Краевая научно-практическая конференция учебно-исследовательских и проектных работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

От Евклида до Лобачевского

Степанова Марина,

11 кл., МАОУ «ПСОШ №1» п. Полазна,

Добрянский район,

Степанова Инна Владимировна,

учитель математики первой категории

Пермь. 2013.

Введение

Неевклидова геометрия, завоевав прочное место в науке, завоевывает его теперь в общем образовании широких кругов. Интерес к ней возрастает из года в год. Геометрия Лобачевского увлекает своим необычным строением, но не менее увлекательна и история ее открытия. Возникшая два тысячелетия назад неразрешимая проблема параллельных линий, многовековые попытки «очистить Евклида от всяких пятен», сознание безнадежности этих попыток, робкие зачатки новой геометрии у предшественников Н.И.Лобачевского и, наконец, рождение неевклидовой геометрии – все это отражение нашло отражение в моей исследовательской работе.

Содержание исследовательской работы непосредственно связано с программным материалом, в ходе изложения повторяются сведения, известные мне из курса геометрии.

Доказанные в работе теоремы позволяют ознакомиться с некоторыми красивыми математическими фактами. К ним относятся, например, теорема о сумме углов треугольника в плоскости Лобачевского, это и вопрос о разнообразии взаимного расположения прямых в плоскости Лобачевского и другие факты.

Тема была выбрана после того, как я задала себе вопрос: «Что общего и в чем различия в геометрии, которую мы изучаем в школе (Евклидовой геометрии), от геометрии Лобачевского»

Тема моей исследовательской работы: «От Евклида до Лобачевского».

Цель исследования: систематизировать и обобщить знания о евклидовой и неевклидовой геометрии.

Задачи исследования:

1. Углубить и расширить знания по аксиоматическому построению геометрии
2. Ознакомиться с решением проблемы пятого постулата Евклида и попытками его доказательства
3. Познакомиться с основными положениями неевклидовой геометрии и доказать некоторые свойства геометрии Лобачевского.
4. Использовать свойства геометрии Лобачевского при решении задач

В процессе работы над этой темой, я обратилась к различным источникам информации – это энциклопедии для школьников, библиотечка журнала «Квант», книги по истории математики Глейзера и другие.

В работе над данной темой я использовала метод сравнения, решения задач[1]; анализировала изученную информацию, сопоставляла полученные факты с известными фактами.

[1] Приложение 2

Глава 1.
Евклид и его геометрия

Геометрия возникла в глубокой древности – несколько тысячелетий до нашей эры. Самые древние памятники культуры говорят нам о том, что уже 4-5 тысяч лет назад люди знали многие геометрические факты, изучаемые в настоящее время в школе.

С VII века начинается период развития геометрии трудами греческих ученых. В V и VI веках было получено много основных геометрических фактов. К этому же времени сложилось понятие о доказательстве теорем.

В III столетии греки обладали уже глубокими геометрическими знаниями, причем они имели не только накопившийся запас фактов, но и методы геометрических доказательств. Поэтому в этот период возникли попытки собрать весь материал и расположить его в логически связном порядке.

Если на строго научной основе изложить школьную геометрию, то она представила бы собой логическую, связанную цепь доказательств различных утверждений, отражающих свойства реального мира.

Доказательства отдельных утверждений опираются на ранее установленные и сформулированные факты. Оказывается, что нельзя доказать целый ряд предложений, вполне естественно принять некоторые предложения без доказательства.

Определение 1. Предложения, принимаемые без доказательства, называются аксиомами.

Определение 2. Предложения, получаемые из аксиом или ранее доказанных утверждений путем логических умозаключений, называются теоремами.

С Аксиомами я уже встречалась в курсе геометрии VII класса и X класса.

Если аксиома представляет собой предложение, принимаемое без доказательства, то, по всей видимости, в качестве аксиомы можно принять любое произвольное математическое предложение. С этим утверждением я не согласна.

Рассмотрим теперь следующее предложение: «Хорда, проходящая через центр окружности, называется диаметром» -это определение

Определение 3. Предложение, устанавливающее смысл нового термина, исходя из понятий известных, называется определением.

Определение 4. Понятия, которые при построении геометрии не определяются, называются основными или первоначальными понятиями.

Такие понятия как точка, прямая, плоскость, в геометрии называются основными.

Помимо основных неопределяемых понятий существуют и отношения между ними. Которые обозначаются словами «лежат», «прилежат», «между», «равны». Эти отношения называются основными.

К строго научному построению любой математической дисциплины, в частности, геометрии, предъявляются следующие требования:

1. всякое утверждение должно быть помещено в число аксиом, либо строго доказано на основе аксиом или ранее сформулированных или доказанных теорем.

2. всякое понятие должно быть либо помещено в число основных, либо определено с помощью основных и ранее определенных понятий.
Метод изложения науки на основе этих двух требований называется аксиоматическим.
Со временем Евклида, жившего в III веке до нашей эры, элементарная геометрия считается образцом аксиоматического построения математической науки.
Первая система аксиом геометрии была дана Евклидом, ему же принадлежит и аксиоматическое построение элементарной геометрии, в основных чертах и сохранившиеся по сей день.
Несмотря на то, что первые попытки обосновать геометрию предпринимались задолго до Евклида, одна из таких попыток принадлежала древнегреческому геометру Гиппократу Хиосскому, все они были забыты после появления гениального творения Евклида, так называемых «Начал»
«Начала» Евклида были составлены по схеме, которую рекомендовал величайший древнегреческий философ и ученый Аристотель: сначала формулируются определения и аксиомы, затем приводятся теоремы и их доказательства. Именно этой схеме и следовал Евклид.
Первое печатное издание «Начал» на латинском языке появилось в 1842 году.
Первый перевод на русский язык появился в 1739 году.
«Начала» Евклида состоят из тринадцати книг. Из них:
I-VI книги посвящены планиметрии,
VII-IX посвящены арифметике,
X посвящена несоизмеримым величинам,
X1-XIII посвящены стереометрии.
Почти каждая из частей «Начал» начинается с определений всех терминов, которые в ней встречаются. Правда, многие из этих определений были настолько расплывчатыми, что трудно было ими воспользоваться.
Первая книга начинается перечисления аксиом и постулатов. У Евклида под постулатом понималось утверждение о возможности определенных геометрических построений.
Далее следуют формулировки теорем с их доказательствами и многочисленными ссылками на постулаты, аксиомы и предыдущие предложения. При этом особенность стиля Евклида состояла в том, что теоремы не связывались между собой какими – либо комментариями и отступлениями.
Для математиков «Начала» были образцом для подражания в течении двух тысячелетий, а для прочих – единственным учебником.
Все, что излагается в «Началах» Евклида, в настоящее время называется евклидовой геометрией. В школе мы изучаем евклидову геометрию. Больше того, все современные учебники чуть ли не дословно копируют Евклида или написаны под большим его влиянием. Это влияние в той или иной степени чувствуется и в наших школьных учебниках геометрии.
В первой книге «Начал» приводятся двадцать три определения, а затем девять аксиом и пять постулатов.
Рассмотрим формулировки аксиом и постулатов Евклида.

Аксиомы:

1. Равные порознь третьему, равны между собой.
2. И если к равным прибавим равные, то получим равные.
3. И если от равных отнимем равные, то получим равные.
4. И если к неравным прибавим неравные, то получим неравные.
5. И если удвоим равные, то получим равные.
6. И половины равных равны между собой.
7. И совмещающиеся равны
8. И целое больше части
9. И две прямые не могут заключать пространства.

Постулаты:

1. Нужно потребовать, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.
2. И чтобы каждую ограниченную прямую можно было продолжить неопределенно.
3. И чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.
4. И чтобы все прямые углы были равны.
5. И чтобы всякий раз, как прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Один из постулатов Евклида, занимающий в представленном выше перечне последнее пятое место, привлекал исключительное внимание – это так называемый постулат о параллельных линиях. Он нам очень хорошо известен, в нашем учебнике этот постулат сформулирован в более простой формуле: «Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной». Аксиома параллельности из курса планиметрии, еще называется предложением Плейфера – по имени английского математика XVIII века. Это предложение Плейфера и пятый постулат Евклида, являются эквивалентными предложениями.

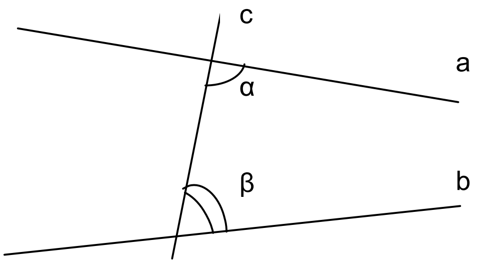
Попытки доказать это предложение предпринимались еще до Евклида. Так как эти попытки успеха не имели, то Евклид решил от них отказаться и включил это положение в число постулатов, то есть принял его без доказательства.

Большая часть «Начал» вообще не зависит от пятого постулата. Таким образом, великое открытие Евклида условно можно разделить на две части. К первой относится предложения, в доказательствах которых совершенно не используется пятый постулат. Совокупность предложений в геометрии, доказательства которых на постулат о параллельных линиях не опираются, принято называть абсолютной геометрией. Все последующие предложения опираются на него. Будем называть совокупность тех предложений, при доказательстве которых используется пятый постулат Евклида, собственно евклидовой геометрией.

Таким образом, создается впечатление, что «Начала» вообще можно построить без использования злополучного постулата. А отсюда остается один шаг до соблазна, то есть до попытки его доказать.

Глава 2.
Проблема пятого постулата

Во времена Евклида, а затем и до конца XIX века считали, что аксиомы – это предложения, не требующие доказательства, в силу их очевидности.
В качестве аксиомы параллельных Евклид принимал следующее предложение: «Если две прямые, пересекаясь с третьей прямой, образуют с ней внутренние односторонние углы α и β, то они пересекаются с той стороны, с которой эта сумма меньше 180^o. Если $\alpha + \beta$ меньше 180^o, то a пересекает b»

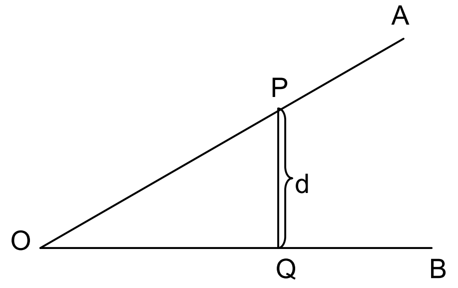


У Евклида это предложение было «пятым постулатом». Утверждение, содержащееся в нем, далеко не столь очевидно. Возникали попытки освободиться от сложности пятого постулата, вывести его из других основных посылок геометрии. Так возникла проблема пятого постулата.
Сам Евклид предпринимал попытки доказательства и, во всяком случае, в его время уже были такие попытки. Известно упоминание у арабских авторов не дошедшего до нас сочинения Архимеда «О параллельных линиях», где надо полагать, пятый постулат выводится из каких-то более простых посылок.
Попытки доказать пятый постулат продолжались с тех пор в течение 2000 лет. Их предпринимало множество ученых. Вот неполный перечень: грек Птолемей и Прокл, араб ал - хай сам, перс Омар Хайям, азербайджанец ат - Туси, немец Клавий – Шлюссель, итальянцы Катальди и Борели, англичанин Валлис, итальянец Саккери, немец Ламберт, французы Бертран и Лежандр, русский Гурьев.
Суть проблемы пятого постулата состоит в том, чтобы доказать его, не вводя новых аксиом.
Математики, пытавшиеся доказать пятый постулат, допускали двоякого рода ошибки:

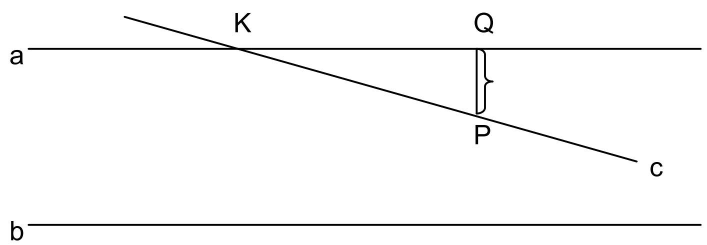
1. Они незаметно для себя вводили в ход рассуждений «очевидный факт», который оказывался эквивалентным пятому постулату.
2. Они сознательно дополняли систему аксиом новым постулатом, который оказывался также эквивалентным пятому постулату.

Следовательно, в обоих случаях математики попадали в ловушку «порочного круга».
Рассмотрим теперь две интересные попытки доказать пятый постулат Евклида. Эти две попытки отделяют друг от друга четырнадцать столетий.
Первое «доказательство» принадлежит древнегреческому философу идеалисту,

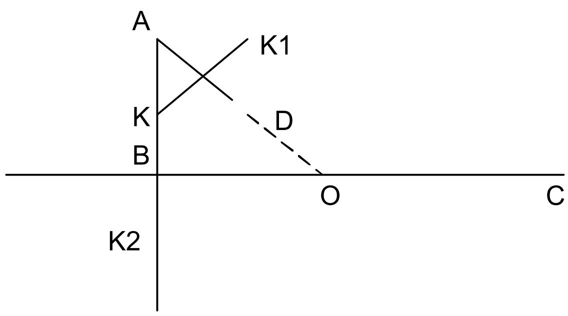
математику Проклу, второе – венгерскому математику Фаркашу Больяйю.
Доказательство Прокла.
В Процессе доказательства пятого постулата Прокл сделал следующее допущение, считая его очевидным:
Расстояние от точки, лежащей на одной стороне острого угла, до другой его стороны возрастает при удалении этой точки от вершины угла



Пусть даны две параллельные прямые a и b, так же прямая c, пересекающая прямую a в точке K



Тогда по мере удаления точки P от вершины угла PKQ расстояние безгранично возрастает. Но так как расстояние между параллельными является постоянным, то прямая c обязательно пересекает прямую b.
Какой вывод можно сделать из того, что прямая c пересекает прямую b?
Мы взяли произвольную прямую c и установили, что она пересекает прямую b. Следовательно, существует единственная прямая a, проходящая через точку K и не пересекающая прямую b. Отсюда следует справедливость пятого постулата.
Встает вопрос: допущена ли в доказательстве логическая ошибка?
В своем доказательстве Прокл исходил из того, что расстояние между параллельными является постоянным. Это допущение незаконно введено в доказательство. Оно является новым постулатом, равносильным пятому постулату Евклида.
Теперь рассмотрим доказательство Больяйя. Оно относится ко второму типу.
Больяй дополнил евклидову аксиоматику следующим предложением:
«Три точки, не лежащие на одной прямой, всегда принадлежат некоторой окружности».
Итак, пусть имеет место постулат Больяйя. Проведем к отрезку AB перпендикулят BC и наклонную AD



Встает вопрос, можно ли считать, что перпендикуляр и наклонная пересекаются?
Если перпендикуляр и наклонная пересекаются, то имеет место пятый постулат. А это предложение как раз и доказывается.
Возьмем на отрезке AB произвольную точку K и построим точку K1 ей симметричную, относительно прямой AD.
Аналогично построим точку K2, симметричную K, относительно прямой BC.
Лежат ли точку K, K1, K2 на одной прямой? Нет, так как прямая KK1 перпендикулярна прямой AD, а KK2 неперпендикулярна AD.
Теперь можно доказать, что прямые BC и AD пересекаются в точке O.
Действительно, в силу постулата Больяйя, три точки, не лежащие на одной прямой, принадлежат некоторой окружности. Таким образом, точки K, K1, K2 принадлежат окружности. Отсюда следует, что BC и AD являются серединными перпендикулярами к хордам KK1 и KK2 соответственно, то есть AD и BC – пересекаются в точке O – центре окружности.
Следует вывод, что имеет место пятый постулат.
Встает вопрос, можно ли считать, что пятый постулат Евклида строго доказан?
Рассмотренные рассуждения не являются, строим доказательством, так как использованный постулат Брольяйя является эквивалентом пятого постулата.
Следовательно, налицо «порочный круг».
Напряжение поисков доказательства с бурным развитием математики в 17 – 18 веках возрастало.
Значительные усилия сделал итальянский монах, преподаватель математики и грамматики Джованни Джироламо Саккери, труд которого с попыткой доказательства пятого постулата появился в 1733 году – в год его смерти.
Он называется «Евклид, очищенный от всех пятен, или же геометрическая попытка установить первые начала всей геометрии».
Саккери решил подойти к вопросу доказательства пятого постулата следующим образом. Он пытался доказать пятый постулат от противного.
Выводы, которые получил Саккери, были не более и не менее как теоремами геометрии Лобачевского (речь,о которых пойдет в следующей главе). Иначе говоря, Саккери развивал новую геометрию, не понимая, однако, того, что делает. В честь итальянского математика назван четырехугольник Саккери.

Глава 3.
Великое открытие Лобачевского

Слава решения знаменитой проблемы пятого постулата Евклида принадлежит великому русскому математику Николаю Ивановичу Лобачевскому. Он обнаружил полную безнадежность попыток доказательства пятого постулата. Лобачевский принял все аксиомы Евклида, кроме одной аксиомы параллельных. Пятый постулат он заменил следующей противоположной ему аксиомой.

<u>Аксиома Лобачевского</u>:

Пусть в данной плоскости дана прямая и лежащая вне этой прямой точка, тогда через эту точку можно провести к данной прямой в данной плоскости две различные параллельные прямые.

Из полученной, таким образом, системы аксиом Лобачевский с безупречной логической строгостью вывел стройную совокупность предложений (теорем), составляющих содержание математической дисциплины, известной под название неевклидовой геометрии Лобачевского.

Датой открытия условно считается 24.02.1826 г., когда молодой профессор Казанского университета представил свой доклад физико-математическому факультету.

Текст доклада не сохранился, но по словам автора, его содержание было опубликовано 1829 г. в статье «О началах геометрии». Открытие Лобачевского позволило уже во второй половине прошлого века называть его «Коперником» геометрии.

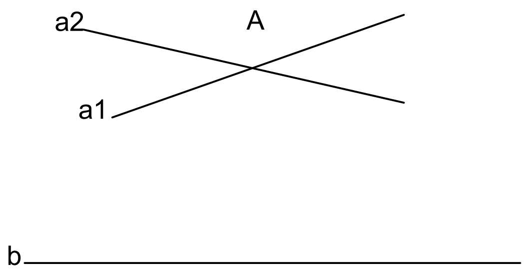
Н.И.Лобачевский подошел к теории параллельных иначе, чем его предшественники.

Геометрию он начал преподавать сразу после окончания Казанского университета. Записи его лекций шестнадцатый - семнадцатых годов девятнадцатого века, дошедшие до наших времен, еще содержат остроумную попытку доказательства аксиомы Евклида, но уже в двадцать третьем году он пишет о своем учебнике геометрии: «Строгого доказательства аксиомы Евклида до сих пор не могли сыскать».

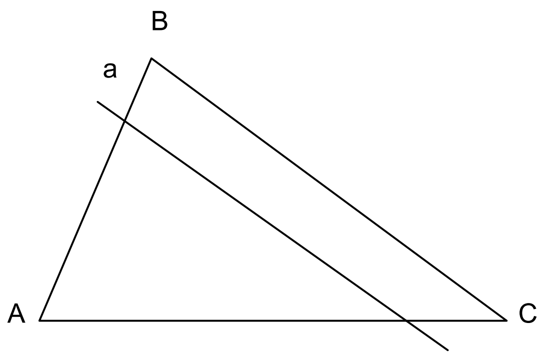
Аксиома, как и все результаты познания имеют опытное происхождение. Но если другие аксиомы геометрии опираются на простое повседневное наблюдение, то аксиома о параллельных носит более сложный характер.

Для её обоснования требуется эксперимент и теория этого эксперимента. Этой теорией не может быть геометрия Евклида. Она должна быть более общей и глубокой. Такую теорию и создал Лобачевский. Он называет её, сначала, осторожно – «воображаемой» геометрией, а потом, в конце жизни – «пангеометрией», то есть геометрией всеобщей.

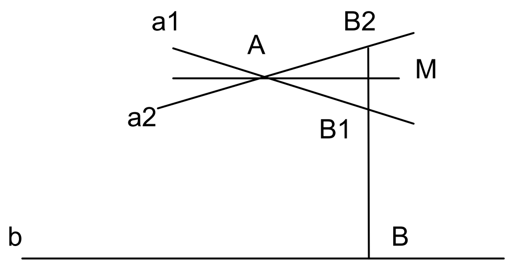
Итак, вернемся к аксиоме Лобачевского, согласно которой прямые a1 и a2, проходящие через точку A, не принадлежащие прямой b, не пересекают прямую b.



Можно строго доказать, что если пятый постулат Евклида заменить аксиомой Лобачевского, то тогда через точку А будет проходить бесконечное множество прямых, не пересекающих прямую b.
В процессе доказательства этого предложения нам придется использовать так называемую аксиому Паша – немецкий математик.
Аксиома Паша. Пусть дан треугольник АВС, если прямая а, лежащая в плоскости треугольника пересекает отрезок АВ, то она пересекает также либо отрезок АС, либо отрезок ВС, при этом прямая а не содержит ни одной из точек А,В,С .

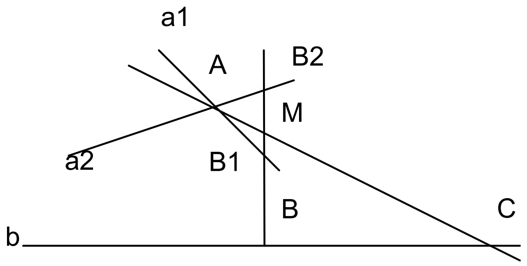


Приступим к доказательству следующей теоремы.
Через точку, лежащую вне прямой, в плоскости, определяемой ими, можно провести бесконечное множество прямых, не пересекающих данную прямую.
Доказательство:
1. Итак, по аксиоме Лобачевского прямые а1 и а2 не пересекают прямую b (см.рис.1).
2. На прямой а2 возьмем какую-нибудь точку В2 и соединим её с произвольной точкой В прямой b



Отрезок BB2 пересечет прямую a1 в некоторой точке B1.
Возьмем произвольную точку M на отрезке B1B2. Докажем, что прямая AM не пересекает прямую b (см.рис.3).

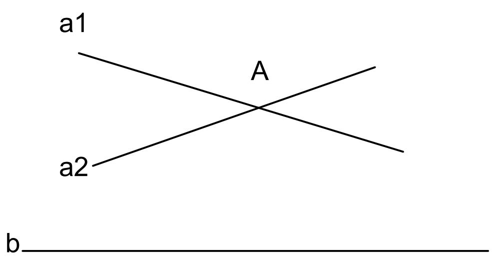
3. Допустим, что прямая AM пересекает прямую b в некоторой точке C .



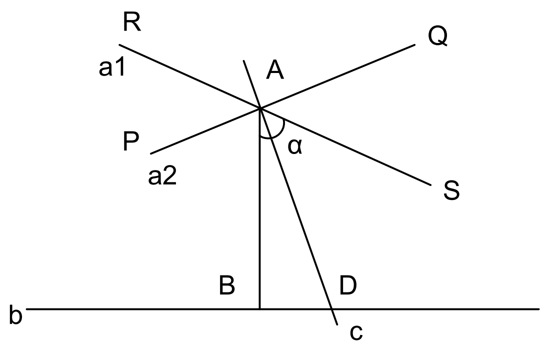
Попробуем теперь обнаружить возникшее противоречие. Для этого нужно рассмотреть треугольник MBC и прямую a1.

4. Прямая a1 пересекает сторону MB треугольника MBC, значит прямая a1 должна пересечь либо отрезок MC, либо BC (по аксиоме Паша).

Сторону MC прямая a1 пересечь не может, так как прямые MC и a1 уже пересекаются в точке A. Значит, прямая a1 должна пересечь прямую BC. Встает вопрос, а почему это невозможно? По аксиоме Лобачевского прямая a1 пересекать прямую BC не может. Мы пришли к противоречию. Следовательно, прямая AM не может пересекать прямую b.
Таким образом, в силу произвольного выбора точки M на отрезке B1B2, мы доказали, что все прямые, лежащие в заштрихованной области и проходящие через точку A, не пересекают прямую b.



Рассмотрим виды прямых в плоскости Лобачевского.



Прямые a1и a2 называются граничными. Это означает, что любая прямая, образующая с отрезком AB угол меньший, чем угол α, пересекает прямую b. На данном рисунке это прямая c. А граничные прямые a1 и a2 являются параллельными прямой b.
Что касается других прямых, не пересекающих прямую b, то есть тех прямых, которые находятся в заштрихованной области , то они не являются граничными и называются расходящимися или сверхпараллельными по отношению к прямой b. Обозначаются значком «)(»
Граничные прямые называются параллельными прямой b в точке A. При этом прямая a1 считается параллельной прямой b в направлении QD, а прямая a2 называется параллельной прямой b в направлении DQ. В первом случае говорят, что прямая a1 параллельна прямой b вправо, а во втором, что прямая a2 параллельна прямой b влево.
В евклидовой геометрии, как мы знаем, устанавливаются признаки параллельности прямых.
Так согласно одному из них, две прямые обязательно будут параллельными, если они будучи пересечены третьей, образуют с ней равные накрест лежащие углы.
В плоскости Лобачевского эти признаки не годятся. Оказывается, то, что в плоскости Евклида является достаточным признаком параллельности прямых, в плоскости Лобачевского будет достаточным признаком расходимости прямых. Это можно усмотреть из следующей теоремы.
Теорема. Две прямые, которые при пересечении с третьей образуют равные накрест лежащие или равные соответственные углы, являются расходящимися.

Глава 4.
Две геометрии

Что же такое геометрия Лобачевского? Ответ, конечно всем известен: это геометрия, полученная из геометрии Евклида, изменением одной только аксиомы параллельных. Именно, у Лобачевского принимается за аксиому, что через точку, не лежащую на данной прямой в плоскости, проходит, по крайней мере, две прямые, не пересекающие данную.

Утверждения, или другими словами, теоремы, которые выводятся из, таким образом, измененных оснований геометрии Евклида, и образуют геометрию Лобачевского. Все это, как мы с вами видим, «очень просто», и говорится коротко и ясно. Трудность, однако, в том, о которой вы можете сами теперь сказать, что аксиома Лобачевского не соответствует нашему наглядному представлению. Поэтому и выводы из нее – многие теоремы геометрии Лобачевского – оказываются вовсе странными и невообразимыми. Реальный смысл этой геометрии совершенно не ясен. Сам Лобачевский называл свою геометрию «воображаемой». Он смотрел на нее как на теорию, которая могла бы оказаться приложенной к реальному миру.

Элементарная геометрия состоит из теорем двух родов:

1. Теоремы первого рода – это теоремы, доказывающиеся без привлечения аксиомы параллельных, то есть теоремы, являющиеся следствиями аксиом, входящих, как в систему Евклида, так и в систему Лобачевского. Эти теоремы, следовательно, входят как в геометрию Евклида, так и в геометрию Лобачевского.

Примерами таких теорем могут служить:

а) Внешний угол треугольника больше всякого внутреннего, несмежного с ним

б) Против большей стороны лежит больший угол

в) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны

г) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны

д) Во всякий треугольник можно вписать окружность и другие

Совокупность теорем первого рода иногда называют «абсолютной» геометрией. Об этом говорилось выше.

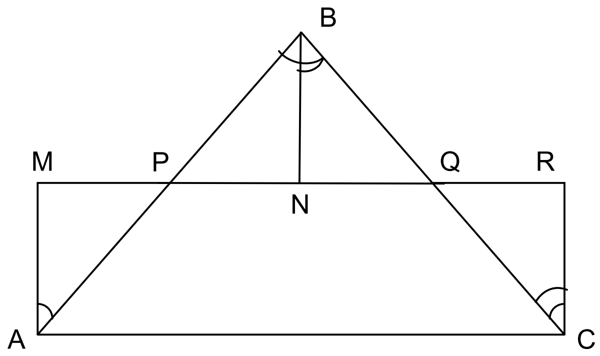
2. Теоремы второго рода – это теоремы, которые не могут быть доказаны без привлечения аксиомы параллельных, то есть не являющиеся следствиями остальных аксиом. Они не имеют места в геометрии Лобачевского. Им в геометрии Лобачевского, естественно, соответствуют предложения, не входящие в геометрию Евклида и доказываемые лишь при помощи аксиомы параллельных Лобачевского.

Приведем пример теорем второго рода в соответствии с теоремами геометрии Лобачевского в виде таблицы[2] .

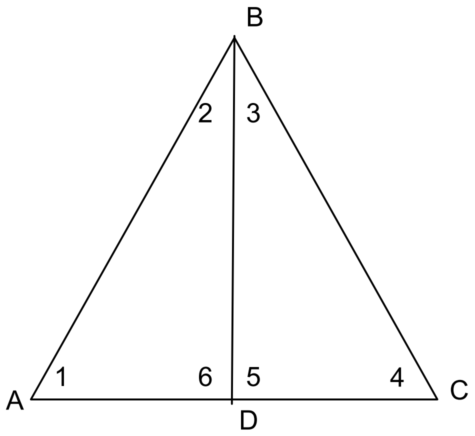
---

[2] Приложение1

С Доказательством теорем геометрии Евклида мы знакомы из школьного курса. Рассмотрим доказательства некоторых теорем, помещенных в таблице.
Теорема 1. Сумма внутренних углов треугольника меньше 180^{o}.
Доказательство:



Через середины AB и BC проведем среднюю линию треугольника PQ.
Из каждой вершины треугольника проведем перпендикуляр на среднюю линию (см.рис.1). Получили пары равных треугольников по гипотенузе и острому углу: ΔAMP=ΔPBN, ΔBNQ=ΔQRC. Следовательно, ∟1=∟2, ∟3=∟4; AM=BN, BN=CR,AM=CR.
Получили четырехугольник AMRC – это четырехугольник Саккери, так как углы при основании MR равны, и AM равна CR. А в геометрии Лобачевского есть теорема о том, что сумма углов, прилежащих к четвертой стороне четырехугольника Саккери меньше 180□, то есть, получаем, что ∟A+∟1+∟C+∟4<180□.
Производя замену углов из равенств ∟1=∟2, ∟3=∟4, получаем, ∟A∟C+∟2+∟3<180□, но сумма второго и третьего углов есть угол B, следовательно, сумма углов треугольника меньше 180□.
После того, как я выяснила, что сумма углов треугольнике меньше 180□, возникает вопрос: является ли эта сумма постоянной величиной независимо от формы и размеров треугольника.
Теорема 2. Сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского есть величина переменная и зависит от формы и размеров треугольника.
Доказательство:
Пусть дан треугольник ABC, в котором проведен произвольный отрезок BD, разбивающий его на два треугольника ABD и BDC .



Теорема доказывается методом от противного.
Допустим, что у всех треугольником в геометрии Лобачевского сумма углов есть постоянная величина.
Обозначим сумму углов данного треугольника Σ_{ABC} и пронумеруем его углы (см.рис.2). Из рисунка видно, что $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=\Sigma_{ABC}+180^\circ$, так как $\angle 5+\angle 6=180^\circ$, но $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=\Sigma_{ABC}+\Sigma_{DBC}$.
Отсюда $\Sigma_{ABC}+\Sigma_{DBC}= \Sigma_{ABC}+180^\circ$.
Принимая во внимание сделанное допущение (сумма углов треугольника – величина постоянная γ), равенство $\Sigma_{ABC}+\Sigma_{DBC}= \Sigma_{ABC}+180^\circ$ перепишется так: $\gamma+\gamma=\gamma+180^\circ$. Решив полученное уравнение относительно γ, получим, что $\gamma=180^\circ$. Это противоречит условию, так как в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше 180°.

Заключение

Как видно из моей исследовательской работы, геометрия Лобачевского очень отличается от геометрии Евклида.

Однако логическая стройность геометрии Лобачевского такая же, как и геометрии Евклида.

В процессе работы изучена литература, связанная с историей математики, с математическим содержанием.

Рассмотренный мною материал могут использовать учителя при проведении факультативных занятий, или частично при проведении уроков геометрии.

Содержащиеся в работе сведения о геометрии Лобачевского дают мне возможность, для рассмотрения в дальнейшем, её практического применения.

Список используемой литературы и источников

1. Александров А. Тупость и гений // Квант. – 1982. - №11, 12
2. Болтянский В. Загадка аксиомы параллельности // Квант. – 1976. - №3
3. Глейзер Г.И. История математики в школе IX-X. – М.: Просвещение, 1983.
4. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. – М.: Наука, 1971.
5. Широков П.А. Краткий очерку основ геометрии Лобачевского. – М.: Наука, 1983.
6. http://www.alleng.ru/d/math/math324.htm
7. http://eek.diary.ru/

Приложение 1

В Геометрии Евклида	В Геометрии Лобачевского
Сумма 3-х углов любого треугольника постоянная и равна 180^o.	Сумма 3-х углов треугольника меняется от треугольника к треугольнику, но всегда меньше 180^o.
Сумма углов всякого выпуклого четырехугольника равна 360^o.	Сумма углов всякого выпуклого четырехугольника меньше 360^o. Так что в частности не существует прямоугольников.
Всякому треугольнику можно построить ему подобный, но не равный треугольник.	Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны (подобие совпадает с равенством).
Вокруг всякого треугольника можно описать окружность.	Вокруг не всякого треугольника можно описать окружность.

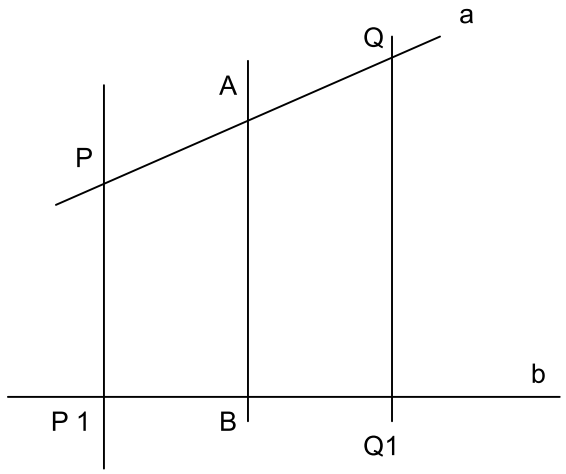
Приложение 2

Задача 1

Пусть AB – общий перпендикуляр двух расходящихся прямых a и b, причем A € a, B € b. Доказать следующие предложения:

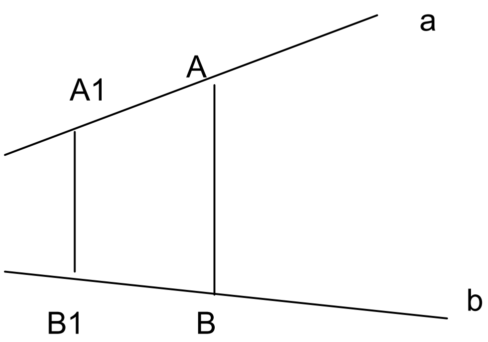
a) если P € a, Q € a, и эти точки симметричны относительно AB, то отрезки перпендикуляров, проведенных из этих точек на прямую b, равны.
b) AB – наименьший из отрезков, соединяющий точки на прямых a и b.

Доказательство: а)



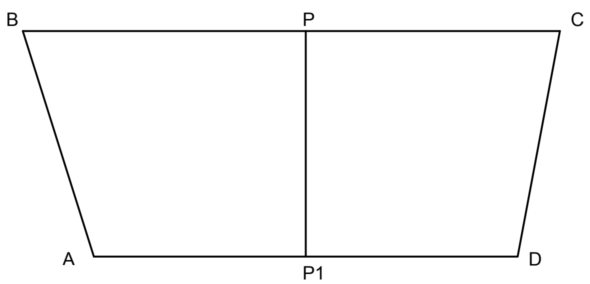
1)PP1Q1Q- двупрямоугольник

P1Q1- основание, PP1 и QQ1 –боковые стороны.
∟P1=∟Q1= 90^0
Нужно показать, что PQQ1P1 –четырехугольник Саккери.
2)AB- ось симметрии, серединный перпендикуляр к отрезку P1Q1, т.е.P1B=BQ1
Рассмотрим симметрию относительно прямой AB:
P симметрична Q, A симметрична A , P1 симметрична Q1, B симметрична B.
Движение сохраняет расстояние, т.е.PP1=QQ1.
b)



Проведем перпендикуляр к b через точку B1 принадлежащей b. B1≠B. Получим двупрямоугольник.
Нужно показать, что он является четырехугольником Саккери.
Допустим, что он действительно четырехугольник Саккери. Тогда углы при стороне AA1 должны быть острые. A из условия ∟A=90˚. Следовательно ∟A<90˚, значит A1B1>AB => AB – наименьший.

Задача 2
Пусть ABCD – четырехугольник Саккери с прямыми углами A и D и боковыми сторонами AB и CD.
Доказать, что основания AD и BC принадлежат расходящимся прямым.
Доказательство:

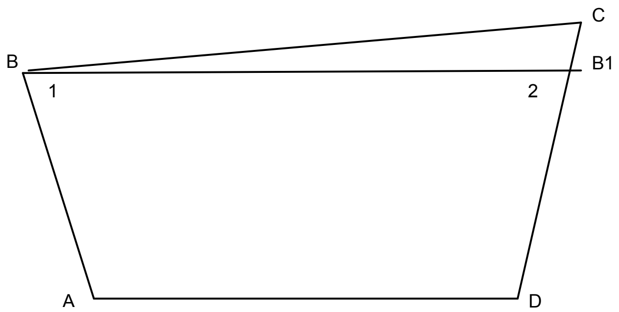


Выберем произвольные точки P и P1 на прямых BC и AD.
Пусть P принадлежит BC, так, что BP=PC; P1 принадлежит AD¸так, что AP1=P1D, тогда прямая PP1 – является серединным перпендикуляром к сторонам BC и AD. PP1 пересекает эти прямые так, что образуются равные

накрест лежащие углы, равные по 90˚. А значит выполняется признак расходимости прямых. Следовательно AD и BC – расходящиеся.

Задача 3

Пусть в четырехугольнике ABCD углы A и D прямые.
Доказать, что если CD>AB, то ∟B>∟C.
Доказательство:



На CD отложим отрезок DB1=AB. Получим четырехугольник Саккери, в нем ∟1=∟2.
Рассмотрим ΔB1BC: угол C – внутренний, ∟2 – внешний, а внешний угол треугольника больше внутреннего с ним не смежного. Следовательно ∟2>∟C, но угол 1 больше угла C, а угол 1 – это часть угла B. Следовательно угол B тем более будет больше угла C.