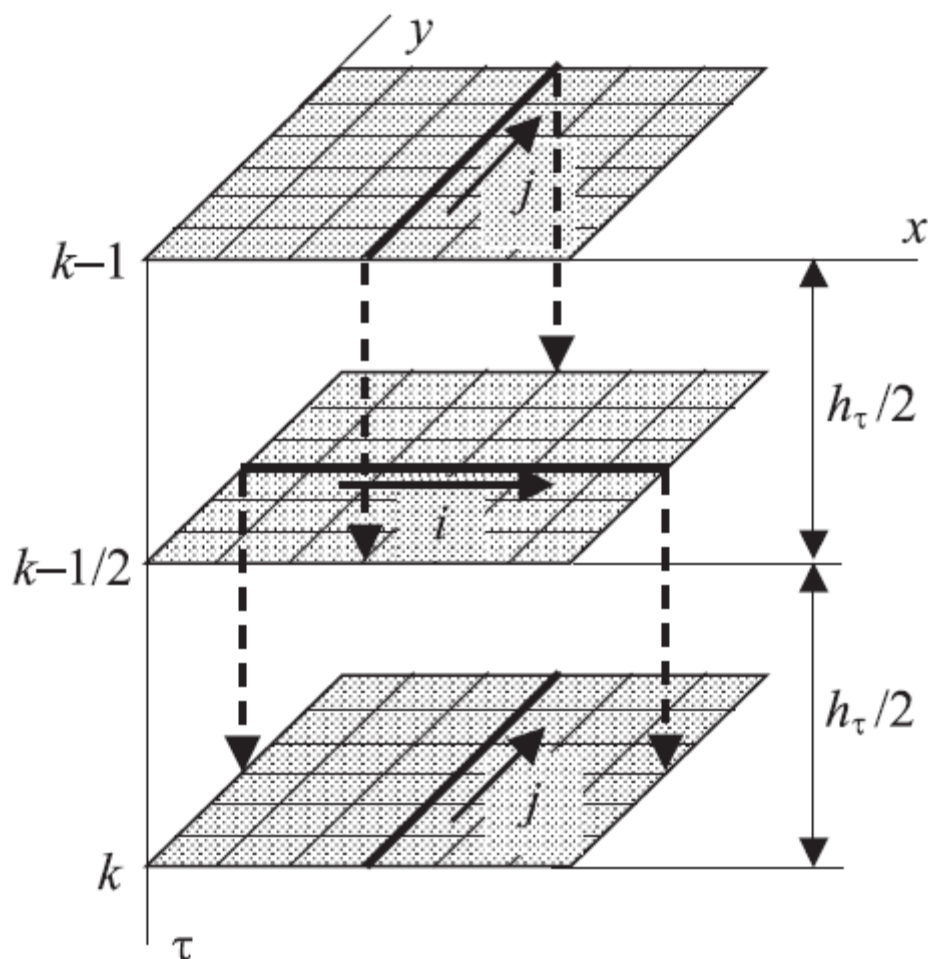


Рис.10 Схема расщепления

Для

реализации расщепления двухмерного уравнения переноса кроме двух временных слоев вводится фиктивный полуцелый слой $k-1/2$ (рис. 10).

Чтобы наряду с индексами i, j , характеризующими номер узловой точки в

направлении осей x, y , не загромождать записи индексом временного слоя k , обозначим переменную S на слоях $k-1, k-1/2, k$ соответственно \bar{S}, S, \hat{S} . Кроме того, введем обозначения для дискретных производных:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_x(S) &\approx \frac{1}{h_x^2} (S_{i+1,j} - 2S_{i,j} + S_{i-1,j}), \\ \Lambda_y(S) &\approx \frac{1}{h_y^2} (S_{i,j+1} - 2S_{i,j} + S_{i,j-1}), \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_x(S) &\approx \frac{1}{2h_x} (S_{i+1,j} - S_{i-1,j}), \\ \Phi_y(S) &\approx \frac{1}{2h_y} (S_{i,j+1} - S_{i,j-1}). \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\bar{S}_{i,j} - S_{i,j}}{h_\tau/2} + \Phi_x(\bar{S} u) + \Phi_y(S v) = A [\Lambda_x(\bar{S}) + \Lambda_y(S)].$$

При
переходе
на
полуцел
ый слой

схема явна по y и неявна по x :

При переходе с полуцелого слоя схема, наоборот, явна по y и неявна по

$$\frac{\hat{S}_{i,j} - \bar{S}_{i,j}}{h_\tau/2} + \Phi_x(\bar{S} u) + \Phi_y(\hat{S} v) = A [\Lambda_x(\bar{S}) + \Lambda_y(\hat{S})].$$

х:

Описанную схему расщепления называют продольно-поперечной прогонкой.

Уравнения можно переписать, поместив неизвестные в левую, а известные в правую часть:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{i,j} + \frac{h_\tau}{2} [\Phi_x(\bar{S}u) - A\Lambda_x(\bar{S})] &= S_{i,j} - \frac{h_\tau}{2} [\Phi_y(Sv) - A\Lambda_y(S)], \\ \hat{S}_{i,j} + \frac{h_\tau}{2} [\Phi_x(\hat{S}u) - A\Lambda_x(\hat{S})] &= \bar{S}_{i,j} - \frac{h_\tau}{2} [\Phi_y(\bar{S}v) - A\Lambda_y(\bar{S})]. \end{aligned} \quad (6.1)$$

В результате для всех внутренних точек соотношения (6.1) образуют две системы линейных алгебраических уравнений:

(6.2)

$$a_1 \bar{S}_{i-1,j} + b_1 \bar{S}_{i,j} + c_1 \bar{S}_{i+1,j} = f_1,$$

$$a_2 \hat{S}_{i,j-1} + b_2 \hat{S}_{i,j} + c_2 \hat{S}_{i,j+1} = f_2,$$

$$i=2, 3, \dots, N; \quad j=2, 3, \dots, M,$$

которые решаются

последовательно. Коэффициенты и правые части уравнений (6.2) могут быть найдены из сравнения их с уравнениями (6.1).

Решению каждой системы предваряет снос части граничных условий с предыдущего слоя, который на схеме расщепления (см. рис. 10) показан штриховыми стрелками.

Продольно-поперечная схема расщепления объединяет преимущества явной и неявной схем, поэтому ее называют явно-неявной. При решении трехмерного уравнения переноса вводится два полуцелых слоя: $k-1/3$ и $k-2/3$. Выполняя аналогичные преобразования, можно показать, что задача в этом случае сводится к последовательному решению трех систем линейных алгебраических уравнений на каждом слое по времени.

Заключение.

1. Реализованы методы прогонки и последовательной линейной верхней релаксации на компьютере.
2. Программы реализации методов прогонки и последовательной линейной верхней релаксации проверены при помощи задачи стационарной теплопроводности плоского слоя.
3. Для метода прогонки показана зависимость времени и относительной погрешности от числа разбиений регулярной сетки и точности счета.
4. Для метода последовательной линейной верхней релаксации показана зависимость времени и относительной погрешности от числа разбиений регулярной сетки, параметра релаксации γ и заданной точности ε .
5. Рассмотрены методы решения двумерной задачи нестационарной теплопроводности по явной и неявной (метод расщепления) схеме.

Список используемой литературы.

1. Моделирование теплофизических процессов и объектов в металлургии: учеб. пособие / А.И. Цаплин, И.Л. Никулин. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2011. – 299 с.
2. Теплофизика в металлургии: учеб. пособие / А.И. Цаплин. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – 230 с.