

Краевая научно-практическая конференция учебно-исследовательских и
проектных работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

Математическая модель полета баскетбольного мяча

Никифоров Александр, Шавкун Денис,
11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Волегов Павел Сергеевич,
к.ф.-м.н., доцент ПНИПУ

Пермь. 2013.

Введение

Во время полета баскетбольного мяча, брошенного баскетболистом, на мяч действуют различные факторы, влияющие на его траекторию. В момент касания баскетбольного мяча с корзиной возникает множество сил (в первую очередь – силы упругости и трения). Движение мяча может быть достаточно сложным, поэтому отскок от щита или дужки корзины бывает сложно предсказать заранее, в момент совершения броска. Решение данной проблемы поможет в баскетбольных играх (например, позволит ответить на вопросы, как нужно закручивать мяч, какую силу к нему нужно приложить, под какими углами бросать, чтобы попасть в кольцо).



Рис. 1. Полет баскетбольного мяча [1]

Таким образом, **целью** настоящей работы является построение и исследование математической модели полета баскетбольного мяча и взаимодействия с дужкой корзины и щитом, при учете различных факторов, влияющих на траекторию и взаимодействие с корзиной (свободный полет, контакт и отскок мяча от дужки и щита, движение вдоль дужки корзины).

Для достижения поставленной цели необходимо решить комплекс **задач**:

- рассмотреть силы, действующие на мяч во время полета и взаимодействия с кольцом;
- записать второй закон Ньютона и вывести уравнение движения мяча в зависимости от условий (фазы) его движения;
- решить уравнение движения мяча и построить траекторию движения его центра масс;

- исследовать, каким будет минимальный угол броска, чтобы попасть «чисто», при разных точках броска; найти минимальную скорость, которую нужно сообщить мячу, чтобы он попал в корзину, с разных точек броска; определить условия попадания броска при полете мяча со сложной траекторией; и т.д.

Мяч по пути к корзине может лететь по-разному, на рис. 3 изображены различные возможные фазы полета:

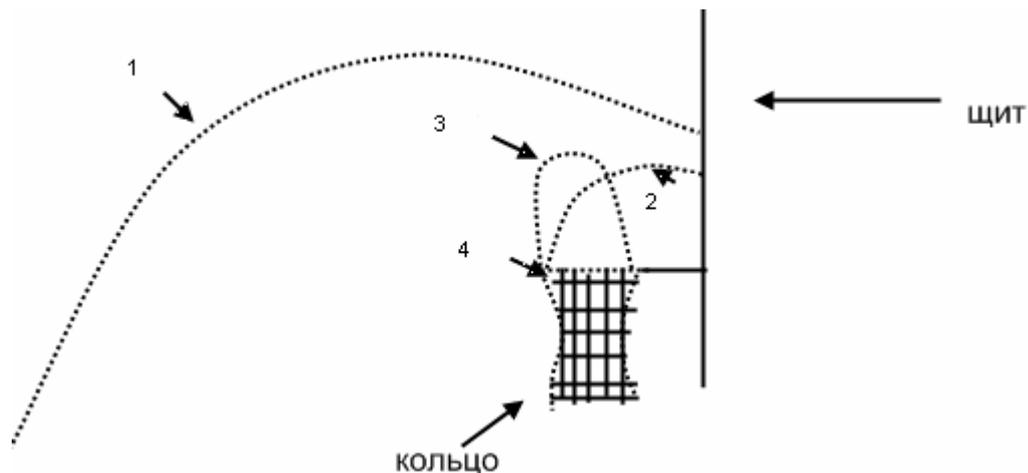


Рис. 3. Возможные фазы полета: 1 – свободное движение, 2 – отскок от щита, 3 – удар о корзину, 4 – отскок от дужки корзины

Глава 1. Концептуальная постановка задачи

Объектом исследования будем считать мяч, который будем считать вязкоупругим телом, обладающим набором свойств, которые не меняются при его движении и взаимодействии с окружающей средой.

Разделим полет мяча на отдельные независимые стадии (фазы):

1. Полет мяча к корзине.
2. Взаимодействие мяча с кольцом и щитом.

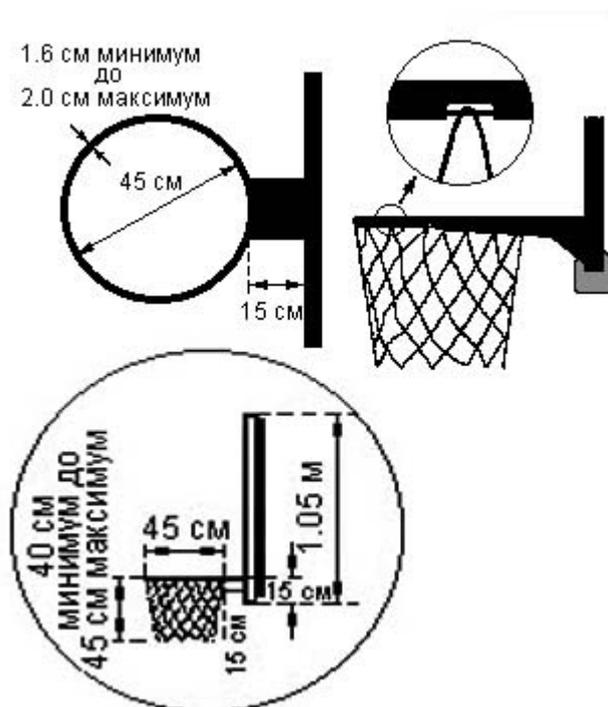


Рис.2.Кольцо со щитом [2]

Примем следующие основные гипотезы:

1. Баскетбольный мяч будем считать вязкоупругим телом жесткости k , массой m , радиуса r , моментом инерции I_M , коэффициентом трения μ и коэффициентом вязкости мяча ν . Упругие свойства зависят от давления накаченного воздуха, а вязкие свойства – от материала и толщины покрышки мяча.

2. Движение происходит в поле сил тяжести с постоянным ускорением свободного падения g и описывается уравнениями классической механики Ньютона.
3. Мяч считаем деформируемым только в момент контакта с корзиной и со щитом, в силу того, что мяч замкнут, при деформации сжатия в момент контакта в мяче увеличивается давление на стенки и после того, как контакт исчезает, мяч под действием внутреннего давления принимает свою первоначальную форму.
4. Толщиной кольца в первом приближении можно пренебречь, кольцо имеет шероховатую поверхность, характеризующуюся двумя значениями коэффициентов трения (μ_1 – коэффициент трения скольжения, μ_2 – коэффициент трения качения).
5. Щит будем считать плоским недеформируемым телом, с коэффициентом трения скольжения μ_3 . Будем считать щит и дужку кольца абсолютно жесткими телами, влиянием формы мяча, дужки кольца и щита во время взаимодействия будем пренебрегать, то есть контакт считается точечным.
6. Сила реакции в момент контакта сонаправлена с вектором нормали и перпендикулярна силе трения.
7. Учтем также эффект Магнуса, возникающий из-за закрутки мяча, и силу бокового ветра (в случае, если бросок осуществляется на открытом пространстве, например, при игре в стритбол).

В табл. 1 перечислены значения параметров модели, используемых при проведении численных экспериментов.

Таблица 1. Значения параметров модели

Величина, ед. изм.	Значение	Величина, ед. изм.	Значение
Масса мяча m , кг	0,6	Коэффициент трения скольжения μ	0,5

Радиус мяча r , м	0,20	Коэффициент вязкого деформирования мяча ν , Н*с/м	15
Момент инерции мяча I_M , кг*м ²	0,0055	Коэффициент жесткости мяча c , Н/м	53000
Радиус корзины $R\partial$, м	0,22		

Глава 2. Математическая постановка задачи

1. Рассмотрим этап полета мяча к корзине:

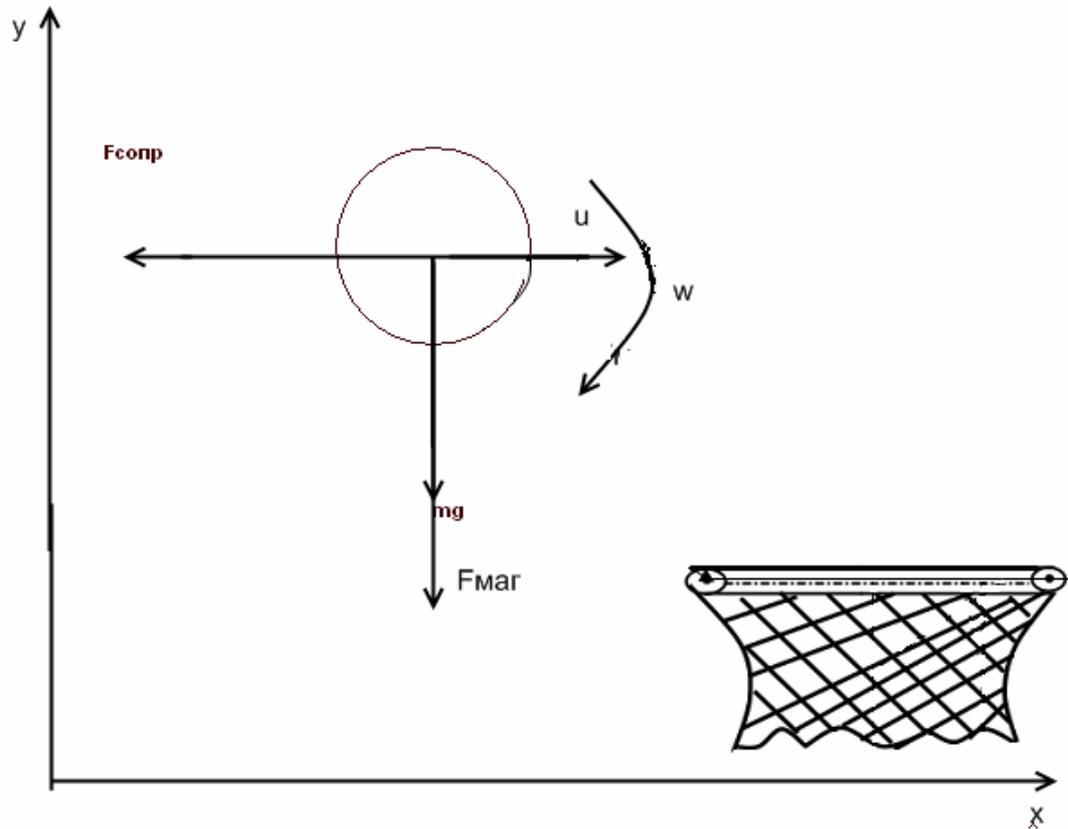


Рис.4. К выводу уравнения движения мяча

Запишем 2 закон Ньютона, связывающий равнодействующую силу, действующую на тело, массу и ускорение:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{сопр} + \vec{F}_M = m\vec{g} - \alpha\vec{v} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}, \quad (1)$$

при начальных условиях

$$\mathbf{r}(0) = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{V}(0) = V_0, \quad (3)$$

$$x(0) = x_0, \quad (4)$$

$$y(0) = y_0, \quad (5)$$

В проекциях на оси координат 2 закон Ньютона имеет вид

$$ma_x = -\alpha v_x + 2(\omega \times v)_x, \quad (6)$$

$$ma_y = -mg - \alpha v_y + 2(\omega \times v)_y, \quad (7)$$

$$V_x = V_0 \cos \alpha_0, \quad (8)$$

$$V_y = v_0 \sin \alpha. \quad (9)$$

Уравнения (6) – (9) совместно с начальными условиями (2) – (5) составляют математическую постановку задачи описания полета мяча к корзине.

2. Рассмотрим взаимодействие мяча с кольцом.

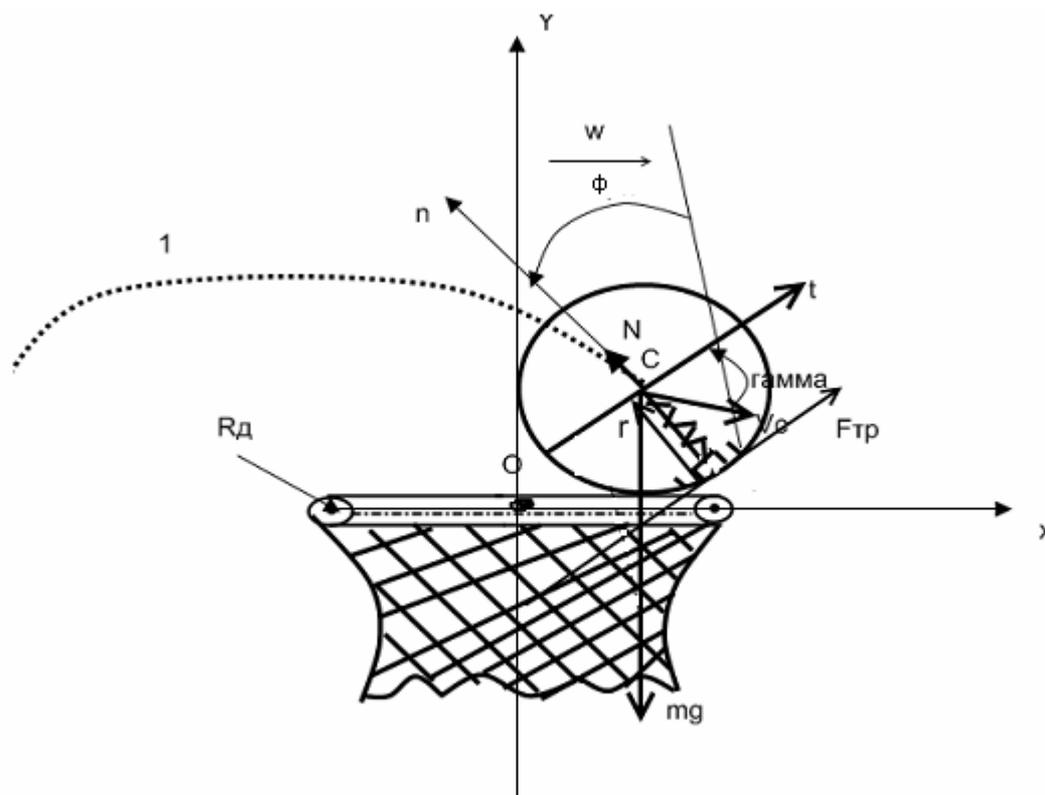


Рис.5. Взаимодействие мяча с кольцом

Положение мяча (точка C) в период взаимодействия задается координатой r центра масс и углом закрутки φ . Начальное значение угла φ зависит от траектории полета мяча до кольца (пунктирная линия 1 на рис. 5).

Рассмотрим силы, действующие на мяч в момент контакта. Кроме силы тяжести mg , со стороны кольца на мяч действует сила контактного взаимодействия, которая будет зависеть от принятой структурной модели мяча. Согласно гипотезе 1 мяч считается вязкоупругим телом, следовательно, он может

быть заменен в момент контакта на последовательно соединенные упругий (пружина) и вязкий (поршень) элементы (рис. 6).

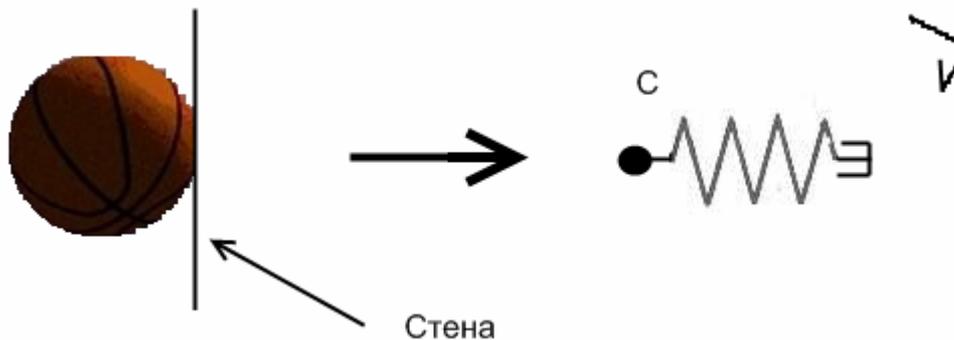


Рис.6. Замена мяча на вязкоупругое тело

Таким образом, проекция силы контактного взаимодействия на нормаль n к поверхности контакта согласно принятой структурной модели мяча может быть записана в следующем виде:

$$N = c(R_M - r) + v\dot{r}, \quad (12)$$

где c – коэффициент жесткости мяча, v – коэффициент деформирования, R_M – радиус недеформированного мяча, r – расстояние от центра мяча до точки контакта с поверхностью кольца. В касательной плоскости действует сила сухого трения Кулона.

Так как все точки мяча при взаимодействии с кольцом движутся в плоскостях, параллельных плоскости моделирования, то движение мяча можно считать плоским. За время удара мяч поворачивается вокруг дужки кольца на некоторый угол $\Delta\varphi$ и деформируется. Расстояние от центра мяча в процессе деформирования вначале уменьшается на Δr , а затем увеличивается до первоначального значения R_M .

При этом угловая скорость ω вращения вокруг центра масс за счет сил трения меняется на некоторую величину $\Delta\omega$. Вращательное движение вокруг дужки кольца будем считать переносным, а поступательное движение вместе с центром масс при деформировании – относительным. Используя теоремы о движении центра масс и уравнение вращательного движения абсолютно твердого

тела, а также вводя переносную F_e^{UH} и кориолисову силы инерции F_k^{UH} , можно записать дифференциальное уравнение движения.

$$\begin{cases} ma_C^{Om} = N + F_{mp} + mg + F_C^{UH} + F_k^{UH} \\ I_M \dot{\omega} = F_{mp} r \end{cases}, \quad (13)$$

где a_C^{Om} – относительное ускорение точки С, I_M – момент инерции мяча, относительно оси, проходящей через центр масс С. Переносная сила инерции направлена по нормали n и равна $F_e^{UH} = m(r + R_d)\varphi^2$. Сила инерции Кориолиса направлена вдоль оси τ и равна $F_k^{UH} = 2m\dot{\varphi}\dot{r}$. Проецируя первое уравнение на оси n и τ учитывая, что $a_{nc}^{Om} = \ddot{r}$ и $a_{\tau c}^{Om} = \varepsilon(r + R_d) = \ddot{\varphi}(r + R_d)$ и запишем математическую постановку задачи в следующем виде.

Найти зависимости от времени $r(t)$, $\varphi(t)$, $\omega(t)$, $t \in [0, T]$ из решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{r} = N - mg \cos \varphi - m(r + R_d)\varphi^2 \\ I_M \dot{\omega} = -F_{mp} r \\ m(r + R_d) = mg \sin \varphi - F_{mp} - 2m\dot{\varphi}\dot{r} \\ \dot{\varphi} = \omega \end{cases}, \quad (14)$$

при начальных условиях:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad (15)$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad (16)$$

$$r(0) = R_M, \quad (17)$$

$$\dot{\varphi}(0) = -\frac{v_N \cos \gamma}{(R_A + R_i)}, \quad (18)$$

$$\dot{r}(0) = -v_C \sin \gamma. \quad (19)$$

R_A – радиус дужки кольца, v_C – скорость центра масс мяча в момент касания дужки.

3. Рассмотрим взаимодействие мяча со щитом.

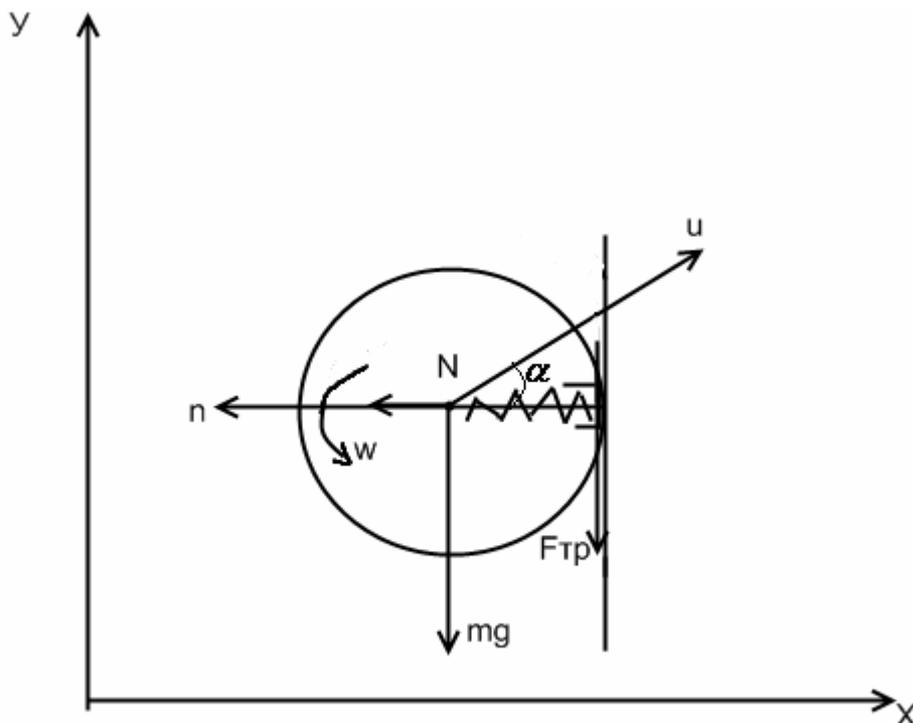


Рис.7. Взаимодействие мяча со щитом

Запишем 2 закон Ньютона в момент контакта мяча со щитом:

$$\mathbf{F}_{тр} + \mathbf{N} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}. \quad (20)$$

$$\begin{cases} ma_x = -N \\ F_{mp} = mg \\ I_M \dot{\omega} = F_{mp} r \end{cases}, \quad (21)$$

подставим N в проекцию на ось x

$$\begin{cases} m\ddot{r} = -c(R_M - r) - v\dot{r} \\ m\ddot{y} = -F_{mp} - mg \\ I_M \ddot{\phi} = -F_{mp} r \\ F_{mp} = \mu c(R_M - r) + v\dot{r} \end{cases} \quad (22)$$

Преобразуем каждое уравнение в системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{r} = \frac{-c(R_M - r) - v\dot{r}}{m} \\ \ddot{y} = \frac{-(\mu c(R_M - r) + v\dot{r}) - mg}{m} \\ \ddot{\varphi} = \frac{-(\mu c(R_M - r) + v\dot{r})r}{I_M} \end{array} \right. \quad (23)$$

Для системы уравнений (22) требуются начальные условия (23) – (27):

$$x(0) = x_0, \quad (24)$$

$$y(0) = y_0, \quad (25)$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad (26)$$

$$u_x(0) = u \cos \alpha, \quad (27)$$

$$u_y(0) = u \sin \alpha. \quad (28)$$

Глава 3. Методы решения

Метод Эйлера

Для решения задачи необходимо использовать тот или иной метод решения дифференциальных уравнений, используем метод Эйлера, вот его алгоритм для произвольного Дифференциального уравнения первого и второго порядков.

Пусть решается уравнение вида

$$y' = f(x, y) , \quad (29)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0 , \quad (30).$$

Будем считать, что функция $f(x, y)$ такова, что у задачи (1) – (2) имеется единственное решение.

Метод Эйлера является простейшим численным методом для решения задачи Коши.

Допустим, что в некоторой точке x_i нам известно значение y .

$y(x_i)$ – точное значение, y_i^* – приближенное.

Рассмотрим разложение функции $y(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_i , отбросив все члены, содержащие производные второго порядка и выше:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + o(h^2) , \quad (31)$$

$$y_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) , \quad (32)$$

x_0 – задано. А для всех $i = 0, 1, \dots$,

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (33)$$

1. Рассмотрим фазу полета мяча к корзине. Найдем векторное произведение ω и v :

$$(\bar{\omega} \times \bar{v}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_z \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = (0 - \omega_z v_y)i + (\omega_z v_x - 0)j + (0 - 0)k, \quad (34)$$

$$(\omega \times v)_x = -\omega_z v_y, \quad (35)$$

$$(\omega \times v)_y = \omega_z v_x. \quad (36)$$

Распишем проекции ускорения и скорости:

$$a_x = -\frac{\alpha}{m} v_x - \frac{2}{m} \omega_z v_y, \quad (37)$$

$$a_y = -g - \frac{\alpha}{m} v_y + \frac{2}{m} \omega_z v_x, \quad (38)$$

$$x_0 = x(0), \quad (39)$$

$$y_0 = y(0), \quad (40)$$

$$v_{x0} = v_0 \cos \alpha_0, \quad (41)$$

$$v_{y0} = v_0 \sin \alpha_0. \quad (42)$$

Для определения координат и проекции скорости мяча в произвольный момент времени применим метод Эйлера, о котором говорилось выше:

$$a_x \approx \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\frac{\alpha}{m} v_x - \frac{2}{m} \omega_z v_y, \quad (43)$$

$$a_y \approx \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -g - \frac{\alpha}{m} v_y + \frac{2}{m} \omega_z v_x, \quad (44)$$

$$v_x^{(i+1)} = v_x^{(i)} + a_x^{(i)} \Delta t = v_x^{(i)} + \left(-\frac{\alpha}{m} v_x^{(i)} - \frac{2}{m} \omega_z v_x^{(i)}\right) \Delta t \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (45)$$

$$v_y^{(i+1)} = v_y^{(i)} + a_y^{(i)} \Delta t = v_y^{(i)} + \left(-g - \frac{\alpha}{m} v_y^{(i)} + \frac{2}{m} \omega_z v_y^{(i)}\right) \Delta t \approx \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad (46)$$

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + v_x^{(i)} \Delta t, \quad (47)$$

$$y^{(i+1)} = y^{(i)} + v_y^{(i)} \Delta t . \quad (48)$$

Последние формулы позволяют найти координаты, где будет находиться тело через какое-то время.

2. Рассмотрим фазу взаимодействия мяча со щитом.

Применим метод Эйлера к нахождению скорости на ось X (рис. 7) из системы уравнений (23)

$$\dot{v}_r = \ddot{r} = \frac{-c(R_M - r) - v\dot{r}}{m} , \quad (49)$$

При

$$v_r = \dot{r} , \quad (50)$$

$$\dot{v}_r \approx \frac{\Delta v_r}{\Delta t} = \frac{v_r^{(i+1)} - v_r^{(i)}}{\Delta t} , \quad (51)$$

$$v_r^{(i+1)} = v_r^{(i)} + \Delta t \left(\frac{c}{m} (R_M - r^{(i)}) - \frac{v v_r^{(i)}}{m} \right) , \quad (52)$$

При этом текущий радиус мяча равен разности положений щита и мяча в данный момент времени

$$r = x_{\text{щита}} - x , \quad (53)$$

где x - координата расположения мяча.

Применим метод Эйлера для нахождения координаты мяча:

$$\dot{x} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x^{(i+1)} - x^{(i)}}{\Delta t} = v_r^{(i)} , \quad (54)$$

И получим

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + v_r^{(i)} \Delta t , \quad (55)$$

При начальных условиях

$$r_0 = R_M , \quad (56)$$

$$v_r^{(0)} = u \cos \alpha , \quad (57)$$

Применим метод Эйлера для производной скорости по оси u:

$$\dot{v}_y = \ddot{y} = -\mu \left(\frac{c(R_M - r)}{m} + \frac{v\dot{r}}{m} \right) - g, \quad (58)$$

При этом текущий радиус мяча равен разности положений щита и мяча в данный момент времени

$$v_y = \dot{y}, \quad (59)$$

$$r = x_{щита} - x, \quad (60)$$

получим

$$v_y^{(i+1)} = v_y^i + \Delta t \mu \left(\frac{c}{m} (R_M - r^{(i)}) - \frac{v v_r^{(i)}}{m} \right), \quad (61)$$

$$y^{(i+1)} = y^i + v_y^{(i+1)} \Delta t, \quad (62)$$

при начальных условиях

$$y(0) = 0, \quad (63)$$

$$v_r^{(0)} = u \sin \alpha, \quad (64)$$

Применим метод Эйлера для интегрирования уравнения вращательного движения:

$$I_M \ddot{\varphi} = F_{mp} r, \quad (65)$$

распишем $\ddot{\varphi}$

$$\ddot{\varphi} = \left(\frac{\mu c (R_M - r) + v \dot{r}}{I_M} \right) r, \quad (66)$$

при

$$\ddot{\varphi} = \dot{\omega}, \quad (67)$$

получим

$$\dot{\omega} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega^{(i+1)} - \omega^{(i)}}{\Delta t}, \quad (68)$$

$$\omega^{(i+1)} = \omega^{(i)} + \Delta t \left(\frac{\mu c (R_M - r^{(i)})}{I_M} + \frac{v v_r^{(i+1)}}{I_M} \right) r^{(i)}, \quad (69)$$

$$\dot{\varphi} \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi^{(i+1)} - \varphi^{(i)}}{\Delta t} = \omega^{(i+1)}, \quad (70)$$

$$\varphi^{(i+1)} = \varphi^{(i)} + \omega^{(i+1)}\Delta t, \quad (71)$$

Список литературы

1. Введение в математическое моделирование. Учебное пособие. Под ред. П. В. Трусова. — М.: Логос, 2004. — 440.
2. Бояршинов М.Г. Численные методы: учебное пособие для студентов направления «Прикладная математика и информатика». Ч. 2. — Пермь: ПермГТУ, 1999. — 200 с.
3. Щипачев - Основы высшей математики.
4. Маркеев А. П. Теоретическая механика. — М.: Наука, 1990. — С. 9.