Краевая научно-практическая конференция учебно-исследовательских и проектных работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Конвекция жидкости

Подседерцев Андрей,
11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Анферов Сергей Дмитриевич,
преподаватель физики

Пермь. 2013.

Оглавление

Введение 3

Схема установки 4

Теоретическое предположение 5

Введение

Цель работы: теоретическое и экспериментальное исследование явления конвекции в жидкости.

План работы: рассмотреть слой жидкости нагреваемый снизу, определить линии тока жидкости в ходе конвекции. Поставить и провести эксперимент по наблюдению явления конвекции. Сравнить экспериментальные данные с полученными теоретически.

Схема установки

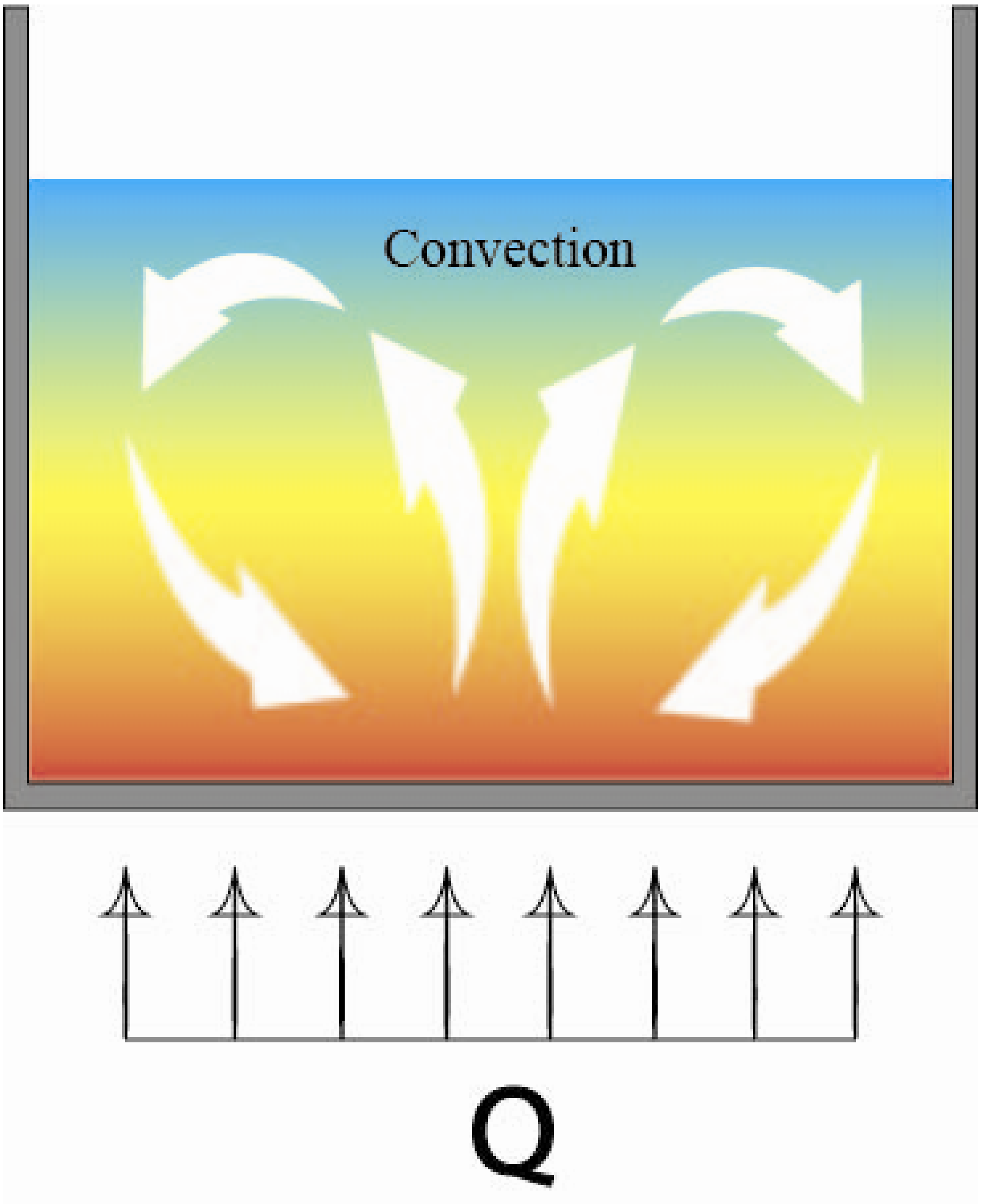

Рисунок 1 Схема установки

Теоретическое предположение

В неравномерно нагретой жидкости, находящейся в поле тяжести, при определенных условиях возможно механическое равновесие. Если неоднородность температуры достаточно велика, то равновесие становится неустойчивым и в результате развития возмущений сменяется конвективным движением. В тех же условиях когда равновесие невозможно конвекция возникает при сколь угодно малой неоднородности температуры.

Макроскопические движения жидкости или газа описываются системой уравнений гидродинамики. Эта система включает в себя уравнение движения Навье-Стокса, общее уравнение переноса тепла и уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения массы, уравнение состояния среды. Вид системы уравнений для реальной сжимаемой жидкости, находящейся в поле тяжести:

$$\rho\left[\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+(\upsilon\nabla)\upsilon\right]=-\nabla p+\eta\Delta\upsilon+\left(\frac{\eta}{3}+\xi\right)\nabla div\upsilon+\rho g \ , \quad (1)$$

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\upsilon\nabla s\right)=\chi\Delta T+D \ , \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+div(\rho\upsilon)=0 \ , \quad (3)$$

$$\rho=\rho(T,p) \ . \quad (4)$$

В этих уравнениях υ - скорость, p - давление, ρ - плотность, T - абсолютная температура, s - энтропия единицы массы жидкости, g - ускорение силы тяжести, η и ξ - коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости, χ - коэффициент теплопроводности, D – диссипативная функция.

В неравномерно нагретой жидкости, возникает конвективное движение. Существуют, однако, условия при которых жидкость может находится в состоянии механического равновесия.

Для получения условия равновесия необходимо преобразовать уравнения конвекции в которых скорость примем равной нулю. Обозначим равновесные распределения температуры и давления через T_0 и p_0 и получим уравнения этих величин(y - единичный вектор направленный по вертикали вверх:

$$-\frac{1}{\rho_0}\nabla p_0+g\beta T_0 y=0 \, , \quad (5)$$

$$\beta=-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \ , \quad (6)$$

$$\Delta T_0=0 \, . \quad (7)$$

Применим к уравнению (5) операцию rot. Учитывая, что $rot\nabla p_0=0$, а y постоянна, получим

$$\nabla T_0\times y=0 \, . \quad (8)$$

Значит ∇T_0 параллелен вектору y в системе координат, а значит горизонтальные компоненты градиента температуры равны нулю и температура зависит только от вертикальной координаты. Возвращаясь к уравнению (5) получим $\frac{d^2T_0}{dz^2}=0$, откуда следует, что температура изменяется линейно.

Итак, в состоянии механического равновесия температура жидкости линейно зависит от вертикальной координаты. Равновесный градиент во всех точках жидкости вертикален и имеет постоянное значение(А – постоянная величина, если ось z направлена вверх, то А>0 убывание, а А<0 возрастание температуры с высотой):

$$\nabla T_0 = -Ay \tag{9}$$

Это и есть условие равновесия, которое было сформулировано В.С.Сорокиным

Как уже указывалось, механическое равновесие неравномерно нагретой жидкости может оказаться устойчивым и неустойчивым. Равновесие устойчиво, если все возмущения со временем затухают. Если же одно или несколько возмущений нарастают, то равновесие неустойчиво относительно этих возмущений. Их развитие приведет к тому, что нарушится равновесие и возникнет конвекция. В реальных условиях неизбежно возникнут возмущения. Поэтому равновесие жидкости можно наблюдать только в случае, когда оно устойчиво.

Запишем систему уравнений для возмущений в безразмерном виде, где полость окружена теплопроводным массивом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = -\nabla p + \Delta\upsilon + RTy,\\
&P\frac{\partial T}{\partial t} - (\upsilon y) = \Delta T,\\
&div\upsilon = 0,\\
&P\chi\frac{\partial T_m}{\partial t} = \Delta T_m.
\end{aligned}\right\} [1, c.18] \tag{10}$$

Здесь υ, p, T, T_m - безразмерные возмущения, а все производные бертся по безразмерным времени и координатам. Малые возмущения равновесия удовлетворяют системе линейных однороденых уравнений в частных производных с постоянными коэфицентами. Данная система имеет частные решения зависящие от времени по экспотенциальному закону:

$$\{\upsilon, p, T, T_m\} \sim \exp(-\lambda T),$$

Где λ - декремент, определяющий временной под возмущения.

С физической точки зрения ясно, что при достаточно большой разности температур равновесие подогреваемой снизу жидкости становится неустойчивым. Декременты становятся отрицательными, а сами возмущения начинают возрастать. Если декремент обратится в нуль, то выполнится условие при котором возмущение «нейтрально».

Систематическое исследование проблемы конвективной устойчивости было начато известными опытами Бенара, наблюдавшего возникновение ячеистой конвекции в подогреваемом снизу слое спермацета. Через некоторое время Рэлей решил задачу об устойчивости равновесия слоя со свободными границами, что послужило началом развития теории конвективной устойчивости. С тех пор горизонтальный слой жидкости был и остается излюбленным объектом изучения конвективной устойчивости.

При рассмотрении бесконечного горизонтального слоя при фиксированной температуре на границах градиент температуры жидкости равен

$$\nabla T_0 = -Ay ,$$

где $A = \Theta / h$, а Θ - разность температур между плоскостями.

Поведение малых возмущений описывается уравнениями(10):

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = -\nabla p + \Delta u + RTy \ , \qquad (11)$$

$$P\frac{\partial T}{\partial t} - (\upsilon y) = \Delta T \ , \qquad (12)$$

$$div\upsilon = 0 . \qquad (13)$$

Из этих уравнений можно исключить давление и горизонтальные составляющие скорости. Получим систему двух уравнений для скорости по оси Z и возмущения температуры T:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta \upsilon_z = \Delta\Delta \upsilon_z + R\Delta_1 T \ , \qquad (14)$$

$$P\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \upsilon_z \ . \qquad (15)$$

Здесь $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - плоский лапласиан.

Чтобы хорошо были видны основные особенности спектра декрементов, напишем уравнение относительно λ. Корни которого будут давать значения декрементов в зависимости от параметров – чисел Рэлея и Прандтля и волнового числа:

$$\lambda_n = \frac{P+1}{2P}(n^2\pi^2 + k^2) \pm \sqrt{\left(\frac{P-1}{2P}\right)^2 (n^2\pi^2 + k^2)^2 + \frac{Rk^2}{P(n^2\pi^2 + k^2)}} \text{ ,[1,c34]} \qquad (16)$$

В котором n определяет характерный масштаб возмущений по вертикали и их четность, k - вещественно волновое число, характеризующее периодичность возмущений вдоль направлений x и y. При увеличении $|R|$ подкоренное выражение становится отрицательным и формула(16) дает пару комплексно-сопряженнх декрементов, соответствующих колебательным возмущениям. Частота колебаний равна мнимой части λ

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{k^2}{P(n^2\pi^2 + k^2)}\left(R_* - R\right)} \qquad (17)$$

и растет по мере удаления от точки R_* по корневому закону. Здесь $R_* = -\frac{(P-1)^2}{4P} \cdot \frac{(n^2\pi^2 + k^2)}{k^2}$.

Рассмотренаня задача Рэлея имеет простое точное решение, позволяющее понять особенности проблемы, но со свободными границами. В случае слоя с твердыми границами задача исследования устойчивости сводится к решению системы уравнений[1,с.33-34]

$$-\lambda(\upsilon''-k^2\upsilon)=(\upsilon^{IV}-2k^2\upsilon''+k^4\upsilon)-RK^2\Theta\,, \tag{18}$$

$$-\lambda P\Theta=(\Theta''-k^2\Theta)+\upsilon. \tag{19}$$

с граничными условиями т.к. на твердой границе исчезают все компоненты скорости. Здесь штрих означает дифференцирование по z. Возмущение температуры на границах обращается в нуль. Следовательно, получаем граничные условия

при $z=0$ и $z=1$ $\upsilon=\upsilon'=0$, $\Theta=0$.

При экспериментальном изучении для поддержания условий, соответствующих плоским изотермическим границам, необходимо проводить эксперименты со слоями жидкости, находящимися между хорошо проводящими пластинами. Идея такого метода определения границы неустойчивости предложена в работе Шмидта и Мильвертона. Положение излома, появляющегося при нарушении теплопроводного режима переноса тепла, дает возможность с достаточной точностью определить критическую разность температур.

В приведенных выше материалах граничные условия для температуры во всех случаях были одинаковыми. Эти условия соответствуют предельному случаю бесконечной теплопроводности границ. Более общие граничные условия для температуры получаются в том случае, когда решаются задачи об устойчивости равновесия жидкости в горизонтальном слое, граничащем сверху и снизу с полубесконечными твердыми массивами, с отличной теплопроводностью от теплопроводности жидкости. Для вычисления критического числа Рэлея в данном случае необходимо к уравнениям возмущений в жидкости добавить уравнения для возмущений температуры в массивах. Сформулировать граничные условия и ввести коэффициенты C_1 и C_2 для упрощения вычисления.[1,с.51-52]

$$C_1=\frac{2(12+k^2)(chk+\chi_2 shk-1)+12k(\chi_1 shk+\chi_1\chi_2 shk-\chi_2)}{k^6\left[\left(1+\chi_1\chi_2\right)shk+\left(\chi_1+\chi_2\right)chk\right]}\,, \tag{20}$$

$$C_2=-\frac{2(12+k^2)(shk+\chi_2 chk+\chi_1)+12k\chi_1(shk+\chi_2 chk+\chi_2)}{k^6\left[\left(1+\chi_1\chi_2\right)shk+\left(\chi_1+\chi_2\right)chk\right]}\,. \tag{21}$$

Отсюда получим формулу для критического числа Рэлея:

$$R=\frac{f_1}{f_2+1260k\left(C_1 f_3+C_2 f_4\right)}. \tag{22}$$

Здесь коэффиценты С определены формулами, а f - функции волновго числа k:

$$\left.\begin{aligned} f_1&=k^4(k^4+24k^2+504),\\ f_2&=k^4+24k^2+504,\\ f_3&=(12+k^2)(chk-1)-6kshk,\\ f_4&=(12+k^2)shk-6k(chk+1).\end{aligned}\right\}. \tag{23}$$

Конвекция так же может возникать и в системе двух плоских бесконечных горизонтальных слоев жидкости, разделенных твердой теплопроводной прослойкой. Температурные возмущения, возникшие в одном из слоев, проникают в другой, и поэтому эти слои образуют единую систему. На границах жидких слоев с массивами и прослойкой скорость жидкости равна нулю и имеет место непрерывность температуры и тепловых потоков. Таким образом, имеем граничные условия:

$$\text{при } z = z_1 \text{ и } z = z_2 \ \upsilon = \upsilon' = 0, \ \Theta = \Theta_m, \ \chi\Theta' = \Theta'_m, \tag{24}$$

где z_1 и z_2 - внутренняя и внешняя границы слоев. По аналогичному алгоритму с двумя массивами вычислим критическое число Рэлея, и получим

$$R = \frac{(g_1 + \chi g_2) thkz_1 + \chi g_2 + \chi^2 g_1}{(g_3 + \chi g_4) thkz_1 + \chi g_4 + x^2 g_5}. \tag{25}$$

Здесь g - функции волнового числа k:

$$g_1 = (504 + 24k^2 + k^4)k^9,$$

$$g_2 = (504 + 24k^2 + k^4)k^9 cthk,$$

$$g_3 = (504 + 24k^2 + k^4)k^5 + 5040(12 + k^2)\left[6k - \left(12 + k^2\right) th\frac{k}{2}\right]$$

$$g_4 = (504 + 24k^2 + k^4)k^5 cthk + 2520\left[12k\left(12 + k^2\right)\csc hk - \left(144 - 12k^2 + k^4\right)\right],$$

$$g_5 = (504 + 24k^2 + k^4)k^5 + 30240k\left[6k \cdot cth\frac{k}{2} - \left(12 + k^2\right)\right].$$

Из общей формулы можно получить предельный случай, соответствующий одиночному горизонтальному слою жидкости, ограниченному сверху и снизу массивами одинаковой теплопроводности. При увеличении толщины твердой прослойки тепловое взаимодействие ослабевает, и слои становятся независимыми и устойчивость равновесия повышается.

При решении задач о конвективной устойчивости Рэлей предложил считать границы слоя плоскими и свободными. Однако, эти граничные условия являются искусственными. В действительности поверхность будет деформироваться. Поэтому следует, учитывать, что возникновение конвективных возмущений в жидкости приводит к искривлению свободной поверхности и появлению на ней гравитационно-капилярных волн. С другой стороны, деформируемость свободной поверхности оказывает малое влияние на границу устойчивости и может оказаться заметен лишь в очень тонких слоях вязких жидкостей.