Краевая научно-практическая конференция учебно-исследовательских и проектных работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Решение задач в области целых чисел

Пономарева Анна Сергеевна,

11 кл., МАОУ СОШ №10 г. Чайковский,

Ашихмина Светлана Ивановна,

учитель математики

Пермь. 2013.

Содержание:

Введение

В нашей жизни важно получить высшее образование. И чтобы быть успешным, необходимо закончить высшее учебное заведение. Но перед этим очень важно сдать единый государственный экзамен. А сдать ЕГЭ поможет только очень хорошая подготовка к нему. Больше всего баллов на ЕГЭ по математике можно получить за часть С. А в части С предлагаются задачи повышенной сложности и нестандартные задачи.

Проблема: В **10-11** классах при подготовке к ЕГЭ по математике уделяется недостаточно времени на часть С (особенно на С6). И поэтому ученикам приходится самостоятельно изучать и осваивать приемы и методы решения сложных и нестандартных задач.

В своей исследовательской работе я рассматриваю теорию целых чисел и связанные с ней задачи.

Цель: Нахождение методов и способов решения задач повышенной сложности и нестандартных задач в области целых чисел.

Гипотеза: Задачи повышенной сложности из области целых чисел можно решить, если знать различные методы и способы их решения.

В связи с поставленной целью и выдвинутой гипотезой были сформулированы следующие **задачи:**

1. Изучение научной литературы по данной теме.
2. Осмысление основных понятий по выбранной теме.
3. Поиск и подборка задач.

4. Решение найденных задач разными способами.

Методы исследования:

1. Анализ литературных и Интернет источников.
2. Моделирование.
3. Сравнение.
4. Синтез.
5. Описание.

Немного из истории

Раздел математики, занимающийся изучением целых чисел и их свойств, называется теорией чисел или высшей арифметикой.

Среди целых чисел особое место занимают натуральные числа, которые можно разделить на два класса: простые и составные. К первому классу относятся числа, имеющие своими делителями два числа: единицу и само себя. Ко второму классу относятся все остальные числа.

Простые числа, их свойства и связь со всеми натуральными числами изучались Евклидом (3 век до нашей эры). Он считал, что любое число натурального ряда может быть единственным образом представлено как произведение простых чисел. В «Началах» Евклид указал способ нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух чисел, следствием из которого является теорема об однозначном разложении натуральных чисел на простые сомножители. С понятием наименьшего общего делителя двух чисел связано понятие их наименьшего общего кратного (НОК).

Большой вклад в развитие теории чисел внес Пьер Ферма (1601-1665), которому принадлежат открытия связанные с теорией делимости целых чисел, и теорией диофантовых уравнений. Им было сформулировано утверждение о «невозможности» — Великая теорема Ферма, доказана Малая теорема Ферма, которая в дальнейшем была обобщена Л. Эйлером.

В 18 веке Л. Эйлер (1707-1783) первым из математиков стал создавать общие методы и применять другие разделы математики к решению задач теории чисел. Применение методов математического анализа положили начало **аналитической теории чисел**, в которой важное место занимают методы тригонометрических сумм, позволяющие оценивать число решений уравнений или систем уравнений в целых числах.

Аналитические методы широко применяются и в **аддитивной теории чисел**, в которой изучается разложение натуральных чисел на слагаемые определённого вида: представление числа в виде суммы простых чисел, суммы двух квадратов (об этих вопросах упоминалось ранее) и т.д., представление в виде четырех квадратов, девяти кубов и т.д. Так же к этому разделу теории чисел относится проблема Варинга представления числа N в виде суммы k слагаемых, каждое из которых есть n-я степень натурального числа , т.е $N = a1n + ... + akn$, где k зависит только от n.

Алгебраическая теория чисел расширяет понятие числа. Здесь рассматриваются алгебраические целые числа, корни многочленов с рациональными коэффициентами и старшим членом равным единице.

Элементарная теория чисел изучает целые числа без использования методов других разделов математике. Здесь рассматриваются такие вопросы как делимость целых чисел, числа Фибоначчи, построение магических квадратов, алгоритм нахождения наименьшего общего делителя и наибольшего общего кратного, малая теорема Ферма.

Многие вопросы теории чисел легко сформулировать, но трудно доказать, а ряд вопросов остаются открытыми, например, еще не найдена формулы по которой выводятся все простые числа. Великая теорема Ферма, сформулированная в 1637 году, оставалась без доказательства более 3 столетий и была доказана Уалсом в 1995 году.

Глава 1. Делимость, признаки делимости.
1.1. Теория
Определение

Число a делится на число $b \neq 0$, если существует такое число c, что $a = bc$.

Свойства делимости

- Если a делится на b, то и число ka делится на b.
- Если число a делится на c и число b делится на c, то сумма и разность чисел a и b делится на c.

Простые и взаимно простые числа

- Натуральное число, отличное от 1, называется простым, если у него нет натуральных делителей, отличных от 1 и него самого.
- Числа, отличные от 1 и не являющиеся простыми, называются составными.
- Два число, наибольший общий делитель которых равен 1, называются взаимно простыми.
- Если число a делится на числа b и c, причем числа b и c взаимно просто, то число a делится на их произведение bc. Данное утверждение верно не только для двух чисел, но и для любого количества попарно взаимно простых чисел(а именно: если число a делится на каждое из n чисел, причем любые два числа из данных чисел взаимно просты, то число a делится на произведение данных n чисел).

Основная теорема арифметики

Каждое натуральное число $n > \mathbf{1}$ можно представить в виде $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1, \ldots, p_k$ — простые числа, причём такое представление единственно с точностью до порядка следования сомножителей.

Единицу можно также считать произведением нулевого количества простых чисел, «пустым произведением».

Как следствие, каждое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$n = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{d_k}$, где $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — простые числа, и $d_1, \ldots, d_k$ — некоторые натуральные числа.

Такое представление числа n называется его *каноническим разложением* на простые сомножители.

Следствие

Основная теорема арифметики дает элегантные выражения для наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного.

1.2. Практическая часть

Задача №1. Найдутся ли одиннадцать десятичных чисел, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы а) все цифры от 0 до 9, б) все цифры от 0 до 8, в) все цифры от 0 до 5?

Решение:

Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммами его цифр, стоящих на нечетных и четных местах, делится на 11.

а) Попробуем разбить все цифры от 0 до 9 на две равные группы (по пять цифр) так, чтобы разность между их суммами a и b была равна 11. Это возможно:

$a+b=45 \quad a=28$

$a-b=11 \Rightarrow b=17.$

Например, $a=9+8+6+4+1$, $b=7+3+2+5+0$. Подставляем слагаемые первой суммы на нечетные позиции в числе, а второй — на четные. Ясно, что количество возможных перестановок цифр в указанных позициях больше одиннадцати.

б) В данном случае сумма всех цифр четна, поэтому будем разбивать все цифры на две группы (по 4 и 5 цифр), разность между суммами которых равна 0 или 22:

$a+b=36,$ или $a+b=36$

$a-b=0 \qquad a-b=22.$

Из первой системы $a=18$. Например, возможно такое разбиение: $a=3+4+5+6+0$, $b=1+2+7+8$.

Из второй системы $a=29$, $b=7$. Она допускает решение: $a=3+5+6+7+8$, $b=0+1+2+4$.

Вставляя цифры второй совокупности между цифрами первой совокупности, для каждого из найденных решений, получим числа, делящиеся на 11. Несомненно, их количество больше 11.

в) В этом случае сумма всех цифр нечетна; значит, нечетной должна быть и разность искомых сумм:

$a+b=15, \quad a=13,$

$a-b=11 \Rightarrow b=2.$

Очевидно, шесть цифр 0, 2, 3, 4, 5 невозможно разбить на две группы, по три в каждой, так чтобы сумма цифр в одной группе равнялась бы 13, а в другой — 2.

Ответ: а) да, б) да, в) нет.

Задача №2. Доказать, что число 1010...101 (k нулей и k+1 единиц, $k \geq 2$) является составным.

Решение:

Обозначим данное число N_k. Если k нечетно (k=2n+1), то

N_k = 101*100010001...100010001 (n+1 единиц, 3n нулей),

то есть составное.

Если k четно (k=2n), то

$11N_k$ = 111..11(4n+2 единицы) = 111...11 (2n+1 единицы) * 100...001 (2n нулей).

Второй сомножитель делится на 11 и больше 11, следовательно, N_k — составное число.

Задача №3. Найти все натуральные числа, меньшие 100000, которые делятся на 2018 и у которых сумма их десятичных цифр равна 26.

Решение:

Искомые числа имеют вид 2018n, где n=1,2, …, 49.

Натуральное число n и сумма его цифр дают один и тот же остаток при делении на 9.

2018=224*9+2, 2+0+1+8=11/9 (ост. 2);

2018*2=4036=448*9+4, 4+3+6=13/9 (ост. 4);

2018*3=6054= 672*9+6, 6+5+4=15/9 (ост. 6);

2018*4=8072=896*9+8, 8+7+2=17/9 (ост. 8);

2018*5=10090=1121*9+1, 1+9=10/9 (ост. 1).

Выберем из n=1,2, …, 49 те,, которые при делении на 9 дают остаток 8. То есть n=4, 13, 22, 31, 40, 49. Проверяем для каких n сумма числа 2018n равна 26. Подходят n = 22 и n = 31.

Ответ: {44396; 62558}.

Задача №4. К натуральному числу справа последовательно приписали два двузначных числа. Полученное число оказалось равным кубу суммы трех исходных чисел. Найти эти числа.

Решение:

Обозначим через a первое натуральное число, через b и c — записанные за ним двузначные натуральные числа; пусть x — их сумма: x=a+b+c. Согласно условию,

$a*10^4 + b*10^2 + c = x^3$.

Покажем, что x<100. Если x=100, то

$1000000 \geq 10^4 x=10^4 (a+b+c)>a*10^4 + b*10^2 + c$,

$x^3 > x^3$,

то есть уравнение не имеет решений. Значит, x – двузначное число, a – однозначное, либо двузначное число, соответственно x^3 – пяти-, либо шестизначное число.

Кроме того, $x \geq 22$ (поскольку $21^3 = 9261$ — четырехзначное число).

Заметим, что

$x^3 - x= a(10000-1)+b(100-1)+c-c$,

$x^3 - x= 9999a+99b$,

$(x-1)x(x+1)=99(101a+b)$.

Среди чисел (x-1), x и (x+1) какое-то делится нацело на 9 и какое-то на 11. Для x, удовлетворяющих условию $22 \leq x \leq 99$, возможны случаи:

$x=44$: $x^3 = 85184$, $8+51+84>44$;

$x=45$: $x^3 = 91125$, $a=9$, $b=11$, $c=25$;

$x=54$: $x^3 = 157464$, $15+74+64>54$;

$x=55$: $x^3 = 166375$, $16+63+75>55$;

$x=89$: $x^3 = 704969$, $70+49+69>89$;

$x=98$: $x^3 = 941192$, $94+11+92>98$;

$x=99$: $x^3 = 970299$, $97+02+99>99$, 2 — не двузначное число.

Ответ: (a; b; c) {(9;11;25)}.

Задача №5. Сколько цифр у числа 2^{300} ?

Решение:

Легко проверить, что $2^{10} = 1024$, поэтому $2^{300} = 1024^{30}$. Поскольку число 1000^{30} представляет собой единицу с 90 нулями, а $1024^{30} > 1000^{30}$, данное число не может иметь меньше 91 цифры.

С другой стороны,

$(1024/1000)^{30} = (128/125)^{30} < 128/125 * 125/122 * 122/119 * \ldots * 44/41 * 41/38 = 128/38 < 10$.

Таким образом, $2^{300} < 10*1000^{30}$, откуда следует, что 2^{300} содержит меньше 92 цифр. Итак, данное число содержит в десятичной записи ровно 91 цифру.

Ответ: 91.

Задача №6. Десятизначная запись натурального числа

состоит из различных цифр, среди которых нет нуля. Какое максимальное количество цифр может содержать это число, если оно делится нацело на каждую из своих цифр?

Решение:

Допустим, в записи числа присутствуют все девять цифр и оно делится на каждую из своих цифр. Тогда оно делится на 2 и на 5 и, значит, заканчивается нулем. Следовательно, составить число из девяти цифр невозможно.

Покажем, что подходящее число нельзя составить и из восьми цифр. Заметим сразу, что в записи числа не может присутствовать цифра 5. В самом деле, из четырех четных цифр 2, 4, 6, 8 останутся, по крайней мере, три. Так что число четное, и если оно делится на 5, то должно заканчиваться нулем. Допустим, в записи числа присутствуют оставшиеся восемь цифр: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Сумма этих цифр равна 40. Значит, число, составленное из них, не делится на 3, что противоречит условию задачи.

Из семи цифр составить подходящее число уже возможно. По-прежнему, цифра 5 не должна присутствовать в записи подходящего числа. Определим, какую еще цифру нужно исключить из ряда 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

Если исключить 2, 3, 6, 8 или 9, число не будет делиться на 3. Если исключить цифру 1 или 7, число не будет делиться на 9. Остается исключить цифру 4.

Составим теперь подходящее число из цифр 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9. Поскольку число делиться на 8, его три последние цифры должны образовывать число, делящееся на 8. Попробуем найти нужное число среди чисел, заканчивающихся цифрами 216. Чтобы облегчить поиск, воспользуемся признаком делимости на 7.

Число txyzuvw делится на 7, если на 7 делится сумма -t+xyz-uvw. Сузим область поиска: будем искать подходящее число среди чисел вида 7xyz216, где xyz – трехзначное число, составленное из цифр 3, 8, 9. Таких чисел шесть. Разность xyz — 216 должна делиться на 7. Проверкой убеждаемся, что подходят числа 398 и 839. В самом деле,

398 — 216 = 182 = 7*26,

839 — 216 = 623 = 7*89.

Теперь можно составить подходящие числа: 7398216, 7839216. Есть и другие семизначные числа, удовлетворяющие условию задачи. Например, 7639128, 7198632.

Ответ: 7.

Глава 2. Десятичная запись натурального числа

2.1. Теория

Определение

Первые представления о числе приобретены людьми с незапамятной древности. Они возникли из счета людей, животных, плодов, различных изделий человека и других предметов. Результатом счета являются числа 1, 2, 3, 4, 5,… Этот ряд продолжается без конца; он называется натуральным рядом, а числа – *натуральными*.

Составное число — натуральное число, большее 1, не являющееся простым. Каждое составное число является произведением двух натуральных чисел, больших 1.

Запись натурального числа

Всякое натуральное число N единственным образом представимо в виде

$$\boldsymbol{N=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_{n-2}\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0,}$$

где n — натуральное число или 0, a_n, a_{n-1}, a_{n-2},..., a_2, a_1, a_0 — цифры от 0 до 9, причем цифра $a_n\neq 0$.

Это представление натурального числа в десятичной системе счисления называют десятичной записью числа. Для краткости мы будем записывать это (n+1)-значное число в виде:

$$\boldsymbol{N=a_na_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0}$$

Натуральное число *M* является *n*-значным в том и только в том случае, когда оно удовлетворяет неравенству $10^{n-1}\leq M\leq 10^n$.

Правильная дробь

Всякая правильная дробь m/n представима в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби. Дробь называется чисто периодической, если ее период начинается сразу после запятой, отделяющей целую и дробную часть числа.

Несократимая правильная дробь m/n представляется в виде конечной десятичной дроби в том и только в том случае, когда ее знаменатель n не делится на простые числа, отличные от 2 и 5.

2.2. Практическая часть

Задача №1. Доказать, что число $2012^2 + 2012^2 * 2013^2 + 2013^2$ является точным квадратом.

Решение:

Заменим 2012 на а и преобразуем получившееся выражение:

$a^2 + a^2 (a+1)^2 + (a+1)^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 = (a^2 + a + 1)^2$.

Задача №2. Разложить на целые рациональные множители выражение $a^{10} + a^5 + 1$.

Решение:

Заметим, что

$a^{10} + a^5 + 1 = ((a^5)^3 – 1) / (a^5 – 1) = (a^{15} – 1) / (a^5 – 1) = ((a^3)^5 – 1) / ((a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)) = ((a^3 – 1)(a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1)) / ((a – 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)) = ((a^2 + a + 1)(a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1)) / (a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$.

Непосредственным делением легко убедиться, что

$(a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1) / (a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) = a^8 – a^7 + a^5 – a^4 + a^3 – a + 1$.

Ответ: $(a^2+a+1)(a^8 – a^7 + a^5 – a^4 + a^3 – a + 1)$.

Задача №3. Пусть m и n — целые числа. Доказать, что если $m^2 – 2015mn + n^2$ делится на 2017, то и $m^2 — n^2$ делится на 2017.

Решение:

Если $m^2 – 2015mn + n^2$ делится на 2017, то на 2017 делится также и число

$(m^2 – 2015mn + n^2) + 2017mn = (m+n)^2$.

Отсюда следует, что на 2017 делится число m+n. Действительно, число 2017 простое, и если бы m+n не делилось на 2017, то 2017 не входило бы и в разложение на простые множители числа m+n, а значит и числа $(m+n)^2$.

Далее, поскольку m+n делится на 2017, то и $m^2 - n = (m - n)(m+n)$ также делится на 2017.

Задача №4. Целые числа x и y таковы, что $x^3 + y$ и $x + y^3$ делятся на $x^2 + y^2$. Найти x и y.

Решение:

Докажем сначала, что числа x и y взаимно простые. Пусть в разложение числа НОД(x,y) на простые множители входит p^n. Тогда числа $x^3 + y$ и $x + y^3$ делятся на p^n и не могут делиться на $x^2 + y^2$, кратное p^{2n}.

Далее, число $x(x^2 + y^2) - (x^3 + y) = y(xy-1)$ делится на $x^2 + y^2$, откуда вытекает, что $xy-1$ делится на $x^2 + y^2$. Поскольку при $xy > 1$ $|xy-1| \le |xy| + 1 < x^2 + y^2$, получаем, что $|xy| \le 1$.

Ответ: $(x;y)$ □ $\{(\pm 1;1); (\pm 1;-1); (\pm 1;0); (0;\pm 1)\}$.

Задача №5. Доказать, что выражение $x^5 + 3x^4 y - 5x^3 y^2 - 15x^2 y^3 + 4xy^4 + 12y^5$ не равно 33 не при каких целых x и y.

Решение: Преобразуем выражение:

$x^5 + 3x^4 y - 5x^3 y^2 - 15x^2 y^3 + 4xy^4 + 12y^5 = x^4 (x+3y) - 5x^2 y^2 (x+3y) + 4y^4 (x+3y) = (x+3y)(x^4 - 5x^2 y^2 + 4y^4)$;

$x^4 - 5x^2 y^2 + 4y^4 = 0$ решим как биквадратное относительно x^4, $x^2 = t$

$t^2 - 5ty^2 + 4y^4 = 0$; $D = 9y^4$; $t_1 = 4y^2$, $t_2 = y^2$.

$t^2 - 5ty^2 + 4y^4 = (x^2 - 4y^2)(x^2 - y^2) = (x-2y)(x+2y)(x-y)(x+y)$.

Окончательно имеем: $(x+3y)(x-2y)(x+2y)(x-y)(x+y)$ => все сомножители различны, а число 33 нельзя разложить более чем на 3 различных сомножителя.

Вывод: выражение не равно 33 не при каких целых x и y.

Задача №6. Доказать, что $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121 не при каком целом значении n.

Доказательство: Обозначим данное число x : $n^2 + 3n + 5 = x$.

$n^2 + 3n + 5 = (n - 7)(n+4) + 33$; $x = y + 33$.

Если x□ 11, то (y+33)□ 11 => y□ 11 и 33□ 11. А надо доказать, что x□ 121.

Пусть y□ 121, то 33□ 11, но 33 не кратно 121. Доказано.

Глава 3. НОД и НОК

3.1. Теория

Наибольший общий делитель

Наибольшим общим делителем (НОД) двух целых чисел m и n называется их общий делитель d (то есть m/d и n/d), который делится на любой другой общий делитель m и n.

Наибольший общий делитель существует и однозначно определён (с точностью до знака), если хотя бы одно из чисел m или n не ноль.

Чтобы найти наибольший общий делитель (НОД) нескольких чисел надо:

1) представить каждое число как произведение его *простых множителей;*

2) записать *степени всех простых множителей;*

3) выписать *все общие делители* (*множители*) этих чисел;

4) выбрать *наименьшую* степень каждого из них, встретившуюся во всех произведениях;

5) перемножить эти степени.

Наименьшее общее кратное

Наименьшее общее кратное (НОК) двух целых чисел *m* и *n* есть наименьшее натуральное число, которое делится на *m* и *n* без остатка.

Одно из наиболее частых применений НОК — приведение дробей к общему знаменателю.

Чтобы найти наименьшее общее кратное (НОК) нескольких чисел надо:

1) представить каждое число как произведение его *простых множителей;*

2) записать *степени всех простых множителей*;

3) выписать *все простые делители* (*множители*) каждого из этих чисел;

4) выбрать *наибольшую степень* каждого из них, встретившуюся во всех разложениях этих чисел;

5) перемножить эти степени.

Алгоритм Евклида

Для нахождения НОД(a;b) можно использовать алгоритм Евклида, выполняя последовательно деление с остатком:

$a=bq_0 + r_1,\ 0 < r_1 < b,$

$b=r_1q_1 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1,$

$r_1 = r_2q_2 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2,$

$r_{n-2} = r_{n-1}\, q_{n-1} + r_n,\ 0 < r_n < r_{n-1};\ r_{n-1} = r_n\, q_n.$

Процесс заканчивается после того, как первый раз получен нулевой остаток. Тогда НОД(a; b) = r_n.

3.2. Практическая часть

Задача №1. На какое число и при каких натуральных значениях n сократима дробь (3n+4) / (2n+5)?

Решение:

Положим НОД(3n+4, 2n+5) = d. Тогда 3n+4 □ d, 2n+5 □ d. Умножим первое число на 2, а второе на 3, получим: 6n+8 □ d, 6n+15 □ d. Найдем разность этих чисел: 7 □ d. Следовательно, d=1 или d=7. Значит, если данная дробь сократима, то только на 7. Дробь сократима на 7, например, при n=1. Все значения n, при которых дробь сократима на 7, можно задать формулой $n=1+7k$, k □ Z_0 .

Ответ: на 7 при $n=1+7k$, k □ Z_0 .

Задача №2. Чему равен наибольший общий делитель всех чисел $4^{n+2} + 5^{2n+1}$ при натуральных значениях n?

Решение:

Обозначим наибольший общий делитель всех таких чисел через d.

Заменим в данной сумме n на n+1, получим сумму $4^{n+3} + 5^{2n+3} = 4^{n+3} + 25*5^{2n+1}$, которая также делится на d.

Умножим данную сумму на 4, получим, что и $(4^{n+2} + 5^{2n+1})*4 = 4^{n+3} + 4* 5^{2n+1}$ тоже делится на d.

Значит, на d делится и разность

$(4^{n+3} + 25*5^{2n+1}) - (4^{n+3} + 4* 5^{2n+1}) = 21*5^{2n+1}$.

Поскольку d нечетно, то 21 □ d, откуда d может принимать одно из значений: 1, 3, 7, 21.

Для определения d положим в данной сумме n=1:

$4^{1+2} + 5^{2*1+1} = 64+125=189=21*9$.

Полученное значение делится на 21. Кроме того, из хода решения видно, что если при некотором натуральном n данная сумма делится на 21, то она также делится на 21 при замене n на n+1. Это означает, что наибольшим общим делителем всех чисел указанного вида служит 21.

Ответ: 21.

Задача №3. При каком наименьшем натуральном n каждая из дробей 2/(n+3), 3/(n+4), 4/(n+5), … , 32/(n+33) несократима?

Решение:

Преобразуем данные дроби следующим образом:

2/(n+3)= 2/((n+1)+2), 3/(n+4)= 3/((n+1)+3), … , 32/(n+33)= 32/((n+1)+32).

Отсюда видно, что каждая из этих дробей несократима тогда и только тогда, когда число n+1 взаимно просто с каждым из чисел 2, 3, 4, …, 31. В этом случае n+1 будет взаимно просто и с числами 33, 34, 35 и 36. Получается, что ни одно из значений n+1 от 2 до 36 не подходит. А значение n+1=37 подходит, поскольку число 37 взаимно просто с каждым из натуральных чисел от 2 до 31. Значит наименьшее значение n равно 36.

Ответ: 36.

Задача №4. Множество А состоит из натуральных чисел. Количество чисел в А больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из А равно 210. Для любых двух чисел из А их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из А делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит А.

Решение:

Наименьшее общее кратное искомых чисел 210 = 2*3*5*7. Следовательно, числа имеют вид: $2^a * 3^b * 5^c * 7^d$, где a, b, c, d = 0,1. Имеем следующие числа указанного вида:

$2^1 * 3^0 * 5^0 * 7^0 = 2$, $2^0 * 3^1 * 5^0 * 7^0 = 3$, $2^0 * 3^0 * 5^1 * 7^0 = 5$, $2^0 * 3^0 * 5^0 * 7^1 = 7$;

$2^1 * 3^1 * 5^0 * 7^0 = 6$, $2^1 * 3^0 * 5^1 * 7^0 = 10$, $2^1 * 3^0 * 5^0 * 7^1 = 14$, $2^0 * 3^1 * 5^1 * 7^0 = 15$, $2^0 * 3^1 * 5^0 * 7^1 = 21$, $2^0 * 3^0 * 5^1 * 7^1 = 35$;

$2^1 * 3^1 * 5^1 * 7^0 = 30$, $2^1 * 3^1 * 5^0 * 7^1 = 42$, $2^1 * 3^0 * 5^1 * 7^1 = 70$, $2^0 * 3^1 * 5^1 * 7^1 = 105$;

$2^1 * 3^1 * 5^1 * 7^1 = 210$.

Делитель произведения искомых чисел $1920 = 2^7 * 3 * 5$ содержит семь двоек. Всего четных чисел имеется восемь: 2, 6, 10, 14, 30, 42, 70 и 210; их произведение имеет вид $2^8 * 3^4 * 5^4 * 7^4$, то есть является квадратом целого числа, что противоречит условию.

Получается, одно число лишнее; все остальные необходимо оставить, иначе не наберем семь двоек. И это лишнее число — 2, ибо в противном случае нарушиться условие задачи — для любых двух чисел из А их наибольший общий делитель больше единицы — все остальные числа (3, 5, 7, 15, 21, 35, 105) не будут иметь с двойкой общих делителей, отличных от единицы.

Делаем вывод, что искомые числа должны содержать множители 3, 5, 7; из условия наличия наибольшего общего делителя, большего 1, добавляем число 105 = 3*5*7.

Окончательно получаем восемь чисел: 6, 10, 14, 30, 42, 70, 105 и 210.

Ответ: А={6; 10; 14; 30; 42; 70; 105; 210}.

Задача №5. Доказать, что дробь (n5 +n^4 + $4n^3$ + $3n^2$ + 3n + 1)/(n^4 + n^3 + $3n^2$ + 2n + 1) несократима не при каких натуральных значениях n.

Доказательство: Для доказательства используем алгоритм

Евклида. Обозначим НОД ($n5 + n^4 + 4n^3 + 3n^2 + 3n + 1; n^4 + n^3 + 3n^2 + 2n + 1$)=d. Предположим, что $d \neq 1$. Выделим целую часть:

$(n5 + n^4 + 4n^3 + 3n^2 + 3n + 1)/(n^4 + n^3 + 3n^2 + 2n + 1) = n + (n^3 + n^2 + 2n + 1)/(n^4 + n^3 + 3n^2 + 2n + 1)$, т.е. $(n5 + n^4 + 4n^3 + 3n^2 + 3n + 1)/(n^4 + n^3 + 3n^2 + 2n + 1) = n*(n^4 + n^3 + 3n^2 + 2n + 1) + (n^3 + n^2 + 2n + 1)$.

Поскольку числитель и знаменатель дроби делятся на d, то и остаток от деления $n^3 + n^2 + 2n + 1$ тоже делится на d.

Теперь разделим делитель $n^4 + n^3 + 3n^2 + 2n + 1$ на остаток с остатком:

$n^4 + n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = (n^3 + n^2 + 2n + 1)*n + (n^2 + n + 1)$.

Поскольку числа $n^4 + n^3 + 3n^2 + 2n + 1$ и $n^3 + n^2 + 2n + 1$ делятся на d , то и новый остаток $n^2 + n + 1$ тоже делится на d.

Аналогично разделим $n^3 + n^2 + 2n + 1$ на $n^2 + n + 1$ с остатком:

$n^3 + n^2 + 2n + 1 = (n^2 + n + 1)n + (n+1)$.

Так как $n^2 + n + 1$ и $n^2 + n + 1$ делятся на d , то и новый остаток n+1 делится на d.

Наконец, разделим $n^2 + n + 1$ на n+1 с остатком:

$n^2 + n + 1 = (n+1)n+1$.

Поскольку здесь $n^2 + n + 1$ и n+1 делятся на d , то и остаток, равный 1, делится на d. Но это невозможно, поскольку по нашему предположению d>1. Из полученного противоречия заключаем, что d=1, и, значит, данная дробь несократима.

Заключение

У подрастающего поколения название царицы наук на устах. Кому-то вплоть до высшей ступени образования она не дается. Но все в обязательном порядке сдают ЕГЭ по этому предмету. А ЕГЭ по математике не такой уж легкий. Поэтому те, кому остался год или меньше, или больше уже начинают подготовку. И это подтверждает то, что выбранная мной тема исследовательской работы актуальна.

В моей работе я рассматривала задачи типа С6 на темы: делимость, признаки делимости; десятичная запись натурального числа; НОД и НОК. При их решении, я использовала понятия натуральных чисел, простых и составных чисел, взаимно простых чисел, точного квадрата числа, а также признаки делимости чисел, способы разложения на множители и алгоритм Евклида.

В ходе выполнения работы я узнала важные понятия и формулы для решения этих задач, а также поняла, что необходимы хорошие базовые знания в области математики, умение логически мыслить, рассуждать, синтезировать материал в данной области.

Считаю, что изложенный материал будет полезен учащимся и педагогам при проведении специальных и элективных курсов.

Список литературы

1. Буфеев С.В.//Коллекция задач по арифметике целых чисел. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.

2. Пратусевич М.Я., Рукшин С.Е., Стобов К.М., Ященко И.В. //ЕГЭ 2011 по математике. – М.: МЦНМО, 2011. – Задача С6.

3. Шувалова Э.З. Повторим Математику. – 2- е изд. – М.: Высшая Школа, 1974.

4. http://distedu.ru/

5. http://bymath.net/

Приложение 1

Задача 1. Найти все натуральные числа, меньшие 100000, которые делятся на 2017 и у которых сумма их десятичных цифр равна 23.

Ответ: {28238; 46391; 64544}.

Задача 2. В натуральном числе a переставили цифры, получив число b. Известно, что a – b = 11…1{n единиц}. Найти наименьшее возможное значение n.

Ответ: 9.

Задача 3. Найти четырёхзначное число, которое в 4 раза меньше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

Ответ: {2178}.

Задача 4. При каких целых n число $n^4 + 4$ является простым?

Ответ: $n \in \{\pm 1\}$.

Задача 5. Натуральные числа x и y таковы, что $x^3 + y$ и $x + y^3$ делятся на $x^2 + y^2$. Найти x и y.

Ответ: $(x; y) \in \{(1;1)\}$.

Задача 6. Найти все пары натуральных чисел x и y такие, что каждое из чисел $x^3 + 2x + y^3$ и $x^3 + 2y + y^3$ делится на число $x^2 + y^2$.

Ответ: $(x; y) \in \{(1;1)\}$.

Задача 7. Найти наибольший общий делитель чисел 333333 и 777777777.

Ответ: 2331.

Задача 8. Чему равен наибольший общий делитель всех чисел $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ при натуральных значениях n?

Ответ: 57.

Задача 9. Натуральные числа a, b и c таковы, что НОК(a,b)=60, НОК(a,c)=270. Найти НОК(b,c).

Ответ: {108;540}.

Приложение 2

Признак делимости на 2. Число делится на 2, если его *последняя цифра* - ноль или делится на 2. Числа, делящиеся на два, называются *чётными*, не делящиеся на два – *нечётными*.

Признак делимости на 4. Число делится на 4, если *две* его *последние цифры* - нули или образуют число, которое делится на 4.

Признак делимости на 8. Число делится на 8, если *три* его *последние цифры* - нули или образуют число, которое делится на 8.

Признаки делимости на 3 и 9. Число делится на 3, если его *сумма цифр* делится на 3. Число делится на 9, если его *сумма цифр* делится на 9.

Признак делимости на 6. Число делится на 6, если оно делится на 2 и на 3.

Признак делимости на 5. Число делится на 5, если его *последняя цифра* - ноль или 5.

Признак делимости на 11. На 11 делятся только те числа, у которых *сумма цифр*, стоящих на *нечётных местах*, либо равна сумме цифр, стоящих на *чётных местах*, либо отличается от неё на число, делящееся на 11.

Признак делимости на 7. Число делится на 7, если знакопеременная сумма чисел, образованных тройками его цифр, взятыми с конца (последнее число со знаком +), делится на 7.

Признак делимости на 13. Число делится на 13, если знакопеременная сумма чисел, образованных тройками его цифр, взятыми с конца (последнее число со знаком +), делится на 13.