

Краевая научно-практическая конференция учебно-исследовательских и
проектных работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

Модель движения человека при прыжке

Рыжков Даниил Сергеевич,
11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Шабрыкина Наталья Сергеевна,
к.ф.-м.н., доцент ПНИПУ

Пермь. 2013.

Введение

В процессе обычной жизнедеятельности каждый человек, даже тот, кто не занимается специальными физическими упражнениями, совершает множество движений: встает, садится, тянется, ходит, бегает, наклоняется, прыгает и т.д. Люди делают это, не задумываясь о том, к чему это может привести. В жизни при совершении всех этих движений человек может получить различные травмы: начиная с простых ушибов и заканчивая серьезными переломами. Для предотвращения данных травм придумана специализированная экипировка, которая защищает человека.

В спорте наиболее актуальной и важной задачей также является снижение травматизма. Тренер может варьировать сложность выполняемой программы, тем самым изменяя уровень травмоопасности данной программы. Исходя из выбранных упражнений, тренер выбирает оптимальные тренировочные задания. Выполняя их, спортсмен сможет овладеть лучшей техникой, которая позволит ему достичь высоких результатов на соревнованиях. Сейчас, используя математическое моделирование, тренер может выполнять свою работу, не затрачивая на это большого количества средств и времени.

Целью данной работы является моделирование нижних конечностей человека при различных физических упражнениях. Математическое моделирование даст возможность тренерам разработать безопасную стратегию выполнения упражнений и план тренировок, который поможет достичь максимально возможного результата на соревнованиях.

Концептуальная постановка

В данной работе рассмотрена четырёхзвеньевая модель человеческого тела, которая состоит из:

- Туловища;
- Бедренной кости;
- Большой берцовой кости;
- Костей стопы.

В модели приняты следующие допущения:

- Кости представлены абсолютно твёрдыми стержнями;
- Суставы представляют собой шарниры, трение в которых отсутствует;
- Ограничения на движения суставов отсутствуют;
- Модель рассматривается в одной плоскости.

Математическая постановка

Рассматривается четырёхзвённая модель человека, представленная на рис. 1. Точками $C_1 - C_4$ обозначены центры масс каждого звена, $\varphi_1 - \varphi_4$ представляют собой углы между звеньями и вертикалью.

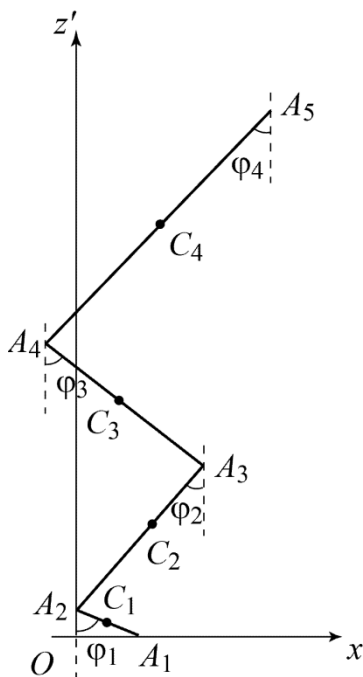


Рис. 1. Модель человека.

На рис. 2-5 данная модель разбивается на 4 звенья, и указываются силы, действующие на них. Сила реакции в суставах разбивается на 4 составляющие. На каждое из звеньев, соединенных одним суставом, действуют по 2 силы равные по модулю.

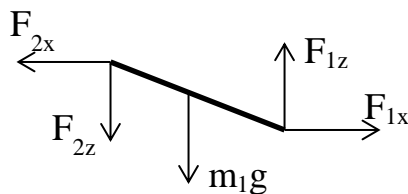


Рис. 2. Силы, действующие на стопу.

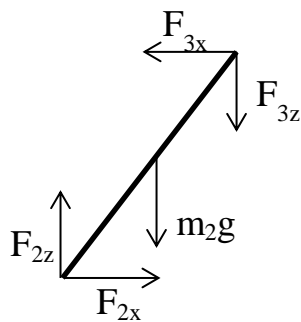


Рис. 3. Силы, действующие на берцовую кость.

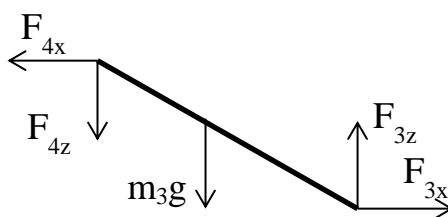


Рис. 4. Силы, действующие на бедренную кость.

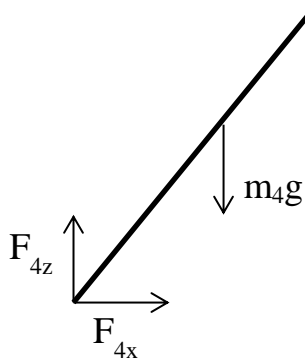


Рис. 5. Силы, действующие на туловище.

Для каждого звена данной модели необходимо записать второй закон Ньютона и уравнения вращательного движения:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (1)$$

$$\varepsilon I = \sum_{i=1}^n M_i, \quad (2)$$

учитывая, что равнодействующие силы реакции шарниров, расположенных на соединении двух звеньев, равны нулю.

Для стопы уравнения выглядят:

$$\vec{F}_{1z} + \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2z} + \vec{F}_{2x} + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}_1, \quad (3)$$

$$F_{1x} - F_{2x} = m_1 \ddot{x}_1, \quad (4)$$

$$F_{1z} - F_{2z} - m_1 g = m_1 \ddot{z}_1, \quad (5)$$

$$F_{1z} r_1 \sin \varphi_1 + F_{1x} r_1 \cos \varphi_1 + F_{2z} (l_1 - r_1) \sin \varphi_1 + F_{2x} (l_1 - r_1) \cos \varphi_1 = \ddot{\varphi}_1 I_1, \quad (6)$$

где координаты центра масс:

$$x_1 = -r_1 \sin \varphi_1, \quad (7)$$

$$z_1 = r_1 \cos \varphi_1. \quad (8)$$

Для берцовой кости:

$$\vec{F}_{2z} + \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{3z} + \vec{F}_{3x} + m_2 \vec{g} = m_2 \vec{a}_2, \quad (9)$$

$$F_{2x} - F_{3x} = m_2 \ddot{x}_2, \quad (10)$$

$$F_{2z} - F_{3z} - m_2 g = m_2 \ddot{z}_2, \quad (11)$$

$$-F_{2z} r_2 \sin \varphi_2 + F_{2x} r_2 \cos \varphi_2 - F_{3z} (l_2 - r_2) \sin \varphi_2 + F_{3x} (l_2 - r_2) \cos \varphi_2 = \ddot{\varphi}_2 I_2, \quad (12)$$

где координаты центра масс:

$$x_2 = -l_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2, \quad (13)$$

$$z_2 = l_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2. \quad (14)$$

Для бедренной кости:

$$\vec{F}_{3z} + \vec{F}_{3x} + \vec{F}_{4z} + \vec{F}_{4x} + m_3 \vec{g} = m_3 \vec{a}_3, \quad (15)$$

$$F_{3x} - F_{4x} = m_3 \ddot{x}_3, \quad (16)$$

$$F_{3z} - F_{4z} - m_3 g = m_3 \ddot{z}_3, \quad (17)$$

$$F_{3z} r_3 \sin \varphi_3 + F_{3x} r_3 \cos \varphi_3 + F_{4x} (l_3 - r_3) \cos \varphi_3 + F_{4z} (l_3 - r_3) \sin \varphi_3 = \ddot{\varphi}_3 I_3, \quad (18)$$

где координаты центра масс:

$$x_3 = -l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 - r_3 \sin \varphi_3, \quad (19)$$

$$z_3 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + r_3 \cos \varphi_3. \quad (20)$$

Для туловища:

$$\vec{F}_{4z} + \vec{F}_{4x} + m_4 \vec{g} = m_4 \vec{a}_4, \quad (21)$$

$$F_{4x} = m_4 \ddot{x}_4, \quad (22)$$

$$F_{4z} - m_4 g = m_4 \ddot{z}_4, \quad (23)$$

$$F_{4x} r_3 \cos \varphi_3 - F_{4z} r_3 \sin \varphi_3 = \ddot{\varphi}_4 I_4, \quad (24)$$

где координаты центра масс:

$$x_4 = -l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3 + r_4 \sin \varphi_4, \quad (25)$$

$$z_4 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 + r_4 \cos \varphi_4. \quad (26)$$

Используя уравнение (14), выражены силы, действующие на звенья:

$$F_{4x} = m_4 \ddot{x}_4, \quad (27)$$

$$F_{4z} = m_4 (\ddot{z}_4 + g), \quad (28)$$

$$F_{3x} = m_3 \ddot{x}_3 + m_4 \ddot{x}_4, \quad (29)$$

$$F_{3z} = m_3 (\ddot{z}_3 + g) + m_4 (\ddot{z}_4 + g), \quad (30)$$

$$F_{2x} = m_2 \ddot{x}_2 + m_3 \ddot{x}_3 + m_4 \ddot{x}_4, \quad (31)$$

$$F_{2z} = m_2 (\ddot{z}_2 + g) + m_3 (\ddot{z}_3 + g) + m_4 (\ddot{z}_4 + g), \quad (32)$$

$$F_{1x} = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + m_3 \ddot{x}_3 + m_4 \ddot{x}_4, \quad (33)$$

$$F_{1z} = m_1 (\ddot{z}_1 + g) + m_2 (\ddot{z}_2 + g) + m_3 (\ddot{z}_3 + g) + m_4 (\ddot{z}_4 + g). \quad (34)$$

Методы и результаты моделирования

Используя данные, полученные в математической постановке, можно рассматривать разные задачи. Целью данной работы является исследование прыжков в фигурном катании. Используя формулы из математической постановки и зная зависимости углов между звеньями и вертикалью, можно вычислить силу реакций опоры на суставы. Зависимость изменения углов от времени определяется функцией $\varphi(t) = a + be^{-ct}$, где коэффициенты a , b , c определяются следующим образом: $a = \varphi_{\max}$, $b = \varphi_0 - \varphi_{\max}$, $c = -\frac{1}{t_n} \ln\left(\frac{\varphi_n - \varphi_{\max}}{\varphi_0 - \varphi_{\max}}\right)$, где φ_n - известное значение угла в момент времени t_n , φ_0 и φ_{\max} начальные и конечные значения углов.

Для нахождения реакций в суставах были взяты данные из литературы значения масс, положения центров масс, длин [3]. Эти данные представлены в таблице 1.

Таблица 1. Масс-инерционные характеристики частей тела человека.

Величина	Значение	Единица измерения
Рост	1,75	м
Масса тела	75,21	кг
Масса туловища	55,34	
Масса бедра	14,17	кг
Масса голени	4,33	кг
Масса стопы	1,37	кг
Длина туловища	0,81	м
Длина бедра	0,49	м
Длина голени	0,45	м
Длина стопы	0,37	м
Положение центра масс туловища (величина r_i)	0,38	м
Положение центра масс бедра	0,27	м
Положение центра масс голени	0,27	м
Положение центра масс стопы	0,21	м

Используя программу Maple 14, были решены уравнения (27-34) с использованием тестовых величин.

На рис. 6 показаны зависимости углов каждого звена от времени. На рис. 7 представлена зависимость силы реакции опоры от времени.

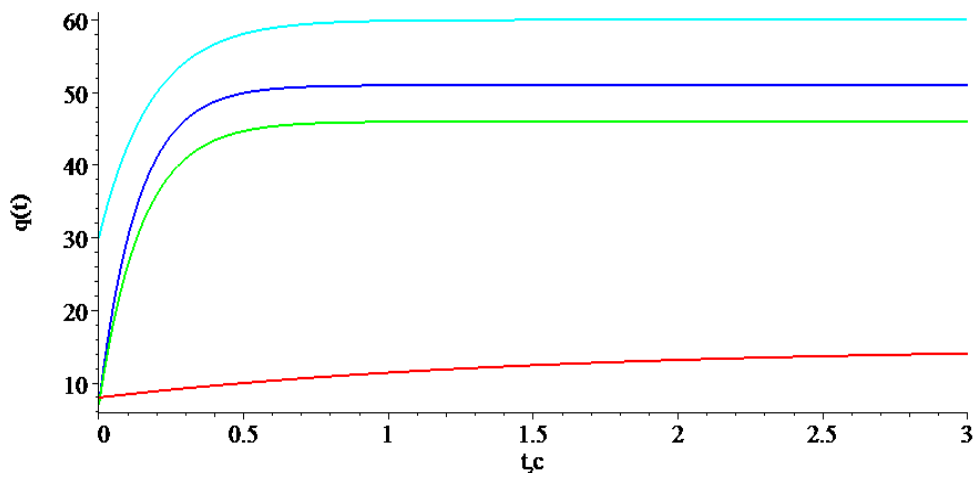


Рис. 6. Зависимости углов наклона стопы (зелёная линия), голени (синяя линия), бедра (голубой линия), туловища (красная линия).

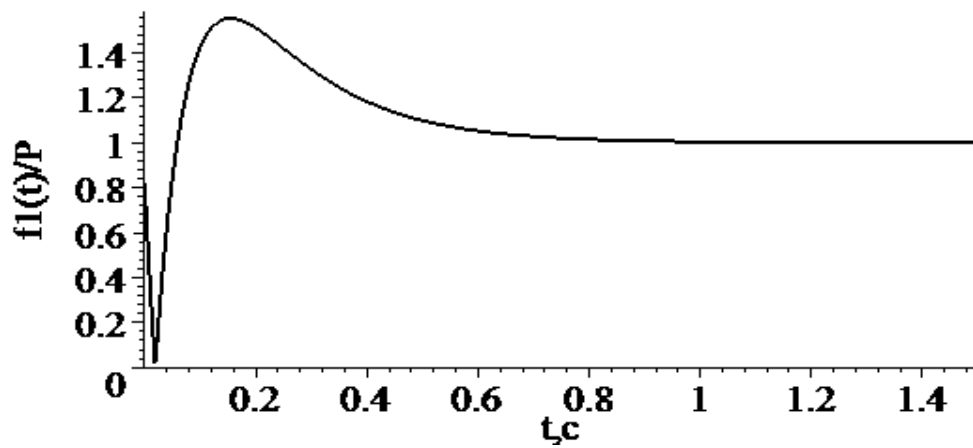


Рис. 7. Зависимость перегрузки в голеностопном суставе от времени.

На рис. 8, 9, 10 представлены графики зависимости перегрузки в суставах от времени.

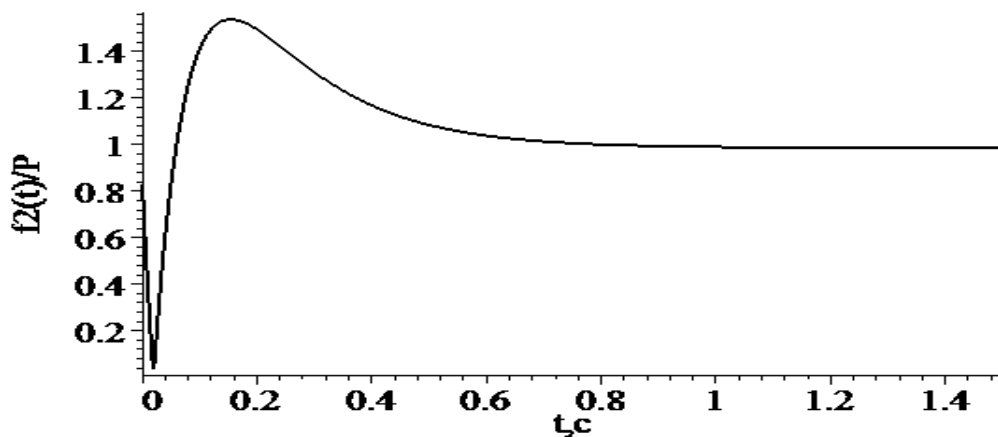


Рис. 8. Зависимость перегрузки в голеностопном суставе от времени.

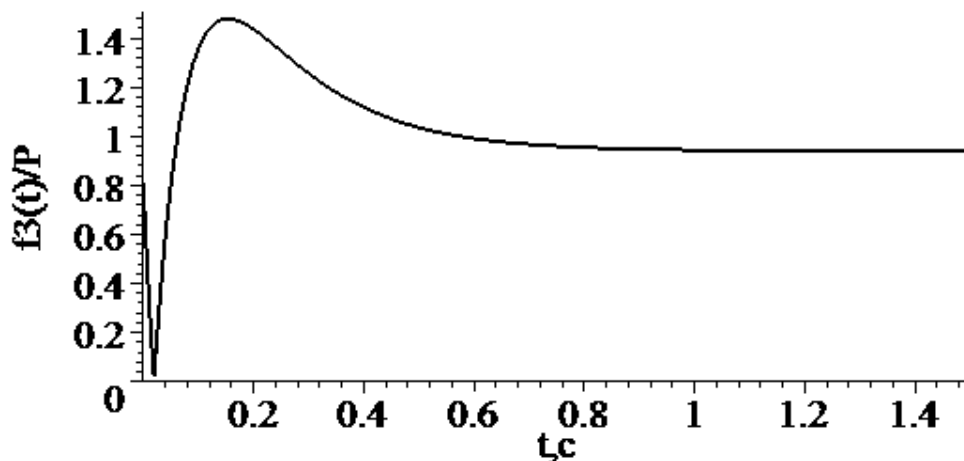


Рис. 9. Зависимость перегрузки в коленном суставе от времени.

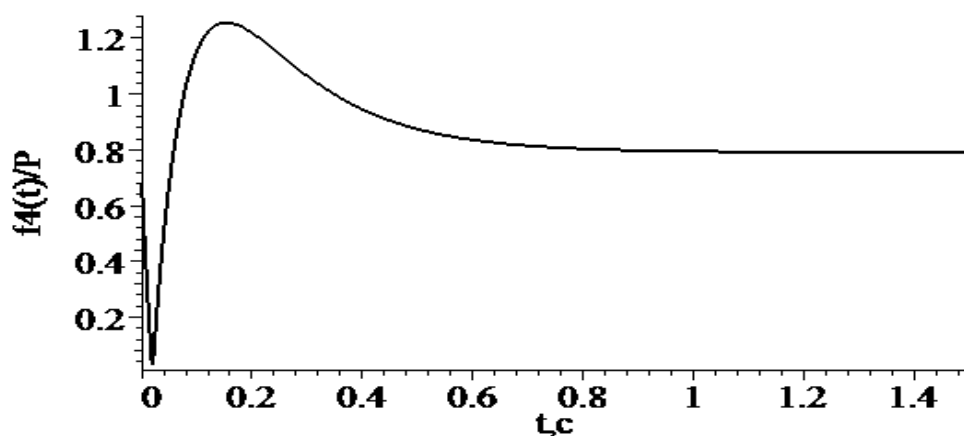


Рис. 10. Зависимость перегрузки в тазобедренном суставе от времени.

Из данных графиков видно, что максимальные значения перегрузки достигают в момент приземления спортсмена, также перегрузки в суставах становятся постоянными, когда фиксируются углы между звеньями. На тазобедренный сустав перегрузка не так велика, как на другие суставы.

Рассмотренная модель может также применяться для анализа отталкивания перед прыжком. Чтобы проанализировать данный случай, необходимо знать скорость центра масс фигуриста, которую он приобретёт при отрыве ото льда. От этой величины будет зависеть высота и дальность прыжка. Уравнения координат центров масс каждого звена были решены в математическом пакете, после чего была найдена скорость центра масс системы.

На рис. 11 представлена зависимость скорости центра масс от времени.

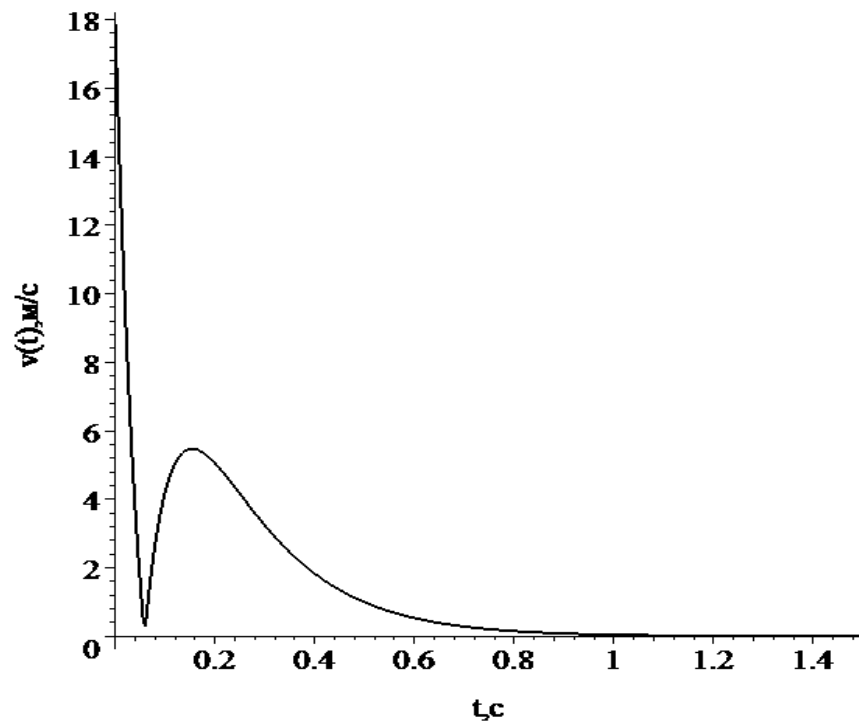


Рис. 11. Зависимость центра масс от времени.

По графику видно, что при приземлении фигуриста скорость принимает максимальное значение, после чего фигурист останавливается.

Литература

1. Kinematic characteristics of impact absorption during landings of multi-revolution jumps in figure skating / K.L. Lockwood, J.P. Baudin & P.L. Gervais // ISBS Symposium, 1995, 236-239.
2. Variation in landing during gymnastic skills / Karen T Beatty, Andrew S McIntosh and Bertrand O Frechede // ISBS Symposium 2007, Ouro Preto – Brazil.
3. Зациорский В.М. и др. Биомеханика двигательного аппарата человека. – М.: Физкультура и спорт, 1981. – 143 с.