Краевая научно-практическая конференция учебно-исследовательских и проектных работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Вероятность азартных игр

Звягин Кирилл Владимирович,
8 кл., МБОУ «Лицей №9» г. Перми,

Половникова Галина Евгеньевна,
учитель математики первой категории

Пермь. 2013.

Содержание

Введение

Миры игры и чисел подобны параллельным вселенным из фантастических рассказов: каждый течет в своем направлении, но вместе с тем они взаимно обусловливают друг друга, тесно взаимодействуют. Причем не только математики помогают игрокам, но и наоборот. Если бы не увлеченность человека азартными играми, то современная математика долго находилась бы на том уровне, который занимала во времена Евклида.

Людей всегда интересовало будущее. Человечество во все времена искало способ его предугадать, или спланировать. В разное время разными способами. В современном мире есть теория, которую наука признает и пользуется для планирования и прогнозирования будущего. Речь идет о теории вероятностей.

В жизни мы часто сталкиваемся со случайными явлениями. Чем обусловлена их случайность – нашим незнанием истинных причин происходящего или случайность лежит в основе многих явлений? Споры на эту тему не утихают в самых разных областях науки. Случайным ли образом возникают мутации, насколько зависит историческое развитие от отдельной личности, можно ли считать Вселенную случайным отклонением от законов сохранения?

Люди боятся летать самолетами. А между тем, самое опасное в полете на самолете — это дорога в аэропорт на автомобиле. Но попробуй кому-то объяснить, что машина опасней самолета. Вероятность того, что пассажир, севший в самолет, погибнет в авиакатастрофе, составляет примерно 1/8000000. Если пассажир будет садиться каждый день на случайный рейс, ему понадобится 21 000 лет чтобы погибнуть.

Цели:

- ✓ Расширить и углубить знания по теории вероятностей.
- ✓ Приобрести навыки решения задач по теории вероятностей.
- ✓ Способствовать формированию познавательного интереса.

Задачи:

- Предоставить важную информацию по теории вероятности.
- Решить задачи современных азартных игр.
- Выявить практическую значимость темы.

Глава I. История возникновения теории вероятности.

Теория вероятностей или теория вероятности – это один из разделов Высшей Математики. Это самый интересный раздел Науки Высшая Математика. Теория вероятности, которая являясь сложной дисциплиной, имеет применение в реальной жизни. Теория вероятностей представляет несомненную ценность для общего образования. Эта наука позволяет не только получать знания, которые помогают понимать закономерности окружающего мира, но и находить практическое применение теории вероятности в повседневной жизни. Так, каждому из нас каждый день приходиться принимать множество решений в условиях неопределенности. Однако эту неопределенность можно «превратить» в некоторую определенность. И тогда это знание может оказать существенную помощь при принятии решения. Изучение теории вероятностей требует больших усилий и терпения.

Теперь же давайте перейдем к самой теории и истории ее возникновения. Теория вероятностей — сравнительно молодая ветвь математики. Развитие теории вероятностей, а с нею и развитие понятия вероятности, можно разбить на следующие этапы.

1.С вероятностными представлениями мы встречаемся еще в античности. У Демократа, Лукреция Кара и других античных ученых и мыслителей есть глубокие предвидения о строении материи с беспорядочным движением мелких частиц (молекул), рассуждения о равновозможных исходах и т.п. Еще в древности делались попытки сбора и анализ некоторых статистических материалов – все это (а так же и другие проявления внимания к случайным явлениям) создавало почву для выработки новых научных понятий, в том числе и понятия вероятности. Но античная наука не дошла до выделения этого понятия.

2.Возникновение теории вероятности как науки. К середине XVII в. вероятностные вопросы и проблемы, возникающие в статистической практике, в практике страховых обществ, при обработке результатов наблюдения и в других областях, привлекли внимание ученых, так как они стали актуальными вопросами. В первую очередь этот период связан с именами Паскаля, Ферма и Гюйгенса. В этот период вырабатываются специфические понятия, такие как математическое ожидание и вероятность (как отношение шансов), устанавливаются и используются первые свойства вероятности: теоремы сложения и умножения вероятностей. В это время теорема вероятностей находит применение в страховом деле, демографии, в оценке ошибок наблюдения, широко используя при этом понятие вероятности.

3.Следующий период начинается с появления работы Бернулли "Искусство предположений" (1713 г.), в которой впервые была доказана первая предельная теорема – простейший случай закона больших чисел. К этому периоду, который продолжался до середины XIX в., относятся работы Муавра, Лапласа, Гаусса и др. В центре внимания в это время стоят предельные теоремы. Теория вероятностей начинает широко применяться в различных областях естествознания. И хотя в этот период начинают применяться различные понятия вероятности (геометрическая вероятность, статистическая вероятность), господствующее положение занимает классическое определение вероятности.

4.Следующий период развития теории вероятностей связан прежде всего с Петербургской математической школой. За два столетия развития теории вероятностей главными её достижениями были предельные теоремы, но не были выяснены границы их применения и возможности дальнейшего обобщения. Наряду с успехами были выявлены и существенные недостатки в её обосновании, это выражено в недостаточно четком представлении о вероятности. В теории вероятности создалось положение, когда дальнейшее её развитие требовало уточнения основных положений, усиления самих методов исследования.

Это было осуществлено русской математической школой во главе с Чебышевым, среди её крупнейших представителей Маркова и Ляпунова.

Развитие теории вероятностей в начале XIX в. привело к необходимости пересмотра и уточнения её логических основ, в первую очередь понятия вероятности. Это требовало развития физики и применения в ней вероятностных понятий и аппарата теории вероятностей; ощущалось неудовлетворенность классического обоснования лапласовского типа.

5.Современный период развития теории вероятностей начался с установления аксиоматики (аксиоматика - система аксиом какой-либо науки). Этого в первую очередь требовала практика, так как для успешного применения теории вероятностей в физике, биологии и других областях науки, а так же в технике и военном деле необходимо было уточнить и привести в стройную систему её основные понятия. Благодаря аксиоматике теория вероятностей стала абстрактно-дедуктивной математической дисциплиной, тесно связанной с теорией множеств. Это обусловило широту исследований по теории вероятностей.

Первые работы этого периода связаны с именами Бернштейна, Мизеса, Бореля. Окончательное установление аксиоматики произошло в 30-е годы XX в. Анализ тенденций развития теории вероятностей позволил Колмогорову создать общепринятую аксиоматику. В вероятностных исследованиях аналогии с теорией множеств начали играть существенную роль. Идеи метрической теории функций все глубже стали проникать в теорию вероятностей.

В этот период понятие вероятности проникает почти во все во все сферы человеческой деятельности. Возникают самые различные определения вероятности. Многообразие определений основных понятий - существенная черта современной науки. Современные определения в науке - это изложение концепций, точек зрения, которых может быть много для любого фундаментального понятия, и все они отражают какую-нибудь существенную сторону определяемого понятия. Это относится и к понятию вероятности.

Глава II. История азартных игр.

Многие люди знают о таких вещах как игральные кости, карты, лотерейный билет, и т.д. Каждый человек пытается выиграть, полагается на удачу и везение. Но мало кто знает, что во всех этих играх действует теория вероятности. С помощью этого раздела высший математики можно посчитать вероятность выигрыша или же его проигрыша. Будет смешно видеть человека, который за покерным столом будет сидеть с тетрадью и калькулятором. Поэтому все же приходиться полагаться на «везение фортуны». Дальше я хочу рассказать об истории азартных игр.

Китай, Индия, Древняя Греция, Рим и Египет – нет такой древней цивилизации, которой не оставили бы историкам свидетельств увлечения азартными играми. Игры в кости, домино, карты ………

Родоначальником костей можно считать и астрагалы – путовые суставы животных, и четырёхгранные кубики с углублениями (тоже называвшиеся астрагалами), и пластинки с двумя сторонами, чёрной и белой (как в древнерусской игре «зернь»), даже орехи дерева вибхидака (Индия). Существовали кости и пирамидальной формы – древнейшие из них обнаружены при раскопках в царской гробнице шумерского города Ур (III тысячелетия до нашей эры). Некоторые из древнеегипетских костей величиной были с теннисный мяч и по форме тоже приближались к шару: так много у них было граней!

Наряду с игрой в кости в древней Индии была распространена практика предсказывания будущего на костях, – так называемая рамала: кубической формы кости нанизывались в ряд на ось; вращая кости вокруг оси, получали магические числа, соотносящиеся со страницами гадальных книг.

В Древней Греции кости выбрасывали из специальной кружки: тот, у кого выпадала наибольшая сумма очков, выигрывал. Различные комбинации очков на выброшенных костях носили имена богов, героев, гетер и знаменитых мужей (наихудший бросок назывался «собакой», наилучший – «Афродитой»), могли считаться счастливыми и несчастливыми. Во время пира победителя в игре в кости обычно избирали симпосиархом. Существовали и специальные игорные дома для игры в кости.

В Древнем Риме играли аналогичным способом (броски носили сходные названия). Хотя игра в кости была официально запрещена в Древнем Риме и разрешалась лишь во время праздника Сатурналий, она приобрела исключительную популярность: ею увлекались римские писатели и императоры (император Клавдий даже написал руководство по игре в кости, которое, к сожалению, не сохранилось). Первый известный закон против азартных игр – Lexaleatoria (alea–игральная кость) был утвержден в Риме в III веке до Н. Э. Он запрещал кости – азартные игры и разрешал все остальные: общественные, спортивные, в том числе и гладиаторские.

В Древней Греции и Риме кости использовались также для гадания: их бросали в воду, а также на особые таблицы с пронумерованными советами и изречениями (номера соответствовали выброшенным очкам). Гадающий мог брать в одну руку кость «за себя», другую – «за бога», соотношение очков позволяло установить, утвердительно или отрицательно ответил бог на поставленный вопрос. Гадальные кости посвящались Гермесу (Меркурию).
Многие древние народы, включая североамериканских индейцев, ацтеков, майя, островное население юго-тихоокеанского региона, эскимосов и африканцев, играли в кости, сделанные из разнообразных материалов и обладающие различной формой и маркировкой. Кости изготовлялись из сливовых и персиковых косточек, семян, костей овец, бизонов, карибу, лосей, из оленьих рогов, гальки, керамики, скорлупы грецких орехов, из зубов бобров и сурков.

В эпоху средневековья кости практически постоянно находились под официальным запретом: Оттон Великий в 952 год запретил играть в кости духовенству, Генрих II Английский в 1188 г. - крестоносцам. Запретительные акты неоднократно издавались в течение. XII-XIV вв.

Запреты не мешали играм в кости оставаться любимым времяпрепровождением в замках и городских домах: играли обычно тремя костями (согласно Исидору Севильскому, три кости обозначают настоящее, прошлое и будущее), которые бросались на деревянную или мраморную доску.

Попытки средневековой идеологии истолковать игры в кости в духе христианской символики также несут на себе печать двойственности. В игре, изобретенной епископом Вибальдом из Камбре (X в.) с целью отучить монахов от азартной игры на деньги, комбинации величин на костях обозначают христианские добродетели: 1. 1. 1 -любовь, 1. 1. 2 - вера, 1. 2. 4 - целомудрие и Т. д. Монах, «выигравший» высшие добродетели, облекался правом обучать им остальных монахов. Епископ Герберт, впоследствии папа римский Сильвестр II, изобрел ритмомахию - игру, похожую на шахматы, в которой вместо фигур играли костями с очками.

Игра в домино, которую частенько еще пренебрежительно именуют «козлом» или «забиванием козла», так прочно и уютно прижилась в наших дворах, что с трудом верится в ее древнюю и благородную историю.

Есть версия, что игру в домино создали монахи-доминиканцы. Во-первых, так называлась одежда духовных лиц – преимущественно черный плащ с капюшоном. Во-вторых, само название игры в домино происходит от латинского корня «dominans», что означает – господствующий, главный и является началом обращение в католической мессе: «Dominusvobisit» (Господь, да пребудет с вами). Выдвинуто предположение, что в домино зашифрована господствующая система устройства мироздания – универсальный закон Гармонии макро- и микрокосмоса: игра в домино имеет семь цифровых знаков (от 0 до 6), что символизирует, в частности, семь планов бытия и семеричное строение Вселенной.

Люди очень давно играют в рулетку. С тех самых пор, когда в Монте-Карло появились европейские казино. Нам известны два варианта происхождения колеса фортуны. Согласно версии номер один, колесо изобрел математик Блез Паскаль в 1655 году. Правда, его задачей было придумать приспособление не для проведения времени за азартными играми, а для изучения вероятностей. По второй теории рулетка пришла к нам из древнего Китая. Существует версия, что китайцы имели обыкновение играть на досуге в игру под названием «Магическая площадь», используя при этом фигурки 37 животных. В Китай приехал французский проповедник, увидел игру и придумал закрепить статуэтки на колесе, а потом и вовсе заменить их цифрами.

По одному из предположений, первые карты с фигурами появились в Китае в VII–VIII веках. Изготавливались они с помощью гравировки изображения на хлопчатой бумаге.

Карты делились на две неравные части: вверху – цитата из какой-либо пьесы, внизу – сценка, иллюстрирующая цитату. Следовало верно соединить текст и иллюстрации. В XII веке в Китае появились и игральные карты, где фоски отсутствовали: в колоде из 36 карт существовало 4 масти. Девять карт каждой масти имели свой титул (по восходящей) согласно титулам государственных чиновников в Китае. Эти карты уже использовались и для игры, и для гадания.

Существует легенда о том, что карты современного вида введены в употребление французским живописцем XIV века, королевским шутом Сакменом Грэн Гоннером, будто бы придумавшим их для забавы слабоумного короля Карла VI и усовершенствовавшим их при Карле VII. Но и эта версия неудовлетворительна, так как существует документальное упоминание о появлении карт в Италии еще раньше.

Сохранились итальянские карты, гравированные на меди в Падуе, Венеции или Флоренции в 1845 году; их приписывают резцу известных граверов – Мантеньи или Финигуэрры. Карты эти отличаются очень тонким красивым рисунком, прекрасною гравировкой, отчетливого, хотя несколько бледною печатью. Величиною они 9 дм в длину и 3,5 в ширину. Испанцы пристрастились к игре в карты не менее, чем итальянцы; спутники Колумба, устроив первое европейское поселение на острове Сан-Доминго, прежде всего занялись фабрикацией карт из пальмовых листьев...

Однако в XV веке во французских картах устанавливается тот тип, который ныне находится в повсеместном употреблении: четыре масти — черви (coeur), бубны (carreau), трефы (trefle) и пики (pique). Трудно решить первоначальные формы этих мастей: сердца, бубенчики, желуди и листья плюща — в Германии или Франции; несомненно, что формы эти являются во многих готических орнаментах. По одному из предположений четыре масти французских карт изображают собой четыре главнейших предмета рыцарского обихода: трефы — эмблема меча, пики – копья, бубны – знамена или гербы, червы – щиты.

Так как против карточных игр постоянно издавались строгие законы, ремесло выделки карт во Франции было только терпимо, фабриканты их причислялись к цеху бумагоделателей и рисовальщиков. Только в 1581 году образовалась корпорация карточных фабрикантов, существовавшая до 1789 года. В XVII столетии законы против игроков были особенно строги.

Все домохозяева, в квартирах которых играли в брелан, или игорную «академию», объявлялись лишенными гражданских прав и изгонялись из города; карточные долги и всякие обязательства по ним законом не признавались; отцы имели право взыскивать по суду деньги с тех, кому дети их проигрывали какую-нибудь сумму.

Современный мир не утратил интереса к азартным играм. Карты, домино, игровые автоматы, различные лотереи – это все можно отнести к азартным играм. Жажда быстрого обогащения толкает людей на риск: либо выиграть, либо все проиграть. Самые простые расчеты выигрыша в азартных играх показывают, как мала вероятность удачи.

Глава III. Вероятность азартных игр.

Мы узнали историю азартных игр. Теперь давайте попробуем совместить столь разные вещи, как азартные игры и теория вероятности. Решим, можно ли с помощью вероятности стать победителем.

Иногда в задачах число элементарных исходов бывает так велико, что выписать их все не представляется возможным. Поэтому применяются формулы из комбинаторики:

1) $n! = 1*2*3*4\dots * n$

$5! = 1*2*3*4*5 = 120$

$P_n = n!$ – Перестановки.

2) $A_n^k = n!/(n-k)!$ - Размещения (порядок важен)

$A_{30}^2 = 30!/(30-2)! = \frac{30!}{28!} = \frac{1*2*3*4*5\dots\dots 27*28*29*30}{1*2*3*4*5\dots\dots *27*28} = 29*30 = 870$

3) $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)*k!}$ – Сочетания (порядок не важен)

$C_{30}^2 = \frac{30!}{28!*2!} = \frac{29*30}{1*2} = 29*15 = 435$

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события А при проведении некоторого испытания называют отношение числа исходов, в результате которых наступает событие А, к общему числу всех равновозможных между собой исходов этого испытания.

$P(A) = N(A)/N$

Будем различать достоверные и невозможные события. По определению, их вероятности соответственно равны 1 и 0.

Для нахождения вероятности случайного события А при проведении некоторого опыта следует:

1) Найти число N всех возможных исходов данного опыта;
2) Принять предположение о равно вероятности всех этих исходов;
3) Найти количество N(A) тех исходов опыта, в которых наступает событие А;
4) Найти частное N(A):N; она и будет равна вероятности события А

Теперь рассмотрим задачи, где мы можем применить нашу теорию.

Задача №1.

Бросается игральная кость. Чему равны вероятности следующих событий:

A={выпала грань с 6 очками},

B={выпала грань с четным числом очков},

C={выпала грань с числом очков, делящимся на 3}?

Решение: *1)*N = 6. Событию A благоприятствует один исход (6), событию B - три исхода (2, 4, 6), событию C - два исхода (3, 6). Таким образом:

N(A) = $\frac{1}{6}$; N(B) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; N(C) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

Задача № 2

Бросается игральная кость трижды. Комбинация (1, 1, 1) в древности обозначала любовь. Найти вероятность выпадения этой комбинации.

Решение: N = 6 * 6 * 6 = 216, N(A) = 1, P(A) = $\frac{1}{216}$

Ответ: $\frac{1}{216}$.

Задача № 3.

Из колоды в 36 карт случайным образом одновременно вытаскивают 3 карты. Какова вероятность того, что среди них нет пиковой дамы?

Решение. У нас имеется множество из 36 элементов. Мы производим выбор трех элементов, порядок которых не важен. Значит, возможно, получение N = C_{36}^{3} исходов. Будем действовать по классической вероятностной схеме, т. е. предположим, что все эти исходы равновероятны. Среди всех N = C_{36}^{3} исходов нам следует сосчитать те, в которых нет пиковой дамы (событие A). Отложим даму пик в сторону, и из оставшихся 35 карт будем выбирать 3 карты. Получатся все интересующие нас варианты. Значит, N(A) = C_{35}^{3}.

Осталось вычислить нужную вероятность по классическому определению:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{35!}{3!*32!} : \frac{36!}{3!*33!} = \frac{35!*33!}{32!*36!} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}.$$

Ответ: $\frac{11}{12}$.

Задача № 4.

Из колоды карт вытянули 4 туза и 4 короля. Эти карты перемешали и разложили в ряд. Какова вероятность, что все 4 короля окажутся рядом?

Решение. Обозначим событием A – все 4 короля окажутся рядом. Всего 8 карт. Эти элементы отличаются порядком расположения, следовательно, представляют собой перестановки из 8 элементов. P! = 8! Если 4 короля расположены рядом и 4 туза участвуют в перестановках, то P! = 5! Все исходы события A N = 8! Благоприятные исходы N(A) = 5! Значит,

P(A) = 5!/8!= 1/6∗7∗8= 1/336.

Ответ: $\frac{1}{336}$

Задача № 5.

При игре в покер из колоды в 52 карты игроку выдаётся 5 карт. Какова вероятность того, что игрок получит комбинацию из одной тройки (три карты одной номинации) и одной двойки (две карты одной номинации). (Такая комбинация называется *fullhouse*).

Решение: В колоде из 52 карт 13 номинаций. Три карты одной номинации выберем $13*C_4^3$ способами. Две карты одной номинации - $12*C_4^2$ способами. Число всех благоприятных исходов - $13C_4^3 *12C_4^2$. Число всех исходов - .

$$N = \frac{13C_4^3 \cdot 12C_4^2}{C_{52}^5} = \frac{3744}{2598960} = 0{,}00144$$

Ответ: 0,00144.

Я провел небольшой эксперимент:

Купил четыре лотерейных билета, чтобы посчитать вероятность выигрыша в этих лотереях.

Задача № 6.

Найти вероятность выигрыша в лотерее «Железнодорожная».

Тираж этой лотереи 1000000. Значит, N = 1000000. В тираже разыгрываются призы: 250000, 50000, 10000, 5000, 3000, 200, 100, 50, 40, 20 рублей. Всего – 10. Значит, N(A) = 10.

P(A) = 10/1000000=0,00001 .

Ответ: 0,00001 .

Задача № 7.

Найти вероятность выигрыша в мультилотерее «Деньги».

Тираж этой лотереи 1000000. Значит, N = 1000000. В тираже разыгрываются призы: 10, 20, 50, 100, 300, 500, 1000, 2000, 5000, 50000, 5000000 рублей. Всего – 11. Значит, N(A) = 11.

P(A) = $\frac{11}{1000000}$ = 0,000011

Ответ: 0,000011.

Задача № 8.

Найти вероятность выигрыша в лотерее «Исполнение желаний».

Тираж этой лотереи 1000000. Значит, N = 1000000. Если угадать 1 букву в лотерее, то количество выигрышей 400000.

P(A) = $\frac{400000}{1000000} = 0{,}04$

Выигрыш –1-ком. квартира в Москве 1 билет.

P(A) = 1/1000000=0,000001

Ответ: 0,04; 0,000001.

Задача № 9.

Найти вероятность выигрыша в лотерее «Золотой ключ»

В IV туре этой лотерее выигрывают билеты, в которых зачеркнуты 30 чисел двух билетов.

N = 90*89*88…..*60 = $A_{90}^{30} = \frac{90!}{60!}$

N(A) = $C_{90}^{30} = \frac{90!}{30!*60!}$

P(A) = $\frac{N(A)}{N} = \frac{90!}{30!*60!} : \frac{60!}{90!} = \frac{1}{30!}$

Ответ: $\frac{1}{30!}$.

Заключение.

Изучая тему «теории вероятности в жизни», я понял, что это огромный раздел науки математики. И изучить его в один заход невозможно. Перебрав множество фактов из жизни, и проведя эксперименты в домашних условиях, я понял, что действительно теория вероятности – интересная наука. Вероятность события в жизни очень редко считается по формулам, скорее интуитивно. Но проверить, совпадает ли «эмпирический анализ» с математическим, иногда очень полезно.

Можем ли мы предугадать с помощью этой теории, что случится с нами через день, два, тысячу? Конечно, нет. Событий, связанных с нами в каждый момент времени, очень много. Только на одну лишь типизацию этих событий не хватит и жизни. А уж их совмещение — и вовсе гиблое дело. С помощью этой теории предугадывать можно лишь однотипные события. Например, бросание монеты — это событие из 2 вероятностных результатов. В общем, прикладное применение теории вероятностей связанно с немалым количеством условий и ограничений. Для сложных процессов сопряжено с вычислениями, которые под силу лишь компьютеру.

Но следует помнить, что в жизни есть ещё такое понятие как удача, везение. Это то, что мы говорим – повезло, когда, например, какой-нибудь человек не учился никогда, никуда не стремился, лежал на диване, играл в компьютер, а через 5 лет мы видим, как у него берут интервью на MTV. У него была вероятность 0.001 стать музыкантом, она выпала, ему повезло, такое совпадение обстоятельств. То, что мы называем – оказался в нужном месте и в нужное время, когда срабатывают те самые 0.001.

Азартные игры были во все времена. Человек каждый раз принимает решение: играть или нет. Манит, привлекает азартная игра быстрым обогащением, крупным выигрышем. Но, как мы видим, вероятность выигрыша очень мала.

Таким образом, мы учимся принимать решения, которые могут повысить вероятность выполнения наших желаний и стремлений, каждый случай может добавить те заветные 0.001, которые сыграют решающую роль в итоге.

Литература

1. Еженедельная учебно-методическая газета «Математика» №15, 16-22 апреля 2004 года Издательский дом «Первое сентября».
2. Еженедельная учебно-методическая газета «Математика» №16, 23-30 апреля 2004 года Издательский дом «Первое сентября».
3. Еженедельная учебно-методическая газета «Математика» №17, 1-7 мая 2004 года Издательский дом «Первое сентября».
4. А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. События. Вероятности. Статистическая обработка данных. 7-9 классы. «Мнемозина», М. 2005 г.
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 2006 г.;
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. М: Высшая школа, 1998 г.;
7. Гнеденко Б.В. Очерк по теории вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2009 г.;

8. Майстров Л.Е. Развитие теории вероятностей. М.:Наука, 1980 г.;
9. Майстров Л.Е. Теория вероятностей. Исторический очерк. М.: Наука, 1967 г.