Краевая научно-практическая конференция учебно-исследовательских и проектных работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Математические софизмы

Портнова Мария,

7 кл., МАОУ «Лицей №1» г. Кунгур,

Пластинина Мария Игнатьевна,

учитель математики 1 категории

Пермь. 2013.

Содержание:

Математический софизм –

удивительное утверждение,

в доказательстве которого

кроются незаметные, а подчас

и довольно тонкие ошибки.

Мартин Гарднер

Введение

«Дважды два равно пяти», «Два равно трем» - каждый из нас слышал такие фразы хоть раз в жизни. На самом деле, таких примеров можно привести очень много, но что все они обозначают? Кто их выдумал? Имеют ли они какое-нибудь логическое объяснение или же это лишь вымысел?

Именно эти вопросы я хочу рассмотреть в своей работе, название которой - математические софизмы. Неслучайно я выбрала именно математические софизмы (хотя бывают и логические, и словесные). Они, как мне кажется, более интересны, имеют четкое логическое объяснение, кроме того, с математическими софизмами мы встречаемся намного чаще, чем с обычными.

Эта тема сейчас актуальна, потому что софизм - это обман, а так как не каждый может его распознать, то с помощью софизмов люди обманывают друг друга в наше время, как и тысячелетия назад.

Цель моего реферата: исследование математических софизмов, распределение софизмов на разные классы, привлечение интереса учащихся к математическим софизмам и урокам занимательной математики.

Задачи исследования:

1. Найти, изучить и проанализировать информацию, полученную при изучении софизмов
2. Разделить на классы все математические софизмы
3. Выявить ошибки в математических софизмах
4. Привлечь интерес учащихся к урокам занимательной математики

Объект исследования: Математические софизмы

Методы исследования:

1. Нахождение и изучение материала
2. Анализ информации

Значимость реферата: занимаясь этой работой, я углубляю свои знания в математике и помогаю ученикам шестых классов более подробно изучить математику и её тайны.

Глава 1. Понятие софизм.

Многие из нас не знают даже что такое софизм, хотя встречали его в своей жизни хоть раз.

Аристотель называл софизмом «мнимые доказательства», в которых обоснованность заключения кажущаяся и обязана чисто субъективному впечатлению, вызванному недостаточностью логического или семантического анализа. Убедительность на первый взгляд многих софизмов, их «логичность» обычно связана с хорошо замаскированной ошибкой — семиотической. За счёт метафоричности речи, омонимии или полисемии слов, амфиболий и прочих, нарушающих однозначность мысли и приводящих к смешению значений терминов, или же логической: подмена основной мысли (тезиса) доказательства, принятие ложных посылок за истинные, несоблюдение допустимых способов рассуждения (правил логического вывода), использование «неразрешённых» или даже «запрещённых» правил или действий, например деления на нуль в математических софизмах (последнюю ошибку можно считать и семиотической, так как она связана с соглашением о «правильно построенных формулах») происходит нарушение правил логики.

Вот один из древних софизмов («рогатый»), приписываемый Эвбулиду: «Что ты не терял, то имеешь. Рога ты не терял. Значит, у тебя рога». Здесь маскируется двусмысленность большей посылки. Если она мыслится универсальной: «Всё, что ты не терял…», то вывод логически безупречен, но неинтересен, поскольку очевидно, что большая посылка ложна; если же она мыслится частной, то заключение не следует логически. Последнее, однако, стало известно лишь после того, как Аристотель создал логику.

А вот современный софизм, обосновывающий, что с возрастом «годы жизни» не только кажутся, но и на самом деле короче: «Каждый год вашей жизни — это её $1/n$ часть, где n — число прожитых вами лет. Но $n + 1>n$. Следовательно, $1/(n + 1)< 1/n$».

Исторически с понятием «Софизм» неизменно связывают идею о намеренной фальсификации, руководствуясь признанием Протагора, что задача софиста — представить наихудший аргумент как наилучший путём хитроумных уловок в речи, в рассуждении, заботясь не об истине, а об успехе в споре или о практической выгоде. (Известно, что сам Протагор оказался жертвой «софизма Эватла».) С этой же идеей обычно связывают и «критерий основания», сформулированный Протагором: мнение человека есть мера истины. Уже Платон заметил то, что основание не должно заключаться в субъективной воле человека, иначе придётся признать законность противоречий (что, между прочим, и утверждали софисты), а поэтому любые суждения считать обоснованными. Эта мысль Платона была развита в аристотелевском «принципе непротиворечия», уже в современной логике, — в истолкованиях и требовании доказательств «абсолютной» непротиворечивости. Перенесённая из области чистой логики в область «фактических истин», она породила особый «стиль мышления», игнорирующий диалектику «интервальных ситуаций», то есть таких ситуаций, в которых критерий Протагора, понятый, однако, более широко, как относительность истины к условиям и средствам её познания, оказывается весьма существенным. Именно поэтому многие рассуждения, приводящие к парадоксам и в остальном безупречные, квалифицируются как софизмы, хотя по существу они только демонстрируют интервальный характер связанных с ними гносеологических ситуаций. Так, софизм «куча» «Одно зерно — не куча. Если n зёрен не куча, то $n + 1$ зерно — тоже не куча. Следовательно, любое число зёрен — не куча») — это лишь один из «парадоксов транзитивности», возникающих в ситуации «неразличимости». Последняя служит типичным примером интервальной ситуации, в которой свойство транзитивности равенства при переходе от одного «интервала неразличимости» к другому, вообще говоря, не сохраняется, и поэтому принцип математической индукции в таких ситуациях неприменим. Стремление усматривать в этом свойственное опыту «нетерпимое противоречие», которое математическая мысль «преодолевает» в абстрактном понятии числового континуума (А. Пуанкаре), не обосновывается, однако, общим доказательством устранимости подобного рода ситуаций в сфере математического мышления и опыта. Достаточно сказать, что описание и практика применения столь важных в этой сфере «законов тождества» (равенства) так же, вообще говоря, как и в эмпирических науках, зависит от того, какой смысл вкладывают в выражение «один и тот же объект», какими средствами или критериями отождествления при этом пользуются. Другими словами, идёт ли речь о математических объектах или, к примеру, об объектах квантовой механики, ответы на вопрос о тождестве неустранимым образом связаны с интервальными ситуациями. При этом далеко не всегда тому или иному решению этого вопроса «внутри» интервала неразличимости можно противопоставить решение «над этим интервалом», то есть заменить абстракцию неразличимости абстракцией отождествления. А только в этом последнем случае и можно говорить о «преодолении» противоречия.

По-видимому, первыми, кто понял важность семиотического анализа софизмов, были сами софисты. Учение о речи, о правильном употреблении имён Продик считал важнейшим. Анализ и примеры софизмов часто встречаются в диалогах Платона. Аристотель написал специальную книгу «О софистических опровержениях», а математик Евклид — «Псевдарий» — своеобразный каталог софизмов в геометрических доказательствах.

Глава 2. Софизмы в математике.

В математических софизмах чаще всего используются «запрещенные действия» либо не учитываются условия применимости теорем, формул или правил. Часто понимание людьми ошибок в софизме ведет к пониманию математики в целом, развивает логику и навыки правильного мышления. Поиск ошибки в софизме ведет к ее пониманию и осознанию, а осознавая ошибку, человек имеет больше шансов ее не допустить. Также, в истории развития математики софизмы способствовали повышению точности формулировок и более глубокому пониманию понятий математики. Существуют и другие виды софизмов (например: словесные), но в своей работе я рассматриваю только математические. Существует несколько видов математических софизмов: геометрические, логические и алгебраические.

Геометрические софизмы.

Геометрические софизмы построены на ошибках, связанных с геометрическими фигурами и действиями над ними.

Изучим их на примере:

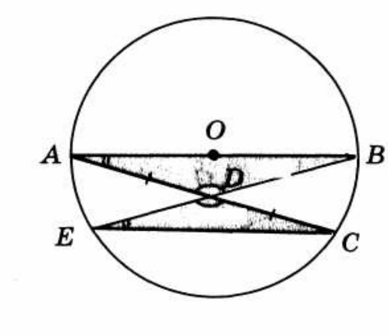
1) Спичка вдвое длиннее телеграфного столба.

Пусть a дм - длина спички и b дм - длина столба. Разность между b и a обозначим через c . Имеем b - a = c, b = a + c. Перемножаем два эти равенства по частям, находим: b2 - ab = ca + c2. Вычтем из обеих частей bc. Получим: b2- ab - bc = ca + c2 - bc, или b(b - a - c) = - c(b - a - c), откуда b = - c, но c = b - a, поэтому b = a - b, или a = 2b.

Ошибка:

Ошибка заключается в том, что в выражении b(b-a-c)= -c(b-a-c) производится деление на 0

2)Хорда, не проходящая через центр окружности, равна диаметру.



Пусть в окружности приведен диаметр AB. Через точку B проведем любую хорду BE, не проходящую через центр, затем через середину этой хорды D и точку A проведем новую хорду AC. Наконец, точки E и C соединим отрезком прямой. Рассмотрим Δ ABD и ΔEDC. В этих треугольниках: BD = DE (по построению), A= E (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу). Кроме того, BDA= EDC (как вертикальные). Если же сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны. Значит, Δ BDA= ΔEDC , а в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны. Поэтому, AB=EC.

По теореме о признаке равенства треугольника:
Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
А в нашем случае, A не прилежит к стороне B D .

Ошибка:

Ошибка заключается в неправильном применении теоремы о равенстве треугольников (равны 2 угла, не прилежащие к одной стороне).

3) «Загадочный треугольник»

Дан прямоугольный треугольник 13*5 клеток, составленный из четырёх фигур.

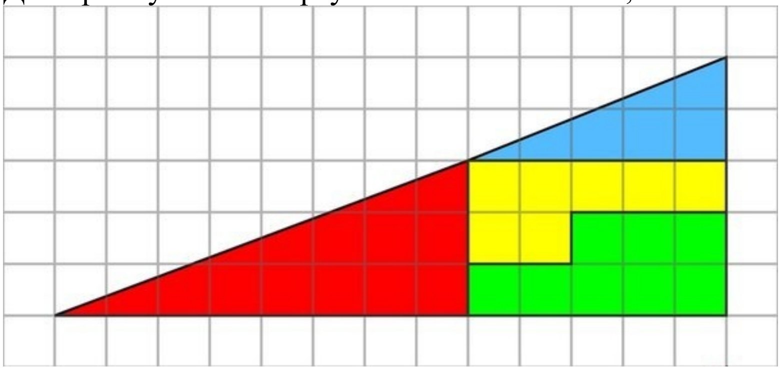


рис. 1

После перестановки фигур при визуальном сохранении изначальных пропорций появляется дополнительная, не занятая ни одной частью, клетка (рис. 2). Но мы же понимаем, что такого быть не может.

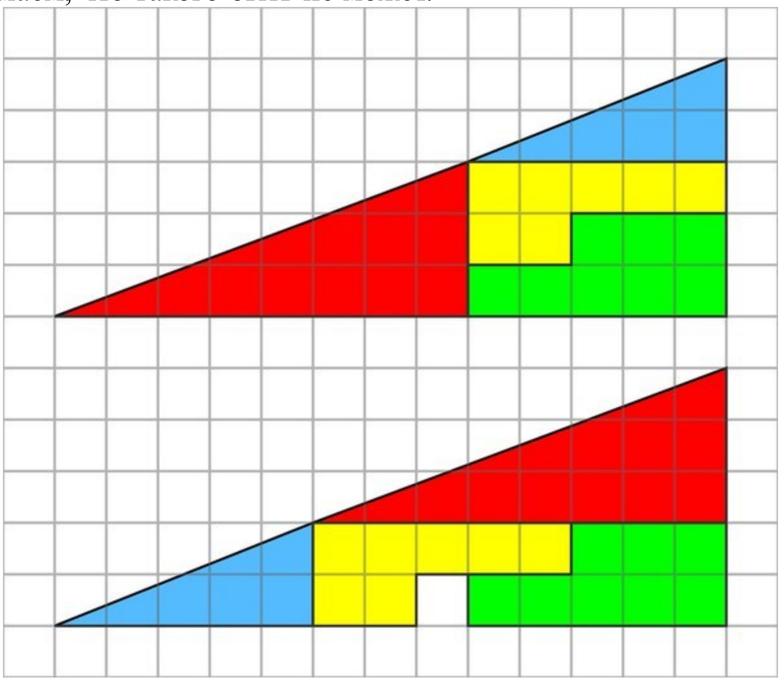


рис. 2

Ошибка:

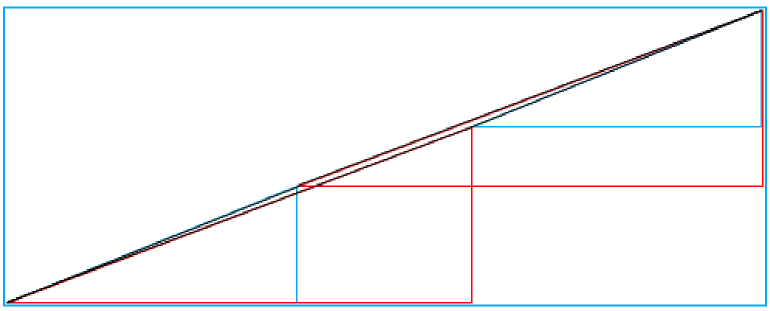


рис. 3

Площади закрашенных фигур, конечно, равны между собой(оба по 32 клетки), однако, то, что визуально наблюдается как треугольники 13*5, на самом деле таковым не является, и имеет разные площади. То есть ошибка, замаскированная в условии задачи, состоит в том, что начальная фигура названа треугольником (на самом деле являющаяся вогнутым четырёхугольником). Это отчётливо заметно на рис. 2 – гипотенузы верхней и нижней фигур проходят через разные точки: (8,3) вверху и (5,2) внизу. Секрет в свойствах синего и красного треугольников. Это легко проверить вычислениями.

Отношения длин соответствующих сторон синего и красного треугольников не равны друг другу(2\3 и 5\8), поэтому эти треугольники не являются подобными, а значит, имеют разные углы при соответствующих вершинах. Если нижние стороны этих треугольников параллельны, то гипотенузы в обоих треугольниках 13*5 на самом деле являются ломаными линиями (на верхнем рисунке создаётся излом внутрь, а на нижнем – наружу).Если наложить верхнюю и нижнюю фигуры 13*5 друг на друга, то между их гипотенузами образуется параллелограмм, в котором и содержится «лишняя» площадь. На рис. 3 этот параллелограмм приведён в верных пропорциях.

Официальным автором этой задачи про «загадочные треугольники» является иллюзионист-любитель Пол Керри, придумавшим этот софизм в XX веке.

Логические софизмы.

Один из видов математических софизмов является логический софизм. Давайте разберём их тоже на примерах:

1) " 4 р. = 40 000 к."

Возьмем верное равенство: 2 р. = 200 к. и возведем его по частям в квадрат. Мы получим: 4 р. = 40 000 к.

Ошибка:

В этом софизме мы вспомнить, что возведение в квадрат денег не имеет смысла. В квадрат возводятся числа, а не величины.

2) "Пять равно шести"

Возьмем тождество 35+10-45=42+12-54.

В каждой части этого тождества вынесем за скобки общий множитель:

5·(7+2-9)=6·(7+2-9).

Теперь, разделив обе части полученного равенства на их общий множитель (7+2-9), получим, что 5=6.

Ошибка:

Она допущена при делении верного равенства

5·(7+2-9)=6·(7+2-9) на число 7+2-9, равное нулю. Этого нельзя делать, так как любое равенство можно делить только на число, отличное от нуля.

Алгебраические софизмы.

Алгебра — один из больших разделов математики, принадлежащий наряду с арифметикой и геометрией к числу старейших ветвей этой науки.

Алгебра возникла под влиянием нужд общественной практики, в результате поисков общих приёмов для решения однотипных арифметических задач. Приёмы эти заключаются обычно в составлении и решении уравнений. Т.е. алгебраические софизмы – намеренно скрытые ошибки в уравнениях и числовых выражениях.

1)«Два неодинаковых натуральных числа равны между собой»

решим систему двух уравнений:

x+2y=6, (1)

y=4- x/2 (2)

Сделаем это подстановкой y из 2го уравнения в 1, получаем x+8-x=6, откуда 8=6

Ошибка:

Уравнение (2) можно записать как x+2y=8, так что исходная система за-пишется в виде:

X+2y=6,

X+2y=8

В этой системе уравнений коэффициенты при переменных одинаковы, а правые части не равны между собой, из этого следует, что система несовместна, т.е. не имеет ни одного решения. Графически это означает, что прямые y=3-x/2 и y=4-x/2 параллельны и не совпадают. Перед тем, Как решать систему линейных уравнений, полезно проанализировать, имеет ли система единственное решение, бесконечно много решений или не имеет решений вообще.

2) «Отрицательное число больше положительного».

Возьмем два положительных числа а и с. Сравним два отношения:

a/-c и -a/c

Они равны, так как каждое из них равно –(a/c). Можно составить пропорцию: a/-c=-a/c

Но если в пропорции предыдущий член первого отношения больше последующего, то предыдущий член второго отношения также больше своего последующего. В нашем случае a>-c, следовательно, должно быть –a>c, т.е. отрицательное число больше положительного.

Ошибка:

Данное свойство пропорции может оказаться неверным, если некоторые члены пропорции отрицательны.

3) Дважды два - пять!

Сейчас мы вместе с вами докажем, что дважды два равно пяти. Это можно сделать буквально на пальцах:

Имеем равенство:

16 - 36 = 25 - 45

Прибавим к левой и правой части 81/4:

16 - 36 + 81/4 = 25 - 45 + 81/4

Преобразуем выражение:

4*4 - 2*4*9/2 + (9/2)*(9/2) = 5*5 - 2*5*9/2 + (9/2)*(9/2)

Теперь можно заметить, что в левой и правой части выражения (3) записаны произведения вида:

a^2-2ab+b^2, то есть, квадрат разности: $(a-b)^2$. В нашем случае слева a=4, b=9/2, а справа a=5, b=9/2. Поэтому перепишем выражение (3) в виде квадратов разности:

$(4 - 9/2)^2 = (5 - 9/2)^2$

А следовательно,

4 - 9/2 = 5 - 9/2

И наконец, получаем долгожданное равенство:

4 = 5

или, если угодно: 2*2 = 5

Ошибка:

В преобразования, разумеется, закралась ошибка. А именно, при переходе из (4) в (5) совсем забыли, что равенство квадратов вовсе не означает равенство значений, возведенных в квадрат: они могут быть противоположны друг другу, как в нашем случае: 4-9/2 равно -1/2, а 5-9/2 равно 1/2. А квадраты этих значений одинаковы.

Глава 3. Классы ошибок в софизмах.

Учёные, занимающиеся изучением софизмов, делят все ошибки на 3 класса:

1. Логические – основанные на нарушении правил логики;
2. Терминологические – не точное, неясное для понимания или неправильное словоупотребление и построение фразы. Например: «сколько будет трижды два плюс два?» Здесь трудно решить имеется ли в виду (3*2)+2 или 3*(2+2);
3. Психологические.

Логические ошибки.

Так как обычно вывод может быть выражен в силлогистической форме, то и всякий софизм может быть сведён к нарушению правил силлогизма. Наиболее типичными источниками логических софизмов являются следующие нарушения правил силлогизма:

Вывод с отрицательной меньшей посылкой в первой фигуре: «Все люди суть разумные существа, жители планет не суть люди, следовательно, они не суть разумные существа»

Вывод с утвердительными посылками во второй фигуре: «Все, находящие эту женщину невинной, должны быть против наказания её; вы — против наказания её, значит, вы находите её невинной»

Вывод с общим заключением в третьей фигуре: «Закон Моисеев запрещал воровство, закон Моисеев потерял свою силу, следовательно, воровство не запрещено»

Особенно распространённая ошибка употребления среднего термина в большой и в меньшей посылке не в одинаковом значении: «Все металлы — простые тела, бронза — металл: бронза — простое тело» (здесь в меньшей посылке слово «металл» употреблено не в точном химическом значении слова, обозначая сплав металлов): отсюда в силлогизме получаются четыре термина.

Терминологические ошибки.

Грамматические, терминологические и риторические источники софизмов выражаются в неточном или неправильном словоупотреблении и построении фразы. Существует несколько классов терминологических ошибок:

1. Ошибка гомонимия. Например: реакция, в смысле химическом, биологическом и историческом; доктор это как врач и как учёная степень.

2. Ошибка сложения — когда разделительному термину придается значение собирательного. Все углы треугольника больше 2 π в том смысле, что сумма меньше 2 π.
3. Ошибка разделения, обратная, когда собирательному термину дается значение разделительного: "все углы треугольника равны 2 π" в смысле "каждый угол равен сумме 2 прямых углов".
4. Ошибка ударения, когда подчёркивание повышением голоса в речи и курсивом в письме определенного слова или нескольких слов во фразе искажает её первоначальный смысл.

5. Ошибка выражения, заключающаяся в неправильном или неясном для уразумения смысла построении фразы, например: сколько будет: дважды два плюс пять? Здесь трудно решить имеется ли в виду 2*2+5=9 или 2*(2+5)=14.

Более сложные софизмы проистекают из неправильного построения целого сложного хода доказательств, где логические ошибки являются замаскированными неточностями внешнего выражения.

Психологические ошибки.

Психологические причины софизмов бывают троякого рода: интеллектуальные, аффективные и волевые. Во всяком обмене мыслей предполагается взаимодействие между 2 лицами, читателем и автором или лектором и слушателем, или двумя спорящими. Убедительность софизма предполагает два фактора: α — психические свойства одной и β — другой из обменивающихся мыслями сторон. Правдоподобность софизма зависит от ловкости того, кто защищает его, и уступчивости оппонента, а эти свойства зависят от различных особенностей обеих индивидуальностей.

Интеллектуальные причины.

Интеллектуальные причины софизма заключаются в преобладании в уме лица, поддающегося софизму, ассоциаций по смежности над ассоциациями по сходству, в отсутствии развития способности управлять вниманием, активно мыслить, в слабой памяти, непривычке к точному словоупотреблению, бедности фактических знаний по данному предмету, лености в мышлении (ignava ratio). Обратные качества, разумеется, являются наиболее выгодными для лица, защищающего софизм: обозначим первые отрицательные качества через b, вторые соответствующие им положительные через а.

Аффективные причины.

Сюда относятся трусость в мышлении — боязнь опасных практических последствий, вытекающих от принятия известного положения; надежда найти факты, подтверждающие ценные для нас взгляды, побуждающая нас видеть эти факты там, где их нет, любовь и ненависть, прочно ассоциировавшиеся с известными представлениями. Желающий обольстить ум своего соперника софист должен быть не только искусным диалектиком, но и знатоком человеческого сердца, умеющим виртуозно распоряжаться чужими страстями для своих целей.

Волевые причины.

При обмене мнений мы воздействуем не только на ум и чувства собеседника, но и на его волю. Во всякой аргументации (особенно устной) есть элемент волевой — императивный — элемент внушения. Категоричность тона, не допускающего возражения, определенная мимика действуют неотразимым образом на лице, легко поддающихся внушению, особенно на массы, с другой стороны, пассивность слушателя особенно благоприятствует успешности аргументации противника. Логические, грамматические и психологические факторы теснейшим образом связаны между собой.

Глава 4. Софисты.

Софистами называли группу древнегреческих философов 4-5 века до н.э., достигших большого искусства в логике. В период падения нравов древнегреческого общества(5 век) появляются так называемые учителя красноречия, которые целью своей деятельности считали и называли приобретение и распространения мудрости, вследствие чего они именовали себя софистами. Но суть деятельности софистов много больше, чем простое обучение искусству красноречия. Они обучали и просвещали древнегреческий народ, старались способствовать достижению нравственности, присутствия духа, способности ума ориентироваться во всяком деле. Но софисты не были учеными. Умение, которое должно было быть достигнуто с их помощью, заключалось в том, что человек учился иметь в виду многообразные точки зрения. Основным направление деятельности софистов стала социально-антропологическая проблема. Они рассматривали самопознание человека, учили сомневаться, но все же, это очень глубокие философские проблемы, которые стали основой для мыслителей Европейской культуры. Что касается самих софизмов, то они стали как бы дополнением к софистике в целом, если рассматривать ее как истинно философское понятие.

Пути философской мысли в разные эпохи имеют нечто общее: так, в частности, на смену универсальным моделям бытия приходят, как правило, учения, которые восстают против метафизики, ссылаясь на ограниченность человеческого познания. За Декартом и Лейбницем пришел Кант, за Гегелем и материалистами XIX в.— позитивизм. То же самое мы видим и в Греции. Натурфилософия во всех ее видах перестала удовлетворять разум. Сама она раздиралась борьбой догматических систем. Даже то немногое, что сохранилось от книг до сократовских мыслителей, несет следы ожесточенной полемики: Гераклит нападает на Пифагора и Ксенофана, Демокрит опровергает Парменида, элеаты воюют со всеми теориями множественности и т. д. Понятно, что должны были появиться люди, которые предложили бы своего рода «колумбово решение» споров: если все школы противоречат друг другу, то не являются ли их теории о Первооснове и мире тем, что сами они называют «мнением»?

Софисты, однако, оказали невольную услугу греческой мысли, расшатав привычные каноны мышления, изощрив искусство анализа, но в итоге они пришли к самоотрицанию философии. И это было вполне закономерно. Раз действительность испарилась, зачем вообще нужны рассуждения о мире и последовательный взгляд на вещи? Главное — это подбирать наиболее убедительные и красивые аргументы в споре, чтобы суметь защитить любой тезис. Все сводится к методу изложения. Софисты недвусмысленно называли его «гражданской наукой» и очень часто в спорах стремились лишь запутать противника. Ведь если истины нет, то важнее всего одержать верх в словопрениях.

Наиболее известна деятельность софистов Протагора из Абдебы, Горгия из Леонтип, Гиппия из Элиды и Продика из Кеоса. Наиболее уважаемым из философов, имеющих отношение к софистке, был Сократ(469-399 гг. до н. э.). Он активно участвовал в спорах и обсуждениях софистов, но вскоре стал критиковать их учение, софистику в целом. Такому же примеру последовали и его ученики Ксенофонт и Платон.

Глава 5.Софизмы, на которые до сих пор нет ответов.

1. «Ахиллес никогда не догонит черепаху».

Образ Ахиллеса взят из «Илиады» Гомера, где герой Ахиллес неоднократно именуется «быстроногим». Сюжет софизма напоминает безуспешную погоню Ахиллеса за Гектором:

«Гектора ж, в бегстве преследуя, гнал Ахиллес непрестанно. Словно как пёс по горам молодого гонит оленя…»

Древнегреческий философ Зенон доказывал, что Ахиллес, один из самых сильных и храбрых героев, осаждавших древнюю Трою, никогда не догонит черепаху, которая, как известно, отличается крайне медленной скоростью передвижения.

Вот примерная схема рассуждений Зенона. Предположим, что Ахиллес и черепаха начинают движение одновременно, и Ахиллес стремится догнать черепаху. Примем для определённости, что Ахиллес движется в 10 раз быстрее черепахи, и что их отделяют друг от друга 100 шагов.

Когда Ахиллес пробежит расстояние в 100 шагов, отделяющие его от того места, откуда начала двигаться черепаха, то в этом месте он уже её не застанет, так как она пройдёт вперёд расстояние в 10 шагов. Когда Ахиллес пробежит и эти 10 шагов, то и там черепахи уже не будет, поскольку она успеет перейти на 1 шаг вперёд. Достигнув и этого места, Ахиллес опять не найдёт там черепахи, потому что она успеет пройти расстояние, равное 1/10 шага, и снова окажется несколько впереди его. Это рассуждение можно продолжать до бесконечности, и придётся признать, Что быстроногий Ахиллес никогда не догонит медленно ползающую черепаху.

Где ошибка?

Рассматриваемый софизм Зенона даже на сегодняшний день далёк от своего окончательного разрешения. Вот некоторые его аспекты, указанные в книге Мадера А. Г., Мадера Д. А. «Математические софизмы»:

«Сначала определим время t, за которое Ахиллес догонит черепаху. Оно легко находится из уравнения $a+vt=wt$, где a – расстояние между Ахиллесом и черепахой до начала движения, v и w – скорости черепахи и Ахиллеса соответственно. Это время при принятых в софизме условиях (v=1 шаг/сек и w=10 шагов/сек) равно 11,111111… сек.

Другими словами, примерно через 11,1 сек. Ахиллес догонит черепаху.

Подойдём теперь к утверждениям софизма с точки зрения математики. Проследим логику Зенона. Предположим, что Ахиллес должен пройти столько же отрезков, сколько их пройдёт черепаха. Если черепаха до момента встречи с Ахиллесом пройдёт m отрезков, то Ахиллес должен пройти те же m отрезков плюс ещё один отрезок, который разделял их до начала движения. Следовательно, мы приходим к равенству $m=m+1$, что невозможно. Отсюда следует, что Ахиллес никогда не догонит черепаху.

Итак, путь, пройденный Ахиллесом, состоит из бесконечной последовательности отрезков, которые принимают бесконечный ряд значений. Трудности, которые возникают при оперировании понятиями «непрерывного» и «бесконечного» до сих пор не определены, а разрешение противоречий, содержащихся в них, послужило более глубокому осмыслению основ математики».

В действительности, трудно представить себе Ахиллеса, бежащего расстояние в одну тысячную миллиметра. Таким образом, становится совершенно ясно, что этот софизм Зенона оказывается правильной в теории, но абсолютно неверной в практике.

Практическая часть.

В целях ознакомления с математическими софизмами учащихся моего класса мною были предложены следующие задания:

1. 10-10=0

   15-15=0

   10-10=15-15

   2*(5-5) = 3*(5-5)

2=3

2. Что ты не терял, то имеешь. Рога ты не терял. Значит, у тебя рога есть.

3. Дважды два - пять!

16 - 36 = 25 - 45; Прибавим к левой и правой части 81/4:
16 - 36 + 81/4 = 25 - 45 + 81/4; Преобразуем выражение:
4*4 - 2*4*9/2 + (9/2)*(9/2) = 5*5 - 2*5*9/2 + (9/2)*(9/2)
Теперь можно заметить, что в левой и правой части выражения записаны произведения вида: a2-2ab+b2, то есть, квадрат разности: (a-b)2. В нашем случае слева a=4, b=9/2, а справа a=5, b=9/2. Поэтому перепишем выражение в виде квадратов разности:
(4 - 9/2)2 = (5 - 9/2)2;А, следовательно,
4 - 9/2 = 5 - 9/2
4 = 5 или, 2*2 = 5

4. «Полупустое есть то же, что и полу полное. Если равны половины, значит, равны и

целые. Следовательно, пустое есть то же, что и полное».

5. Возьмем верное равенство: 2 р. = 200 к. и возведем его по частям в квадрат. Мы

получим: 4 р. = 40 000 к.
На эти софизмы надо было ответить:

1. Ошибка в том, что на нуль (5 – 5) делить нельзя.

2. Если у тебя нет рогов, ты не сможешь их потерять.

3. В преобразования, разумеется, закралась ошибка. А именно, при переходе из (4)

в (5) совсем забыли, что равенство квадратов вовсе не означает равенство значений, возведенных в квадрат: они могут быть противоположны друг другу, как в нашем случае: 4-9/2 равно -1/2, а 5-9/2 равно 1/2. А квадраты этих значений одинаковы.

4. Ясно, что приведенное рассуждение неверно, так как в нем применяется

неправомерное действие: увеличение вдвое. В данной ситуации его применение бессмысленно.

5. Здесь надо вспомнить, что возведение в квадрат денег не имеет смысла. В

квадрат возводятся числа, а не величины.

В анкетировании приняло участие 27 учеников.

Первый софизм: правильно ответил 1 ученик, неправильно ответили 26 учеников.

Второй софизм: правильно ответили 11 учеников, неправильно ответили 16 учеников.

Третий софизм: правильно ответили 2 ученика, неправильно ответили 25 учеников.

Четвёртый софизм: правильно ответили 4 ученика, неправильно ответили 23 ученика.

Пятый софизм: правильно ответили 11 учеников, неправильно ответили 16 учеников.

Исходя из данных, которые я получила во время анкетирования, я поняла, что для ребят моего класса легче решать логические софизмы, нежели алгебраические.

Заключение.

О математических софизмах можно говорить бесконечно много, как и о математике в целом. Софизмы это смесь философии и математики, которая не только помогает развивать логику и искать ошибку в рассуждениях. Буквально вспомнив, кто же такие были софисты, можно понять, что основной задачей было постижение философии. Но тем не менее, в нашем современном мире, если и находятся люди, которым интересны софизмы, в особенности математические, то они изучают их как явление только со стороны математики, чтобы улучшить навыки правильности и логичности рассуждений.

Понять софизм как таковой (решить его и найти ошибку) получается не сразу. Требуются определенный навык и смекалка. Что касается меня, то некоторые софизмы приходилось разбирать по нескольку раз, чтобы действительно в них разобраться, некоторые же наоборот, казались очень простыми.

Исторические сведения о софистике и софистах помогли мне разобраться, откуда же все-таки началась история софизмов. По началу, я думала, что софизмы бывают исключительно математические. Причем в виде конкретных задач, но, начав исследование в этой области, я поняла, что софистика-это целая наука, а именно математические софизмы - это лишь часть одного большого течения.

Исследовать софизмы действительно очень интересно и необычно. Порой сам попадаешься на уловки софиста, на столь безукоризненность его рассуждений. Перед тобой открывается какой-то особый мир рассуждений, которые поистине кажутся верными. Благодаря софизмам можно научится искать ошибки в рассуждениях других людей, научится грамотно строить свои рассуждения и логические объяснения. Если есть желание, то можно стать искусным софистом, добиться исключительного мастерства в искусстве красноречия или просто на досуге проверить свою смекалку.

И в конце хотелось бы сказать, что все мои цели, поставленные мной в начале работы, были мной достигнуты.

Список литературы.

1) А.Г. Мадера, Д.А. Мадера «Математические софизмы», Москва, «Просвещение», 2003г.

2) Ф.Ф. Нагибин, Е.С. Канин «Математическая шкатулка», Москва, «Просвещение», 1988г.

3) «Большая энциклопедия Кирилла и Мефодия» 2004г.

4) Савин А. П. «Энциклопедический словарь юного математика», Москва, «Педагогика» 1989г.

5) ru.wikipedia.org

6) Ахманов А. С. «Логическое учение Аристотеля»

7) Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева Л. К. «Ошибки в математических рассуждениях»

8) Пельман Я. И. «Занимательная математика»

9) «Аванта +. Математика». – Москва, изд. «Аванта +»,1998

10) Игнатьев Е.И. «Математическая смекалка. Занимательные задачи, игры, фокусы, парадоксы». – Москва, изд. «Омега»,1994.

11) Лямин А. А., «Математические парадоксы и интересные задачи». –Москва, 1911