

Краевая научно-практическая конференция учебно-исследовательских
и проектных работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

**Математическая модель потери устойчивости
автомобиля**

Овчинников Евгений,
11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Волегов Павел Сергеевич,
к.ф.-м.н., доцент ПНИПУ

Пермь. 2013.

Содержание

Введение	3
Глава 1. Концептуальная постановка задачи.....	7
Глава 2. Математическая постановка задачи.....	9
§1. Вывод зависимостей для сил реакции опоры, действующих на колеса.....	9
§2. Вывод уравнений движения для автомобиля с задним приводом.....	14
§3. Вывод уравнений движения для автомобиля с передним приводом.....	18
§4. Вывод уравнений движения для автомобиля с полным приводом.....	22
§5. Вывод условий перехода трения качения в трение скольжения.....	26
Глава 3. Результаты и обсуждение.....	28
§1. Характеристики модели автомобиля.....	28
§2. Обсуждение результатов моделирования движения для автомобилей с передним, задним и полным приводам.....	28
§3. Обсуждение условий перехода трения качения в трение скольжения.....	30
§4. Обсуждение численных экспериментов.....	30
Заключение	34
Список литературы.....	35

Введение

Высокий темп современной жизни вызывает у человека потребность в быстром и безопасном перемещении на большие расстояния с относительно небольшими затратами. Удовлетворить данную потребность могут такие транспортные средства, как самолет, поезд, автомобиль и т.д.

Однако наиболее доступным средством передвижения для личного пользования является автомобиль. На данный момент в мире насчитывается около 750 миллионов автомобилей, находящихся в работоспособном состоянии и используемых по прямому назначению. Увеличивается мощность двигателя, прочность ходовой составляющей, поэтому растет и максимальная скорость, развиваемая автомобилем.

Но подвергается модернизации далеко не весь автомобиль. Как и сто лет назад, покрышки для автомобилей делают из резины, а на дороги укладывают асфальт. Передвижение на автомобиле далеко не безопасно. Несмотря на заметный рост уровня безопасности, количество дорожно-транспортных происшествий каждым годом не только не убывает, но даже растёт.

Всем известно, какими печальными могут стать последствия ДТП для жизни и здоровья людей. Нередко причиной ДТП является то, что водитель «не справился с управлением». Одной из возможных причин потери управления на дороге является занос.

Занос представляет собой боковое скольжение задней или передней оси автомобиля при продолжающемся поступательном движении. Определяющим фактором правильного поведения при выводе автомобиля из заноса является привод автомобиля. Существует три разновидности приводов:

- Задний привод – конструкция трансмиссии автомобиля, при которой крутящий момент, создаваемый двигателем, передается на задние колеса (рис.1) [1].

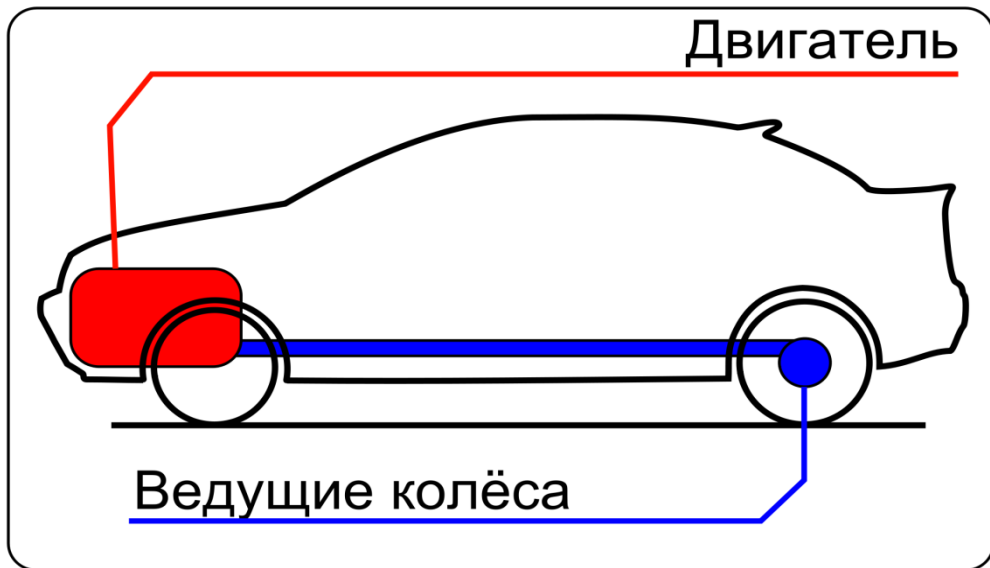


Рис. 1. Схема заднего привода

- Передний привод – компоновка и конструкция трансмиссии автомобиля, при которой создаваемый двигателем крутящий момент передается на передние колёса (рис.2) [1].

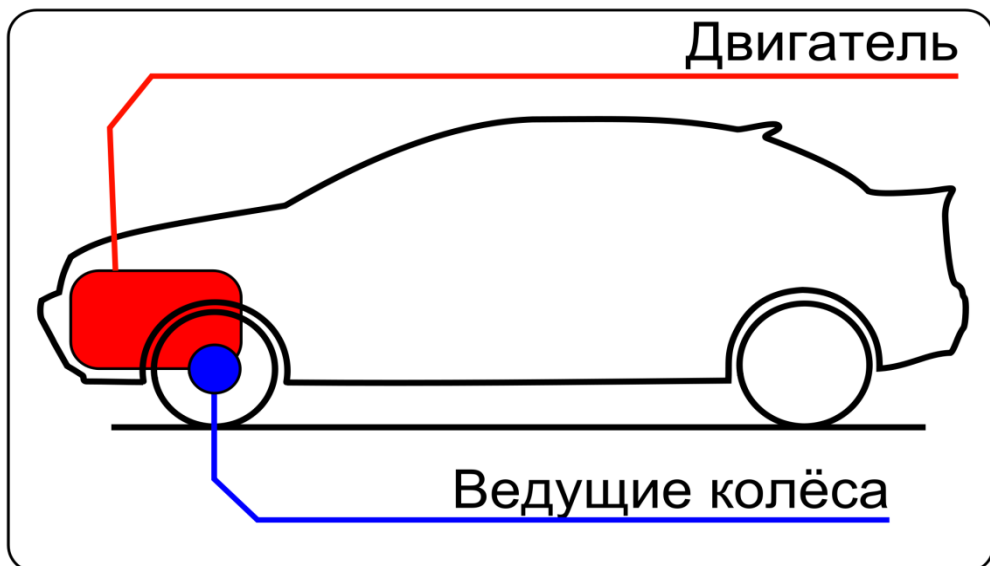


Рис.2. Схема переднего привода

- Полный привод – конструкция трансмиссии автомобиля, при которой крутящий момент, создаваемый двигателем, передаётся на все колеса (рис.3) [1].

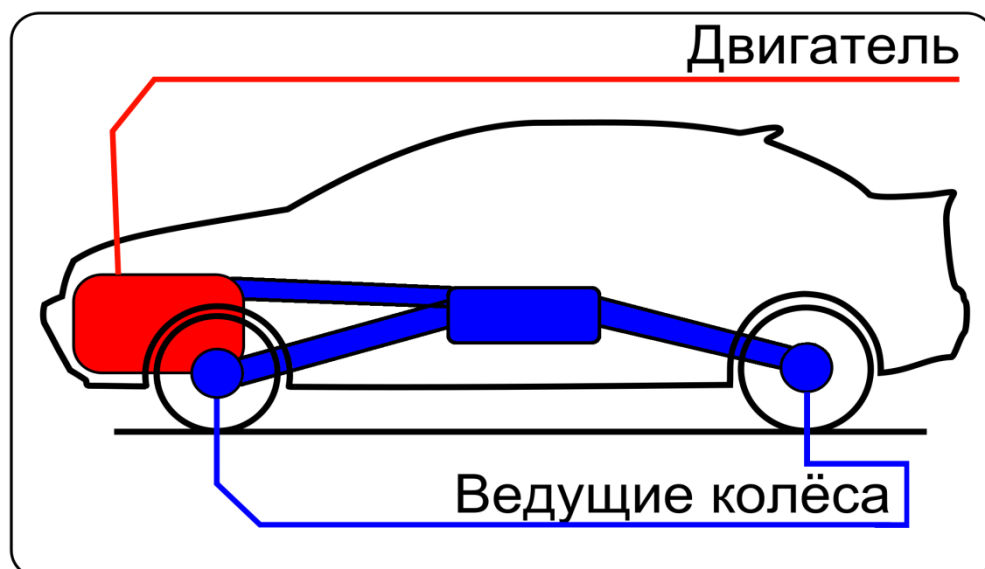


Рис.3. Схема полного привода

Если передние колёса первыми теряют сцепление с поверхностью, говорят о недостаточной поворачиваемости. В этом случае автомобиль движется по прямой, не слушаясь руля (рис. 4). Если задние колёса первыми теряют сцепление с дорогой, говорят об избыточной поворачиваемости. В этом случае у автомобиля сносит заднюю ось, вплоть до разворота (рис. 5).

Поворачиваемость того или иного типа определяется множеством параметров: на поворачиваемость влияет, например, кривизна и скорость прохождения поворота. Чем меньше кривизна поворота и, следовательно, больше скорость прохождения такого поворота, тем более избыточную поворачиваемость испытывает автомобиль. Наоборот, на крутых, медленных поворотах автомобиль испытывает недостаточную поворачиваемость.

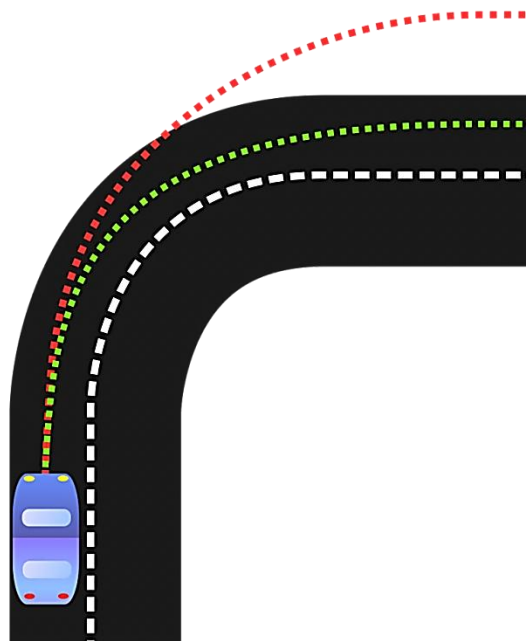


Рис.4. Траектории при недостаточной и нейтральной поворачиваемости

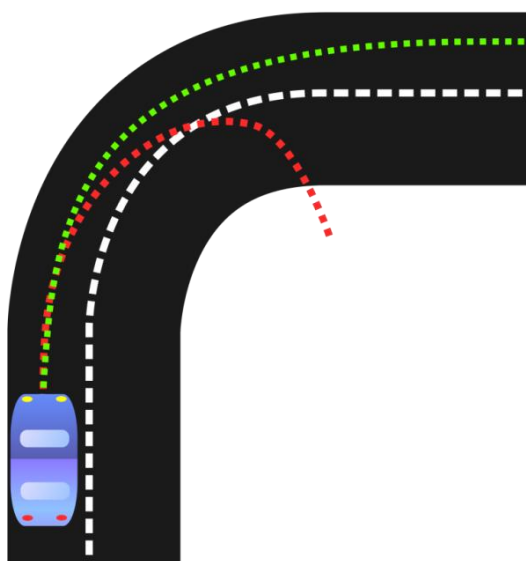


Рис.5. Траектории при избыточной и нейтральной поворачиваемости

Таким образом, **актуальным** остается вопрос: автомобиль с каким приводом может развить наибольшую скорость без потери сцепления с дорогой или наиболее эффективно позволит выйти из заноса.

Сформулируем **цель** настоящего исследования:

Требуется разработать и исследовать математическую модель, описывающую движение автомобиля по дороге.

Модель должна позволять:

- строить траекторию движения центра масс тела;
- решать основную задачу механики: определение координат, как центра масс тела.

Объектом моделирования является автомобиль, абстрагируемый абсолютно твердым телом (в общем случае) произвольной формы, имеющим точки опоры (колёса).

Входные данные:

- привод автомобиля (задний, передний, полный);
- масса автомобиля;
- коэффициенты сил трения скольжения и качения, возникающих между покрышками и поверхностью дороги;
- скорость автомобиля в начальный момент времени;
- вращающий момент, передаваемый от двигателя на ось автомобиля.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующий комплекс задач:

- связать реакцию подвески с линейной скоростью автомобиля и радиусом поворота;
- сформулировать критерий потери сцепления колеса и поверхности дороги;
- записать уравнения движения автомобиля как абсолютно твердого тела, исследовать траектории движения автомобиля при различных условиях движения.

Глава 1. Концептуальная постановка задачи

Объект моделирования – абсолютно твердое тело с четырьмя точками опоры, имеющее произвольную форму.

Был выдвинут следующий ряд **гипотез**:

- движение автомобиля описывается уравнениями классической механики Ньютона, так как скорость движения тела много меньше скорости света;
- корпус автомобиля является абсолютно твёрдым телом;
- объект моделирования имеет четыре точки касания с поверхностью;
- точки касания лежат в одной горизонтальной плоскости и являются вершинами прямоугольника;
- центр масс автомобиля лежит в точке пересечения диагоналей этого прямоугольника;
- движение тела происходит в одной плоскости;
- тело имеет три степени свободы (рис. 6);

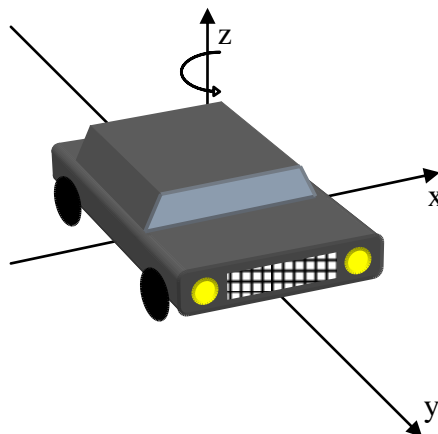


Рис. 6. Степени свободы автомобиля

- задние колёса не имеют степеней свободы, а передние имеют одну степень свободы (рис. 7);

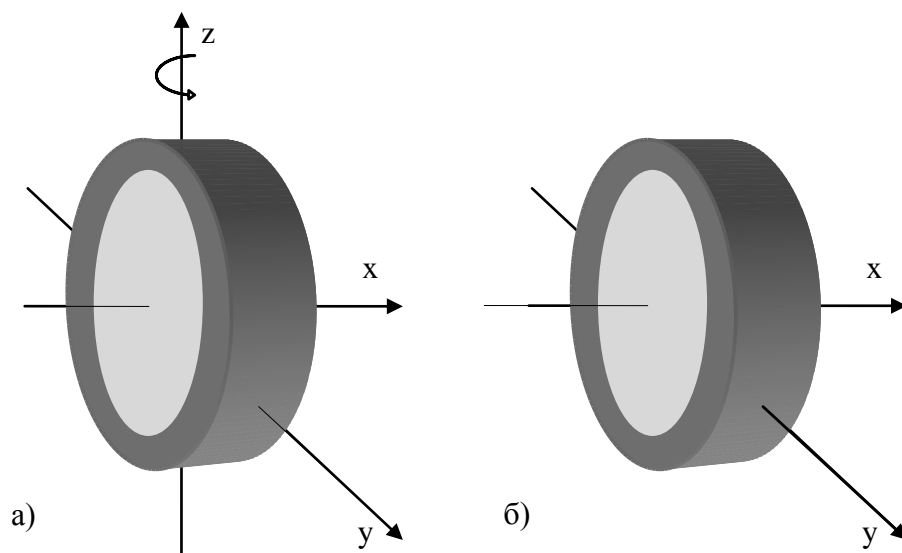


Рис. 7. Степени свободы колёс: а) переднее; б) заднее

- профили передних и задних колёс в любой момент времени попарно параллельны друг другу;
- во время движения на колёса действует сила трения качения, в момент заноса возникает трение скольжения;
- будем считать, что коэффициент трения качения при движении не зависит от скорости;
- сила сопротивления воздуха отсутствует.

Глава 2. Математическая постановка задачи

§1. Вывод зависимостей для сил реакции опоры, действующих на колеса

В данном параграфе свяжем реакцию подвески с линейной скоростью автомобиля, радиусом поворота. Рассмотрим абсолютно твёрдое тело массой m , шириной l , закреплённое на горизонтальной опоре с помощью четырёх пружин с коэффициентом жёсткости k . На тело действует горизонтальная сила, равная по модулю и направлению центробежной

силе инерции, возникающей при входе со скоростью V автомобиля в поворот, имеющий радиус R .

На тело действуют четыре силы упругости со стороны пружин, центробежная сила и сила тяжести. Силы упругости приложены к концам пружин и направлены в сторону сокращения деформации. Точка приложения силы тяжести и центробежной силы – центр масс тела (рис.8).

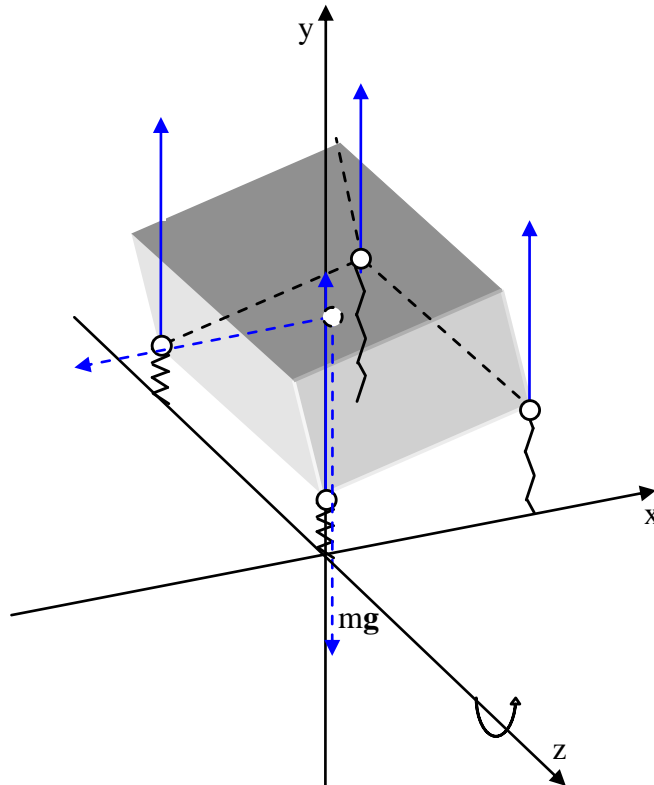


Рис. 8. К выводу реакций опоры

Второй закон Ньютона и уравнение моментов относительно оси z для статики тела при действии центробежной силы выглядят следующим образом:

$$\vec{M}_{F_{y\phi}} + \vec{M}_{F_{k_1}} + \vec{M}_{F_{k_2}} + \vec{M}_{F_{k_3}} + \vec{M}_{F_{k_4}} + \vec{M}_g = \vec{0}; \quad (1)$$

$$\vec{y}_C \times \vec{F}_{y\phi} + \vec{0} \times \vec{F}_{k_1} + \vec{0} \times \vec{F}_{k_3} + \vec{l} \times \vec{F}_{k_2} + \vec{l} \times \vec{F}_{k_4} + \vec{x}_C \times m\vec{g} = \vec{0}; \quad (2)$$

$$\vec{F}_{k_1} = \vec{F}_{k_3}; \quad (3)$$

$$\vec{F}_{k_2} = \vec{F}_{k_4}; \quad (4)$$

$$z: \frac{d}{2} F_{цб} + 2lF_{k_2} - \frac{l}{2} mg = 0; \quad (5)$$

$$F_{k_2} = \frac{lmg - dF_{цб}}{4l}; \quad (6)$$

$$\vec{F}_{цб} + 2\vec{F}_{k_1} + 2\vec{F}_{k_2} + m\vec{g} = \vec{0}; \quad (7)$$

$$x: 2F_{k_1} + 2F_{k_2} - mg = 0; \quad (8)$$

$$F_{k_1} = \frac{mg}{2} - F_{k_2}; \quad (9)$$

$$F_{k_1} = \frac{lmg + dF_{цб}}{4l}; \quad (10)$$

Выражение для модуля центробежной силы:

$$F_{цб} = m\omega^2 R = \frac{mV^2}{R}; \quad (11)$$

Таким образом, выражения для сил упругости приобретут следующий вид:

$$F_{k_1} = \frac{lmg + \frac{dmV^2}{R}}{4l}; \quad (12)$$

$$F_{k_2} = \frac{lmg - \frac{dmV^2}{R}}{4l}; \quad (13)$$

По третьему закону Ньютона модуль силы давления, действующей со стороны тела на пружину, равен модулю силы упругости, действующей со стороны пружины на тело (рис.9).

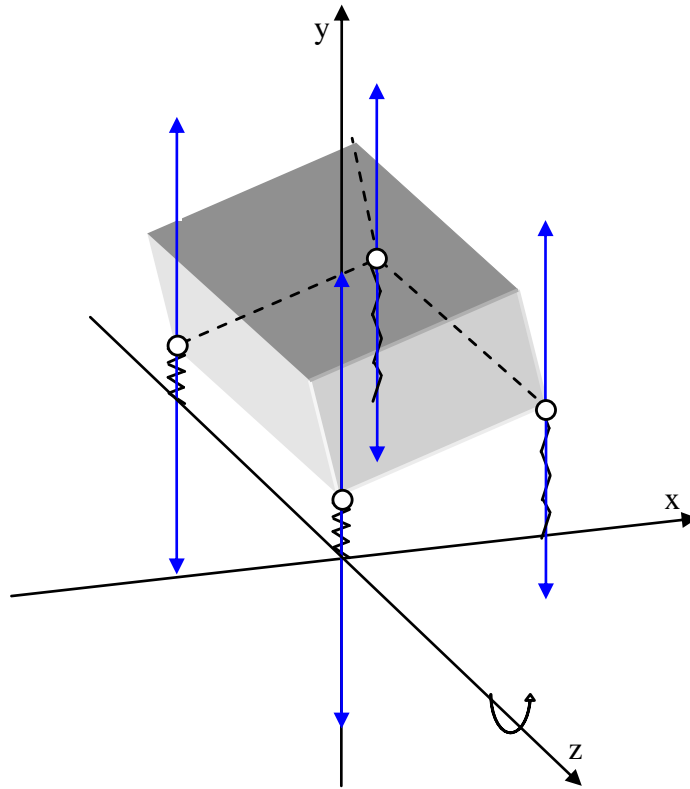


Рис. 9. К выводу реакций опоры.

$$F_{\partial_1} = F_{k_1} = \frac{lmg + \frac{dmV^2}{R}}{4l}; \quad (14)$$

$$F_{\partial_2} = F_{k_2} = \frac{lmg - \frac{dmV^2}{R}}{4l}. \quad (15)$$

Рассмотрим в качестве механической системы пружины. На них действует силы давления со стороны тела и силы реакции опоры со стороны поверхности (рис.10).

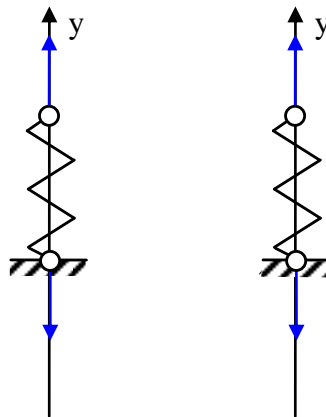


Рис. 10. Силы, действующие на пружины

Второй закон Ньютона для статики пружин:

$$\vec{N}_1 + \vec{F}_{o_1} = \vec{0}; \quad (16)$$

$$\vec{N}_2 + \vec{F}_{o_2} = \vec{0}; \quad (17)$$

$$N_1 = N_3 = F_{o_1} = \frac{lmg + \frac{dmV^2}{R}}{4l}; \quad (18)$$

$$N_2 = N_4 = F_{o_2} = \frac{lmg - \frac{dmV^2}{R}}{4l}. \quad (19)$$

Проверить полученные выражения на разумность можно, предположив, что тело покоится, тогда центробежной силы не возникает. На тело действуют сила тяжести и четыре силы упругости (рис. 11).

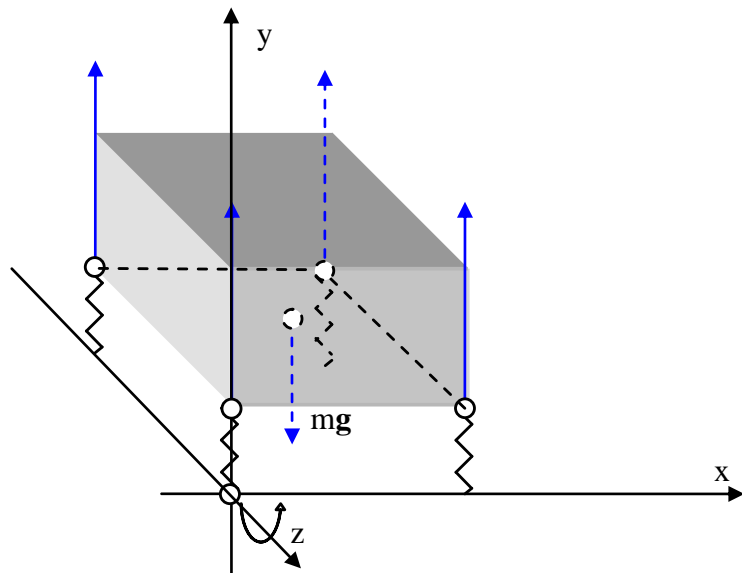


Рис. 11. К выводу реакций опоры

Из уравнения моментов и второго закона Ньютона для статики тела находятся силы упругости, равные силам давления и силам реакции опоры. Очевидно, что в данном случае:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = \frac{mg}{4}; \quad (20)$$

Формула (20) совпадает с выражениями, получаемыми при обнулении скорости в формулах (18) и (19). Можно сделать вывод, что задача решена корректно.

§2. Вывод уравнений движения для автомобиля с задним приводом

Рассмотрим автомобиль массой m , имеющий форму прямоугольника длиной l и шириной d . Рассмотрим движение автомобиля относительно неподвижной системы координат. Необходимо получить закон движения и уравнение, описывающее траекторию движения. Центр масс тела находится на расстоянии $d/2$ от левого крыла и $l/2$ от переднего бампера. Профили передних колёс повернуты на угол A относительно задних (рис. 12). Вращающий момент передается только на задние колеса.

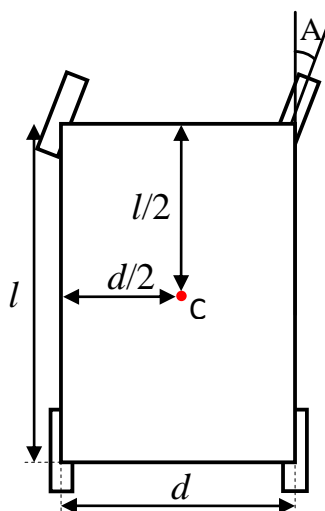


Рис. 12. К выводу уравнений движения

Сила тяжести сонаправлена с ускорением свободного падения и приложена к центру масс тела. К передним колёсам приложены две силы трения качения, направленные параллельно профилям колёс обратно направлению движения автомобиля. На задние колёса действуют две силы тяги, параллельные профилям колёс, и две силы трения, направленные противоположно им. Ко всем колесам приложены силы реакции опоры, которые действуют в сторону, противоположную ускорению свободного падения (рис. 13).

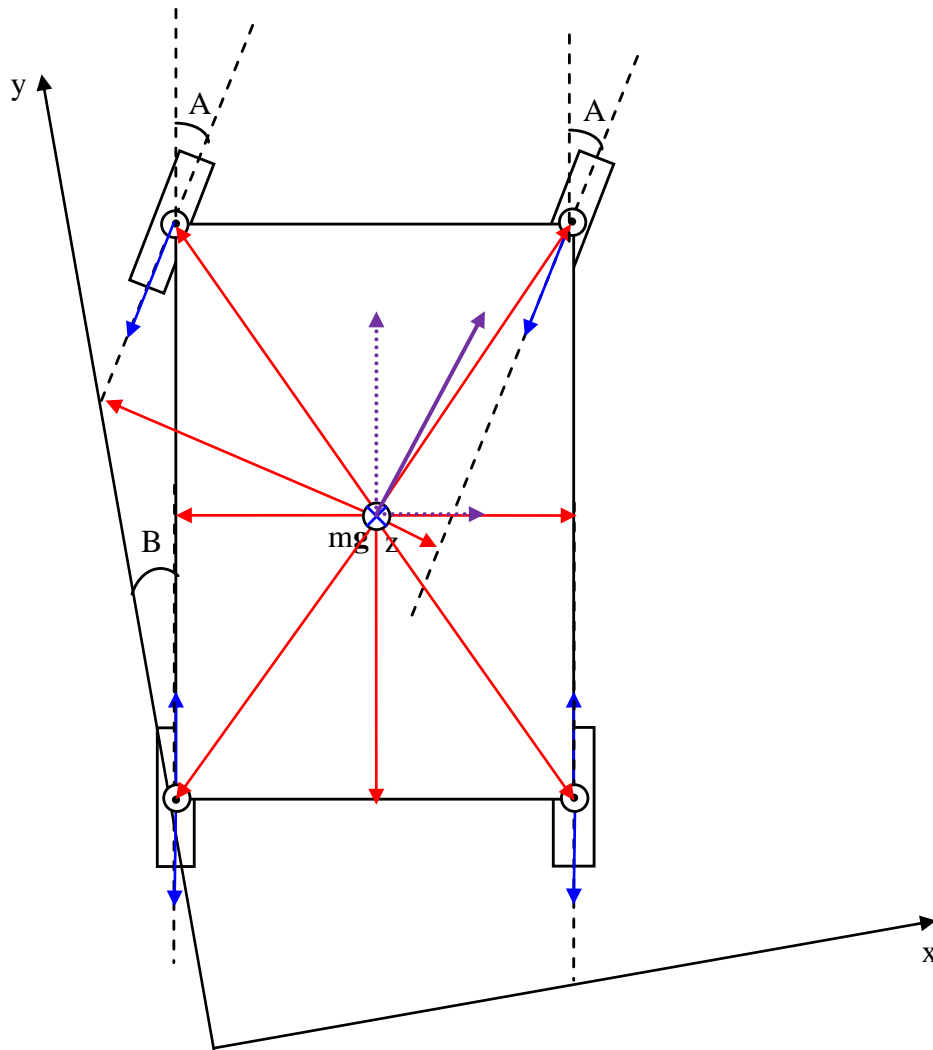


Рис. 13. К выводу уравнения движения

Второй закон Ньютона будет выглядеть следующим образом:

$$\vec{m} \vec{a} = \vec{F}_{Tp1} + \vec{F}_{Tp2} + \vec{F}_{Tp3} + \vec{F}_{Tp4} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{N}_4 + \vec{F}_{T1} + \vec{F}_{T2} + m \vec{g}; \quad (21)$$

Коэффициент трения качения обозначим за Ψ , а радиус колеса за R .

Запишем проекции на ось x и ось y :

$$m y'' = -\frac{\Psi}{R} N_1 \cos(B) - \frac{\Psi}{R} N_2 \cos(B) - \frac{\Psi}{R} N_3 \cos(A+B) - \frac{\Psi}{R} N_4 \cos(A+B) + 2 \frac{M(t)}{R} \cos(B); \quad (22)$$

$$mx'' = -\frac{\Psi}{R} N_1 \sin(B) - \frac{\Psi}{R} N_2 \sin(B) - \frac{\Psi}{R} N_3 \sin(A+B) - \frac{\Psi}{R} N_4 \sin(A+B) + 2 \frac{M(t)}{R} \sin(B); \quad (23)$$

где m – масса автомобиля, N_1, N_2, N_3, N_4 – реакции опоры со стороны поверхности, $M(t)$ – функция, задающая вращающий момент, передаваемый на ведущие колеса.

Подставим в уравнение выражения для реакций опоры из формул (18) и (19), радиус поворота будем вычислять по известному из аналитической геометрии выражению $R_p = \frac{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}$, это формула для кривизны кривой, заданной параметрически с помощью независимого параметра, в нашем случае времени [3].

Получим окончательные выражения для проекций ускорения:

$$mx''(t) = 2 \frac{M(t)}{R} \sin(B(t)) - \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} lm(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2l} \sin(B(t)) - \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} lm(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \sin(B(t)) - \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} lm(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \sin(A(t) + B(t)) - \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} lm(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \sin(A(t) + B(t)); \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
my''(t) = & 2 \frac{M(t)}{R} \cos(B(t)) - \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(B(t)) - \\
& \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(B(t)) - \\
& \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(A(t) + B(t)) - \\
& \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(A(t) + B(t));
\end{aligned} \tag{25}$$

Запишем уравнение моментов относительно оси z, проходящей через центр масс и направленной вертикально вверх.

$$I \vec{\xi} = \vec{M}_{Tp_1} + \vec{M}_{Tp_2} + \vec{M}_{Tp_3} + \vec{M}_{Tp_4} + \vec{M}_{T_1} + \vec{M}_{T_2} + \vec{M}_{mg} + \vec{M}_{N_1} + \vec{M}_{N_2} + \vec{M}_{N_3} + \vec{M}_{N_4}; \tag{26}$$

В проекции на ось z уравнение моментов примет следующий вид:

$$I \xi = M_{Tp_1} - M_{Tp_2} - M_{Tp_3} + M_{Tp_4} + M_{T_1} - M_{T_2}; \tag{27}$$

Момент инерции твердого кубоида, каким является автомобиль, относительно центра масс будет равен $I = \frac{m(d^2 + l^2)}{12}$ [2].

Тогда, путем преобразований приведем уравнение к виду:

$$\frac{m(d^2 + l^2)}{12} B''(t) = \frac{\Psi}{R} N_1 \frac{d}{2} - \frac{\Psi}{R} N_2 \frac{d}{2} - \frac{\Psi}{R} N_3 \frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2}}{\sin(\arctan(\frac{l}{d}) + A)} + \frac{\Psi}{R} N_4 \frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2}}{\sin(\arctan(\frac{l}{d}) - A)}; \tag{28}$$

где N_1, N_2, N_3, N_4 – реакции опоры со стороны поверхности, $M(t)$ – функция, задающая вращающий момент, передаваемый на ведущие колеса.

Получим окончательную зависимость углового ускорения или производной второго порядка от угла поворота:

$$\begin{aligned}
& \frac{m(d^2+l^2)}{12} B''(t) \frac{d\Psi}{2R} \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} - \\
& \frac{d\Psi}{2R} \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} - \\
& \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \frac{\Psi}{R} \frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2}}{\sin(\arctan(\frac{l}{d}) + A(t))} + \\
& \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \frac{\Psi}{R} \frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2}}{\sin(\arctan(\frac{l}{d}) - A(t))};
\end{aligned} \tag{29}$$

Решение системы дифференциальных уравнений, включающей в себя уравнения (25), (24) и (29), при различных начальных скоростях и координатах по обеим осям координат, а также угловой скорости и углу поворота корпуса, позволит описывать движение заднеприводного автомобиля как АТТ.

§3. Вывод уравнений движения для автомобиля с передним приводом

Рассмотрим автомобиль массой m , имеющий форму прямоугольника длиной l и шириной d . Рассмотрим движение автомобиля относительно неподвижной системы координат. Необходимо получить закон движения и уравнение, описывающее траекторию движения. Центр масс тела находится на расстоянии $d/2$ от левого крыла и $l/2$ от переднего бампера. Профили передних колёс повернуты на угол A относительно задних (рис. 14). Вращающий момент передается только на передние колеса.

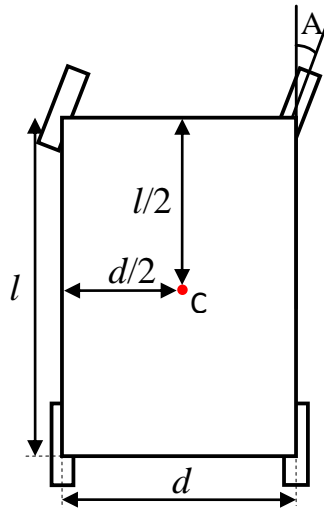


Рис. 14. К выводу уравнений движения

Сила тяжести сонаправлена с ускорением свободного падения и приложена к центру масс тела. К задним колёсам приложены две силы трения качения, направленные параллельно профилям колёс обратно направлению движения автомобиля. На передние колёса действуют две силы тяги, параллельные профилям колёс, и две силы трения, направленные противоположно им. Ко всем колесам приложены силы реакции опоры, которые действуют в сторону, противоположную ускорению свободного падения (рис. 15).

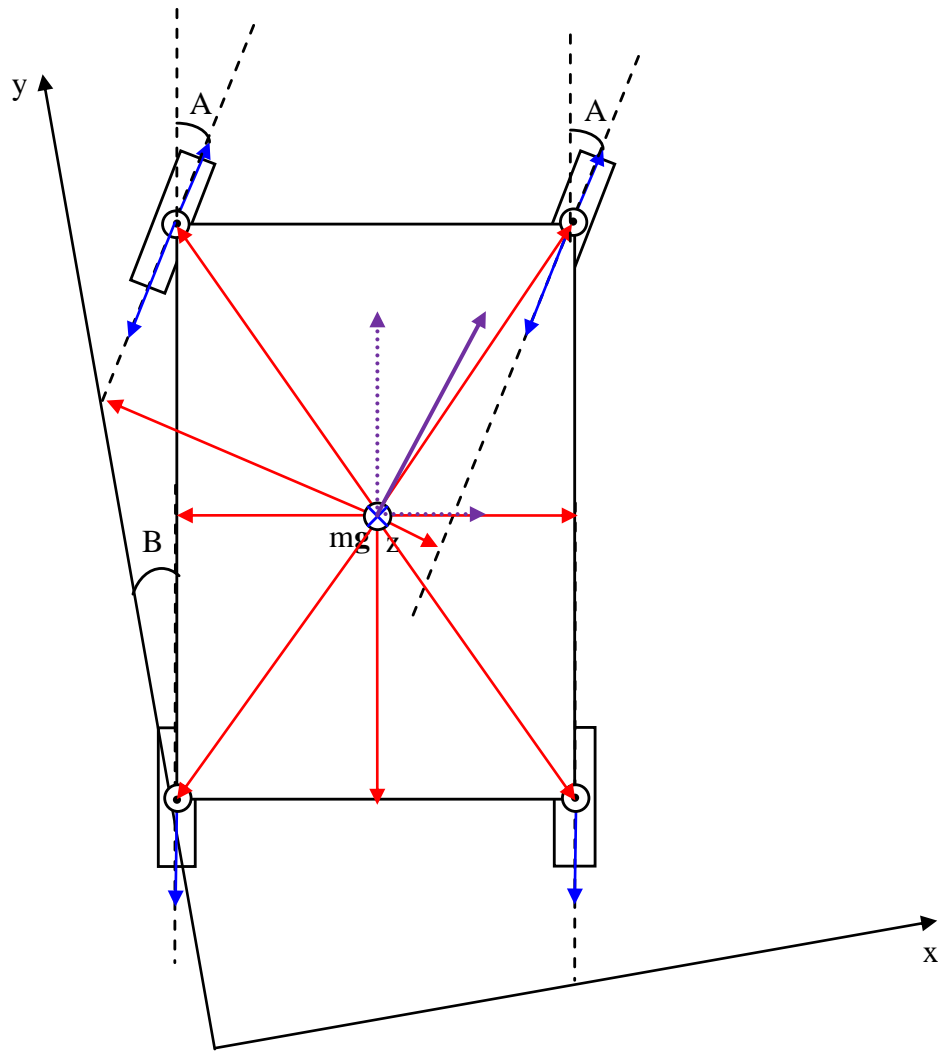


Рис. 15. К выводу уравнения движения

Воспользуемся алгоритмом решения предыдущей задачи и получим следующие конечные выражения для проекций второго Закона Ньютона и уравнения моментов:

$$\begin{aligned}
mx''(t) = & 2 \frac{M(t)}{R} \sin(A(t) + B(t)) - \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2l} \sin(B(t)) - \\
& \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \sin(B(t)) - \\
& \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \sin(A(t) + B(t)) - \\
& \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \sin(A(t) + B(t));
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
my''(t) = & 2 \frac{M(t)}{R} \cos(A(t) + B(t)) - \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(B(t)) - \\
& \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(B(t)) - \\
& \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(A(t) + B(t)) - \\
& \frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(A(t) + B(t));
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{m(d^2+l^2)}{12} B''(t) = & \frac{d\Psi}{2R} \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} lm(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} - \\
& \frac{d\Psi}{2R} \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} lm(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} - \\
& \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} lm(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \frac{\Psi}{R} \frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2}}{\sin(\arctan(\frac{l}{d}) + A(t))} + \\
& \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} lm(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \frac{\Psi}{R} \frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2}}{\sin(\arctan(\frac{l}{d}) - A(t))} + \\
& + \frac{M(t)}{R} \frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2}}{\sin(\arctan(\frac{l}{d}) + A(t))} - \frac{M(t)}{R} \frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2}}{\sin(\arctan(\frac{l}{d}) - A(t))}; \tag{32}
\end{aligned}$$

Решение системы дифференциальных уравнений, включающей в себя уравнения (30), (31) и (32), при различных при различных начальных скоростях и координатах по обеим осям координат, а также угловой скорости и углу поворота корпуса, позволит описывать движение переднеприводного автомобиля как АТТ.

§4. Вывод уравнений движения для автомобиля с полным приводом

Рассмотрим автомобиль массой m , имеющий форму прямоугольника длиной l и шириной d . Рассмотрим движение автомобиля относительно неподвижной системы координат. Необходимо получить закон движения и уравнение, описывающее траекторию движения. Центр масс тела находится на расстоянии $d/2$ от левого крыла и $l/2$ от переднего бампера. Профили передних колёс повернуты на угол A относительно задних (рис. 16). Вращающий момент передается на передние и задние колеса.

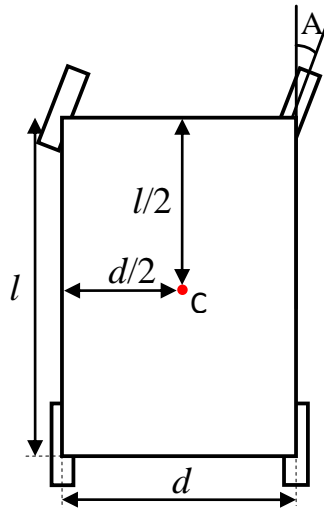


Рис. 16. К выводу уравнений движения

Сила тяжести сонаправлена с ускорением свободного падения и приложена к центру масс тела. К задним колёсам приложены две силы тяги, направленные параллельно профилям колёс, и две силы трения качения, направленные обратно им. На передние колёса действуют две силы тяги, параллельные профилям колёс, и две силы трения, направленные противоположно им. Ко всем колесам приложены силы реакции опоры, которые действуют в сторону, противоположную ускорению свободного падения (рис. 17).

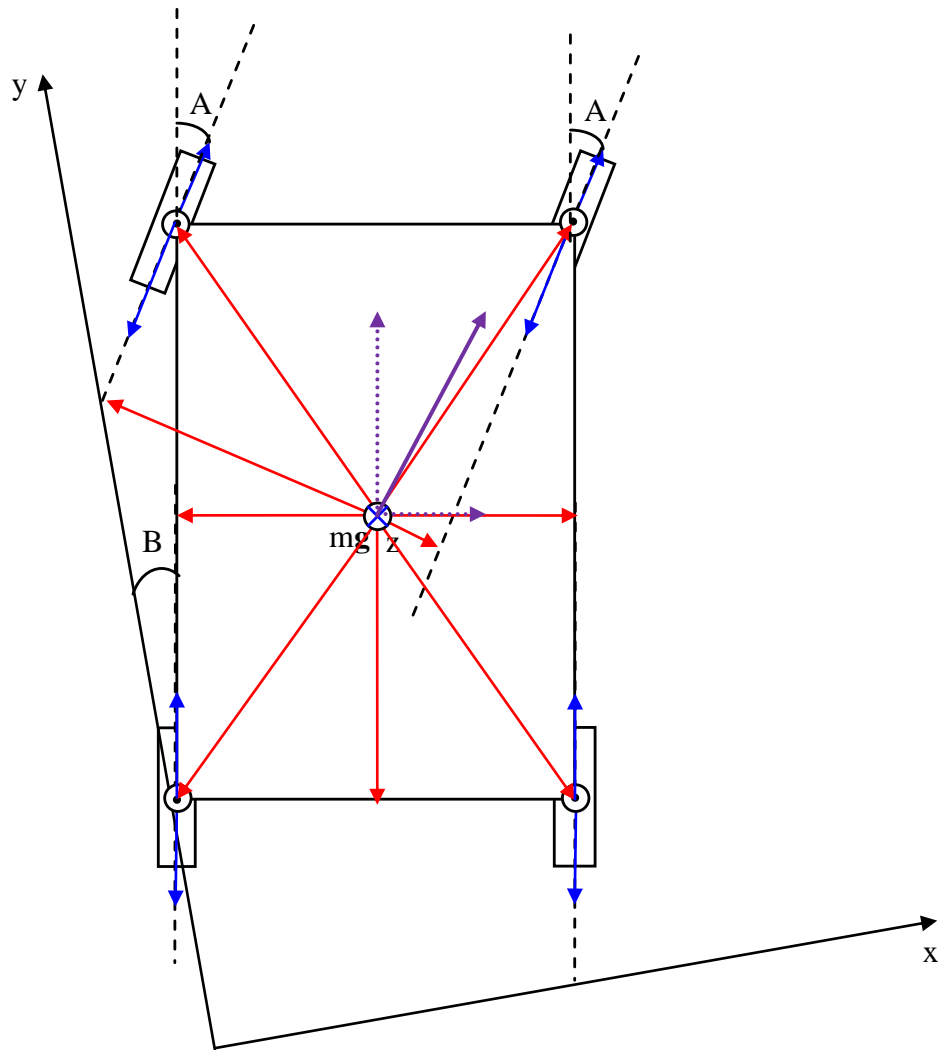


Рис. 17. К выводу уравнения движения

Воспользуемся алгоритмом решения двух предыдущих задач и получим следующие конечные выражения для проекций второго закона Ньютона на обе оси и уравнения моментов:

$$\begin{aligned}
mx''(t) &= \frac{M(t)}{R} \sin(B(t)) + \frac{M(t)}{R} \sin(A(t) + B(t)) - \\
&\frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \operatorname{Im}(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2l} \sin(B(t)) - \\
&\frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \operatorname{Im}(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \sin(B(t)) - \\
&\frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \operatorname{Im}(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \sin(A(t) + B(t)) - \\
&\frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \operatorname{Im}(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \sin(A(t) + B(t));
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
my''(t) &= \frac{M(t)}{R} \cos(B(t)) + \frac{M(t)}{R} \cos(A(t) + B(t)) - \\
&\frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \operatorname{Im}(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(B(t)) - \\
&\frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \operatorname{Im}(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(B(t)) - \\
&\frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \operatorname{Im}(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(A(t) + B(t)) - \\
&\frac{\Psi}{R} \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \operatorname{Im}(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(A(t) + B(t));
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
\frac{m(d^2+l^2)}{12} B''(t) = & \frac{d\Psi}{2R} \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} - \\
& \frac{d\Psi}{2R} \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} - \\
& \frac{mgd/2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \frac{\Psi}{R} \frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2}}{\sin(\arctan(\frac{l}{d}) + A(t))} + \\
& \frac{mgd/2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \frac{\Psi}{R} \frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2}}{\sin(\arctan(\frac{l}{d}) - A(t))} + \\
& + \frac{M(t)}{R} \frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2}}{\sin(\arctan(\frac{l}{d}) + A(t))} - \frac{M(t)}{R} \frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2}}{\sin(\arctan(\frac{l}{d}) - A(t))}; \tag{35}
\end{aligned}$$

Решение системы дифференциальных уравнений, включающей в себя уравнения (33), (34) и (35), при различных начальных скоростях и координатах по обеим осям координат, а также угловой скорости и углу поворота корпуса, позволит описывать движение полноприводного автомобиля как АТТ.

§5. Вывод условий перехода трения качения в трение скольжения

Чтобы смоделировать скольжение автомобиля относительно дороги, необходимо знать, при каких условиях автомобиль теряет сцепление с дорогой и что при этом происходит с основными параметрами его движения. Поэтому необходимо получить закон движения для автомобиля с проскальзывающими ведущими колесами и с непроскальзывающими, сравнить эти законы.

Рассмотрим прямолинейное движение заднеприводного автомобиля массы m , под действием вращающего момента, который описывается некоторой аналитической функцией $M(t)$.

На задние колеса автомобиля будут действовать силы тяги, параллельные направлению движения автомобиля и силы трения качения, противоположные им. В варианте с проскальзыванием, силы трения качения задних колес заменят силы трения скольжения, сонаправленные с ними. На передние колеса будут действовать только силы трения качения. На все колеса действуют силы реакции опоры перпендикулярные поверхности, а на корпус сила тяжести, сонаправленная с ускорением свободного падения g (рис. 18).

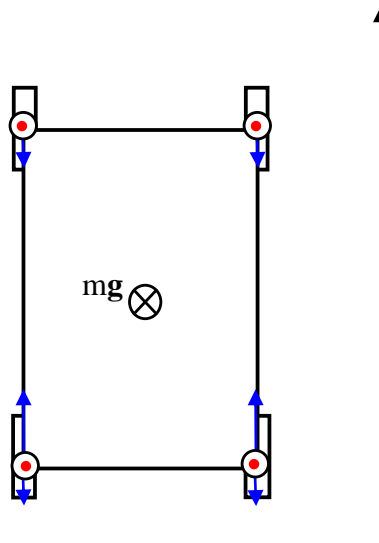


Рис. 18. К выводу проскальзывания

Второй закон Ньютона примет вид:

$$m \vec{a} = \vec{F}_{Tp_1} + \vec{F}_{Tp_2} + \vec{F}_{Tp_3} + \vec{F}_{Tp_4} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{N}_4 + \vec{F}_{T_1} + \vec{F}_{T_2} + m \vec{g}; \quad (36)$$

В проекции на ось x :

$$m\alpha(t) = -F_{Tp_1} - F_{Tp_2} - F_{Tp_3} - F_{Tp_4} + F_{T_1} + F_{T_2}; \quad (37)$$

Реакции опоры на все колеса будут равны, согласно формулам (24) и (27). Тогда, после преобразований получим:

$$m\alpha(t) = \frac{2M(t)}{R} - mg \frac{\Psi}{R}; \quad (38)$$

где $\alpha(t)$ – ускорение, R – радиус колеса, Ψ – коэффициент трения качения.

Для варианта с проскальзыванием получим соответственно выражение:

$$m\alpha(t) = \frac{2M(t)}{R} - m\frac{g}{2}\mu - mg\frac{\Psi}{2R}; \quad (39)$$

где $\alpha(t)$ – ускорение, R – радиус колеса, Ψ – коэффициент трения качения, μ – коэффициент трения скольжения.

Глава 3. Результаты моделирования

§1. Характеристики модели автомобиля

Для постановки численных экспериментов были подобраны численные характеристики модели, используемые в моделировании:

- Ширина d равна 1.825 м.
- Длина l равна 4.625 м.
- Масса m равна 1625 кг.
- Коэффициент трения скольжения μ равен 0.65.
- Коэффициент трения качения Ψ равен 0.0225 м.
- Радиус колеса R равен 0.24 м.

§2. Обсуждение результатов моделирования движения для автомобилей с передним, задним и полным приводами

Для того, чтобы доказать адекватность решения задач, описанных в параграфах 2-4 математической постановки, решим все 3 системы дифференциальных уравнений со следующими начальными условиями:

$$V'(0)=0, V(0)=0, x'(0)=0, x(0)=0, y'(0)=0.0001, y(0)=0, M(t)=400+400\sqrt{t}, A(t)=0.$$

Автомобиль должен двигаться прямолинейно, параллельно оси y , V меняться не должен.

В результате решения системы в математическом пакете Mathematica, были получены 3 пары тривиальных графиков зависимостей $y(x)$ и $B(t)$ (рис. 19).

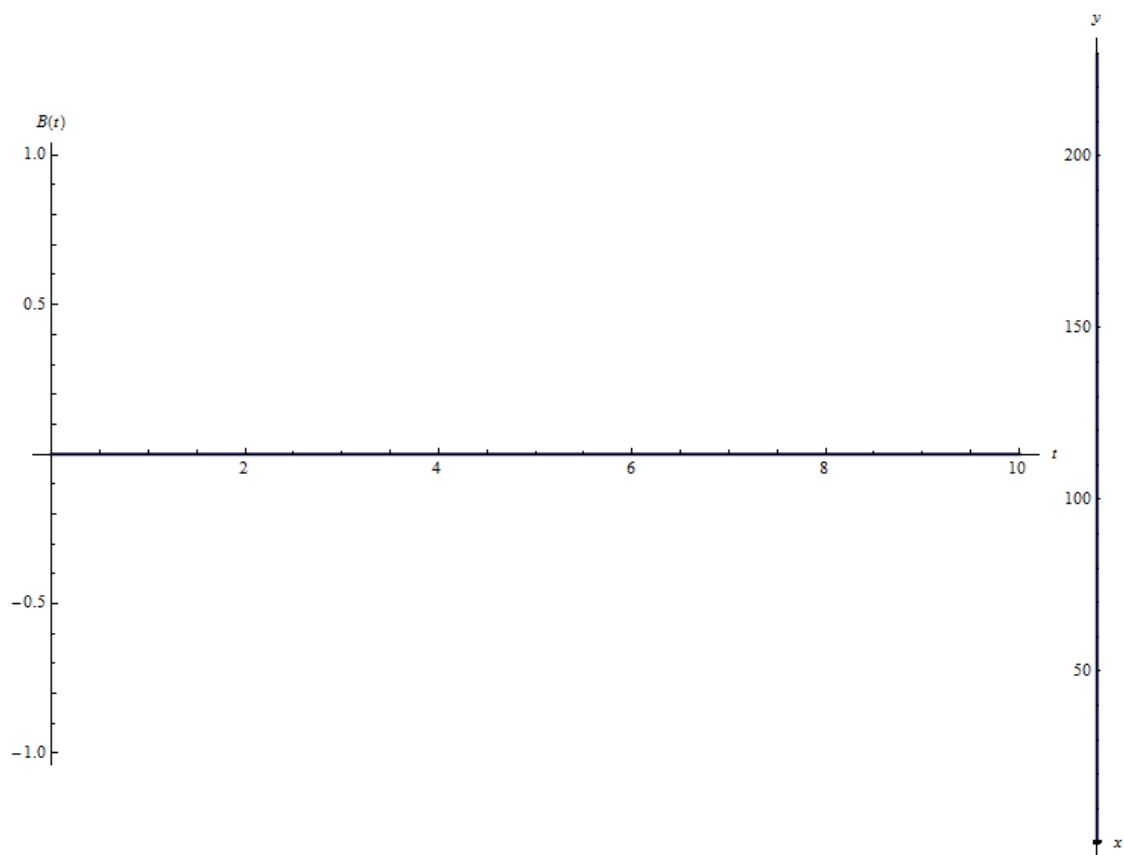


Рис. 19. Зависимости $B(t)$ и $y(x)$

Полученный результат полностью соответствует ожиданиям, так как очевидно, что автомобиль в отсутствие поворота колес будет двигаться прямолинейно, не будет испытывать вращения, значит, показания модели в нужной степени адекватности описывают движение реально автомобиля. А идентичность зависимостей для всех трех приводов говорит о том, что при принятых гипотезах модели разгонные качества автомобиля не зависят от привода.

§3. Обсуждение условий перехода трения качения в трение скольжения

Построим зависимости ускорения от времени согласно законам (38) (рис. 20, сплошная линия) и (39) (рис. 20, пунктирная линия), когда $M(t)=400+400\sqrt{t}$, чтобы сравнить движение с проскальзыванием и без.

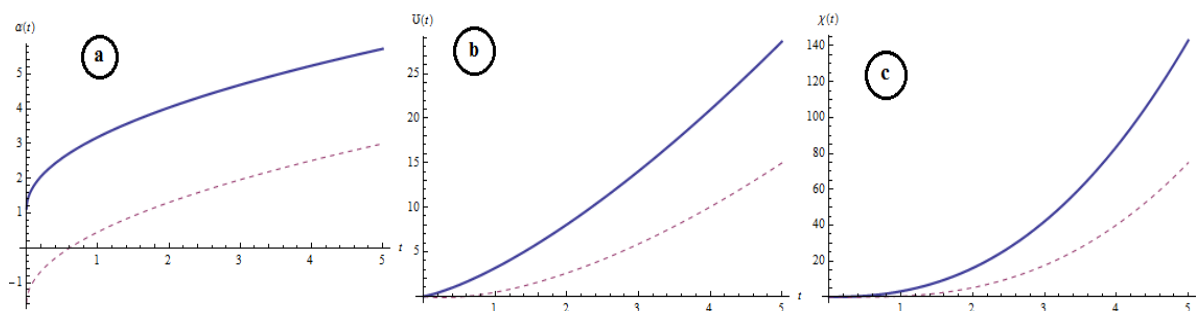


Рис. 20. Зависимости а).ускорения, б).скорости, с).координаты от времени

Анализируя графики зависимостей, можно заметить, что в среднем значения функции с проскальзыванием вдвое меньше значений без проскальзывания, это значит, что движение с проскальзыванием менее эффективно, чем движение без проскальзывания, что доказывает адекватность решения задачи.

§4. Обсуждение численных экспериментов

Для получения ответа на поставленный вопрос, автомобиль с каким приводом является наиболее эффективным при возникновении заноса, необходимо провести ряд численных экспериментов, анализируя которые, можно будет сказать, автомобиль с каким приводом наиболее устойчиво проходит поворот и позволяет наиболее просто вывести себя из заноса.

Будет поставлено и описано два качественных эксперимента.

Рассмотрим ситуацию, когда автомобиль движется на некоторой скорости, поворачивает передние колеса на угол в 22.5 градуса и начинает увеличивать вращающий момент.

В результате моделирования получим 2 серии графиков: зависимости угла поворота корпуса от времени и траектории движения при движении с задним, передним и полным приводом соответственно (рис. 21, 22).

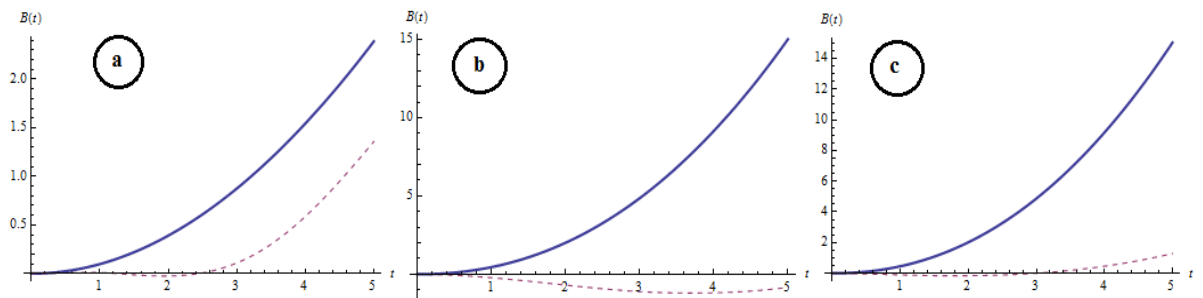


Рис. 21. Зависимости угла поворота корпуса от времени а).задний привод, б).передний привод, с).полный привод, пунктир – скольжение, сплошной – без скольжения

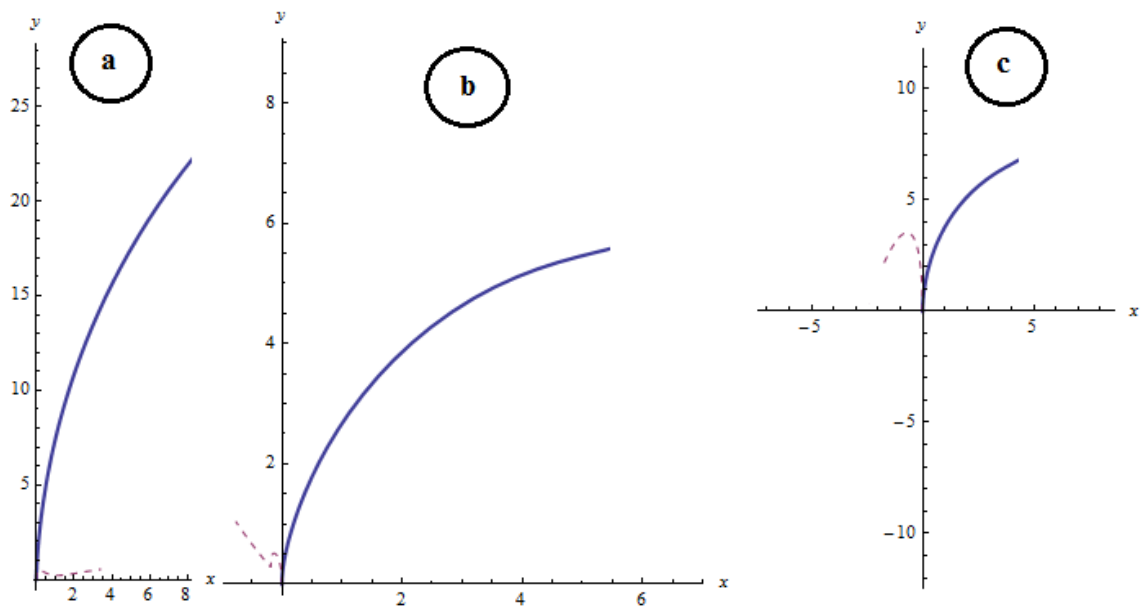


Рис. 22. Траектории движения а).задний привод, б).передний привод, с).полный привод, пунктир – скольжение, сплошной – без скольжения

Проанализировав графики, представленные на рис. 21, можно сказать, что заднеприводный автомобиль гораздо быстрее уходит в занос, чем переднеприводный и полноприводный, это выражено в резком росте угла поворота корпуса и обусловлено тем, что передние колеса создают силу трения, препятствующую движению автомобиля, а задние колеса стремятся двигаться вперед, поэтому любое изменение угла поворота корпуса влечет за собой проскальзывание задних колес и стремление их развернуть автомобиль перпендикулярно направлению движения. Также следует сказать, что при этом возникает избыточная поворачиваемость.

Отметим, что переднеприводный и полноприводный автомобиль не стремятся уйти в занос, при резком повороте передних колес возникает недостаточная поворачиваемость, это видно на рис. 22, так как и тот и другой автомобиль начинают двигаться по траектории противоположной по направлению нормальной. Стоит отметить, что полноприводный автомобиль за счет составляющей заднего привода уходит в занос, но гораздо позднее заднеприводного автомобиля.

Можно сделать *вывод*: заднеприводный автомобиль уходит в занос намного раньше переднеприводного и полноприводного автомобиля, но и занос происходит по-разному, так заднеприводный автомобиль скользит задними колесами, переднеприводный – передними, полноприводный – задними и передними.

Рассмотрим ситуацию, когда автомобиль, двигаясь в заносе, перестает ускоряться и поворачивает колеса параллельно нормальному направлению движения. Это один из самых очевидных и распространенных способов выйти из заноса, так как модель рассчитана на использование начинающими водителями был выбран именно этот способ. Очевидно, что в данном эксперименте нет смысла приводить графики зависимостей для ситуаций без проскальзывания, поэтому все приведенные графики относятся к движению с проскальзыванием.

В результате моделирования получим 2 серии графиков: зависимости угла поворота корпуса от времени и траектории движения при движении с задним, передним и полным приводом соответственно (рис. 23, 24).

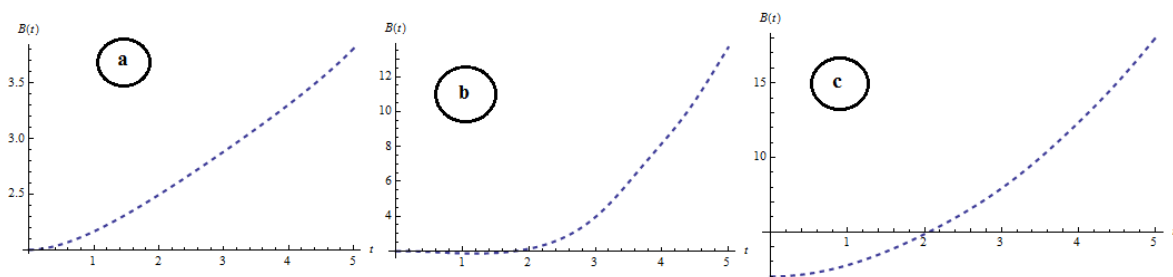


Рис. 23. Зависимости угла поворота корпуса от времени а).задний привод, б).передний привод, с).полный привод

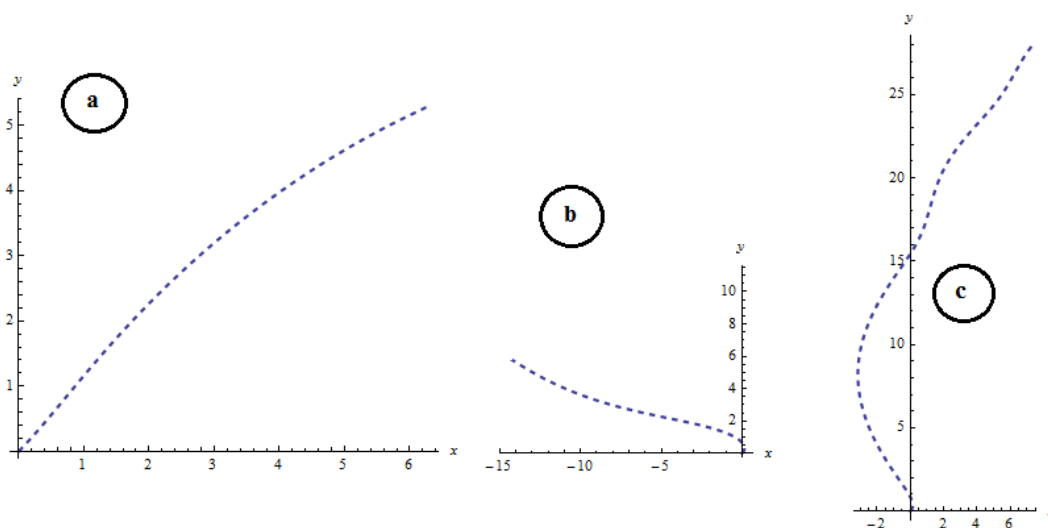


Рис. 24. Траектории движения а).задний привод, б).передний привод, с).полный привод

Проанализировав графики, представленные на рис. 23, можно сказать, что заднеприводный автомобиль сразу же начинает выходить из состояния заноса и возвращается к нормальному движению, это обусловлено тем, что задние колеса стремятся вернуться в положение, когда они параллельны направлению движения, стабилизируя линию движения.

Переднеприводный же автомобиль не стремится вернуться в состояние нормального движения, он движется с проскальзыванием передних колес до тех пор, пока они снова не получат сцепление с

дорогой, но, как видно на рис. 24, это происходит через длительное время, за которое автомобиль либо серьезно замедлится, либо встретит препятствие.

За счет составляющей заднего привода полноприводный автомобиль стремится выйти из состояния заноса, но делает это намного медленнее чем заднеприводный, это обусловлено тем, что передние колеса не имеют сцепления с дорогой и не могут задать направление движения, пока не получат сцепление.

Можно сделать *вывод*: данный прием подходит для того, чтобы вывести из заноса заднеприводный автомобиль, менее эффективен для вывода из заноса полноприводного автомобиля и абсолютно неэффективен для борьбы с заносом на переднеприводном автомобиле.

Заключение

В настоящей работе была поставлена задача разработки и исследования математической модели заноса автомобиля. Выполнена содержательная и концептуальная постановки задачи, а именно: поставлена цель, выдвинут актуальный вопрос, выдвинуты гипотезы, описаны входные и выходные данные, также выполнена математическая постановка, а именно: решены следующие задачи:

- Определена сила реакции опоры автомобиля в зависимости от радиуса поворота и линейной скорости автомобиля.
- Получен закон движения автомобиля как АТТ, для полного, заднего и переднего приводов.
- Получено условие потери сцепления колеса с поверхностью дороги, выведен закон для прямолинейного движения в такой ситуации.

Выполнены проверки на адекватность решенных задач, подобраны характеристики модели, проведены эксперименты необходимые для ответа

на актуальный вопрос, сформулирован ответ на поставленный вопрос:

Однозначно сказать, какой привод лучше, нельзя, полезность того или иного привода зависит от каждой конкретной ситуации и условий, в которых она возникает, однако, можно точно сказать, что заднеприводный автомобиль уходит в занос раньше и быстрее, чем полноприводный и переднеприводный, однако, он так же быстро может выйти из заноса. Передний привод, в свою очередь, сложно увести в скольжение, но, вывести из заноса переднеприводный автомобиль зачастую не под силу даже опытному водителю. Полный привод зачастую считается самым безопасным, однако, он взял от переднего и заднего привода не только достоинства, но и недостатки, так полноприводный автомобиль уходит в скольжение сразу всеми колесами, что многократно усложняет управление им в состоянии заноса, однако, он имеет очень хорошую устойчивость.

Список литературы

1. Википедия – Свободная энциклопедия, статья «Задний привод» [Электронный ресурс]. URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/%C7%E0%E4%ED%E8%E9_%EF%F0%E8%E2%EE%E4 (дата обращения: 16.09.2012).
2. Википедия – Свободная энциклопедия, статья «Список моментов инерции» [Электронный ресурс]. URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BF%D0%B8%D1%81%D0%BE%D0%BA_%D0%BC%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%B2_%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D1%80%D1%86%D0%B8%D0%B8 (дата обращения: 21.01.2013).
3. Math24.ru – Высшая Математика, статья «Кривизна плоских кривых» [Электронный ресурс]. URL: <http://www.math24.ru/curvature-of-plane-curves.html> (дата обращения: 23.01.2013).