Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 9-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Лента Мёбиуса как элемент топологического пространства

Илларионова Дарья Ивановна,

11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,

Боркова Ольга Владимировна,

учитель математики высшей категории.

Пермь. 2014.

Оглавление

Введение

Топология – одна из молодых ветвей геометрии. Она является одним из самых абстрактных разделов современной науки. Примерно за сто лет её существования в ней достигнуты результаты, важные для многих разделов математики.

Геометрия школьного курса рассматривает в основном свойства фигур, связанные с понятием длины, площади, объёма – то есть метрическими свойствами. Топология же является разделом геометрии, изучающим свойства фигур, которые могут быть установлены без измерения и сравнения величин, но при этом имеют геометрический смысл.

В моей работе представлена лента Мёбиуса как элемент топологического пространства. Я рассмотрела применение ленты в современной технике, в науке и даже в художественной литературе.

В ходе работы я изучила историю возникновения топологии как науки, топологические свойства ленты Мёбиуса, провела различные эксперименты с ней. Основной целью для меня было построение графика ленты Мёбиуса в трёхмерном пространстве и рассмотрение задачи о нахождении наименьшей длины прямоугольника шириной 1, из которого можно свернуть ленту.

Топология как наука

В начале XX века возникла наука, называемая топологией. Топологию можно назвать «геометрией на резиновой поверхности». Меньше чем за 100 лет в ней произошли открытия, которые оказались очень важными для многих разделов математики.

Слово «топология» произошло из древне-греческого языка и дословно переводится как «учение о месте» (от др.-греч. τόπος — место и λόγος — слово, учение). «Это раздел математики, изучающий топологические свойства фигур, то есть свойства, не изменяющиеся при любых деформациях, производимых без разрывов и склеиваний.»[1] До сих пор этой науке нет широкого применения. Теоремы топологии, хотя они и доказаны достаточно строго, не находят таких же прямых приложений, как теоремы геометрии.

Одна из теорем, например, утверждает, что для правильной раскраски плоской карты (раскраска считается правильной, если области, имеющие общую границу, не окрашены в один цвет) достаточно не более 5 красок. Теорема не говорит о том, как правильно раскрасить карту 5 красками, но утверждает, что это можно сделать. Согласно другой теореме, как бы энергично мы ни размешивали чай ложечкой, в любой момент времени по крайней мере одна точка в жидкости остается в покое.

История развития

Раздел математики, который мы теперь называем топологией, берёт свое начало с изучения некоторых задач геометрии. Различные источники указывают на первые топологические по духу результаты в работах Ньютона, Эйлера, Жордана, Кантора, Пуанкаре, однако классическое определение топологии встречается уже в 1842 (или 1834) г. у Листинга: «Под топологией будем понимать учение о модальных отношениях пространственных образов, или о законах связности, взаимного положения и следования точек, линий, поверхностей, тел и их частей или их совокупности в пространстве, независимо от отношений мер и величин».

Лента Мёбиуса

Лента (или лист) Мёбиуса – наглядный пример топологического пространства.

Лента Мёбиуса – это поверхность, получающаяся при склеивании двух противоположных сторон AB и A_1B_1 прямоугольника ABB_1A_1 так, что точки A и B совмещаются соответственно с точками B_1 и A_1.[2](*Рис.1*)

Рис.1

Лента Мёбиуса топологически не то же самое, что цилиндрическая лента, склеенная из той же полоски. Она имеет только один край. Поскольку количество краёв – топологическое свойство, а цилиндрическая лента имеет два края, эти две ленты топологически неэквивалентны.

Известно ещё одно свойство ленты Мёбиуса – то, что она имеет лишь одну сторону. Цилиндрическую ленту можно раскрасить двумя цветами – одну сторону красным, другую синим. Проделать то же самое с лентой Мёбиуса не удастся.

Свойство односторонности трудно описать математически строго и в то же время наглядно. Лента Мёбиуса не имеет толщины, и каждая её точка находится «на» обеих сторонах, подобно тому как каждая точка плоскости лежит «на» обеих её сторонах. В топологии эта лента рассматривается как некое пространство, а не как подмножество евклидова пространства, и тогда не совсем очевидно, является ли количество сторон топологическим свойством.

Лента Мёбиуса была открыта независимо немецкими математиками Августом Фердинандом Мёбиусом и Иоганном Бенедиктом Листингом в 1858 году. В Евклидовом пространстве существуют два типа полос Мёбиуса в зависимости от направления закручивания: правые и левые (топологически они, однако, неразличимы).

Свойства ленты Мёбиуса

1. Если разрезать ленту вдоль по линии, равноудалённой от краёв, вместо двух лент Мёбиуса получится одна длинная двухсторонняя (вдвое больше закрученная, чем лента Мёбиуса) лента, которую называют «Афганская лента» (*Рис. 2, а*). Если теперь эту ленту разрезать вдоль посередине, получаются две ленты, намотанные друг на друга (*Рис. 2, б*).

Рис. 2, а

Рис. 2, б

2. Если разрезать ленту Мёбиуса, отступая от края приблизительно на треть её ширины, то получаются две ленты, одна — более короткая лента Мёбиуса, другая — длинная лента с двумя полуоборотами (афганская лента), сцепленные друг с другом (*Рис. 3*).

Рис. 3

3. Другие комбинации лент могут быть получены из лент с двумя или более полуоборотами в них. Например, если разрезать ленту с тремя полуоборотами (*Рис. 4, а*), то получится лента, завитая в узел трилистника (*Рис. 4, б*). Разрез ленты с дополнительными оборотами даёт неожиданные фигуры, названные парадромными кольцами.

Рис. 4, а *Рис. 4, б*

Это общеизвестные свойства ленты Мёбиуса. Существуют и другие, менее известные:

4. Если склеить ленту Мёбиуса не из одной, а из двух полосок бумаги (*Рис. 5 а, б*), предварительно уложив их в стопку, то получится афганская лента (*Рис. 5, в*), которую можно сложить обратно в псевдоленту Мёбиуса (*Рис. 5 г*).

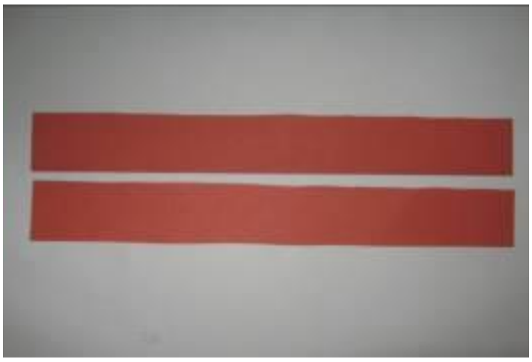

Рис. 5, а *Рис. 5, б*

Рис. 5,в *Рис. 5, г*

Из опыта (1) известно, что Афганская лента получается при разрезании ленты Мёбиуса по средней линии. Эта лента, полученная при разрезании, так же просто складывается в подобие кольца Мёбиуса. Т.е., разрезав ленту Мёбиуса по средней линии и получив Афганскую ленту, её можно сложить в псевдоленту Мёбиуса (*Рис. 5, д*).

Рис. 5, д

5. Если склеить ленту Мёбиуса из трёх полосок бумаги (*Рис. 6, а, б*), то получится афганская лента и лента Мёбиуса, сцепленные друг с другом (*Рис. 6, в*). Такой же результат получился при опыте (2). Аналогично опыту (4) эту конструкцию можно сложить обратно в псевдоленту, но уже из трёх полосок (*Рис. 6, г*).

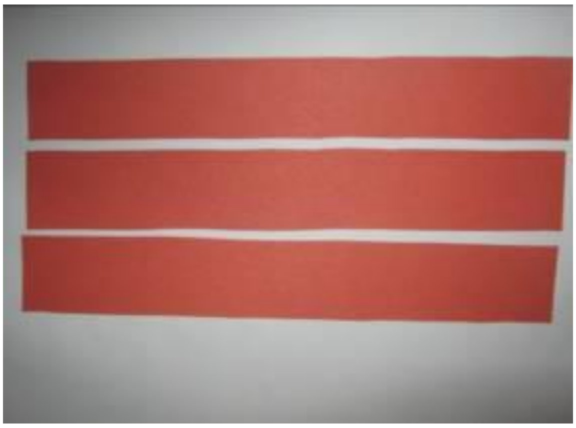

Рис. 6,а

Рис. 6, б

Рис. 6, в

Рис. 6, г

Разрезав эту псевдоленту, отступая на треть от края, можно получить конструкцию, из которой, сложив её обратно, складывается псевдолента уже из большего количества полосок. Так можно продолжать большое количество раз. В любом случае в конце опыта получится псевдолента Мёбиуса, сложенная из нескольких слоёв афганской ленты и одной ленты Мёбиуса посередине.

Из этого опыта следует вывод, что нельзя создать две, параллельные друг к другу, односторонние поверхности.

6. Лента Мёбиуса является торовой поверхностью. Обклеим её поверхность бумажными кольцами (*рис. 7, а*). Из опыта видно, что лента не делит внутренний объём тора на два изолированных друг от друга объёма. Другими словами: из любой точки, находящейся внутри тора со встроенной в него лентой Мёбиуса, можно попасть в любую другую точку внутри, не пересекая плоскость ленты и поверхность тора. Для наглядности этого вывода я продела нитку через кольца, сделав это последовательно, не пересекая саму ленту (*Рис. 7, б*).

Рис. 7, а

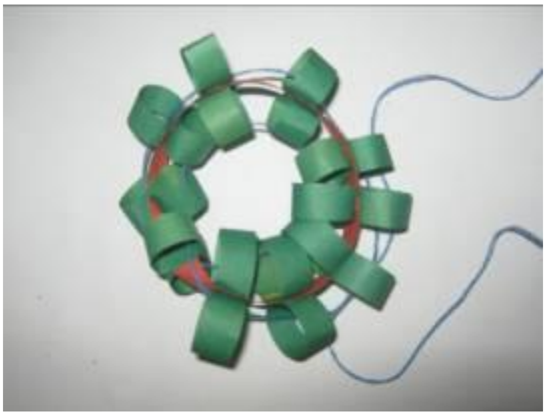

Рис. 7, б

7. Лист Мёбиуса – неориентируемая поверхность с краем.

8. Ленту Мёбиуса можно поместить в евклидово (трёхмерное) пространство R^3 с границей, являющейся идеальным кругом. Пусть C будет единичным кругом в плоскости xy в R^3. Соединив диаметрально противоположные точки на C под углами λ и $\lambda+\pi$ дугой круга, получим, что для λ между 0 и $\pi/2$ дуги лежат выше плоскости xy, а для других λ ниже (причём в двух местах дуги лежат в плоскости xy).

Способы представления листа Мёбиуса

Одним из способов представления листа Мёбиуса как подмножества трёхмерного пространства является параметризация, о которой говорилось в восьмом свойстве[3]:

x (u,v)= (1 + v/2 cos u/2) cos u

y (u,v)= (1 + v/2 cos u/2) sin u

z (u,v)= v/2 sin u/2,

где $0 \le u \le 2\pi$ и $-1 \le v \le 1$. Эти формулы задают ленту Мёбиуса ширины 1, чей центральный круг имеет радиус 1, лежит в плоскости xy с центром в (0,0,0). Параметр u пробегает вдоль ленты, в то время как v задаёт расстояние от края.

В данной таблице я провела расчёты, позволяющие начертить ленту Мёбиуса.

	-1	**- √3/2**	**- √2 /2**	**-1/2**	**0**	**1/2**	**√2 /2**	**√3/2**	**1**
0	(0,5; 0; 0)	(0,57; 0; 0)	(0,65; 0; 0)	(0,75; 0; 0)	(1; 0; 0)	(1,25; 0; 0)	(1,35; 0; 0)	(1,43; 0; 0)	(1,5; 0; 0)
π/3	(0,28; 0,49; -0,25)	(0,31; 0,54; -0,22)	(0,35; 0,60; -0,18)	(0,39; 0,68; -0,13)	(0,5; 0,87; 0)	(0,61; 1,05; 0,13)	(0,65; 1,13; 0,18)	(0,69; 1,19; 0,22)	(0,72; 1,24; 0,25)
π/2	(0; 0,65; -0,35)	(0; 0,69; -0,31)	(0; 0,75; -0,25)	(0; 0,82; -0,18)	(0; 1; 0)	(0; 1,18; 0,18)	(0; 1,25; 0,25)	(0; 1,31; 0,31)	(0; 1,35; 0,35)
2π/3	(-0,38(-0,375); 0,65; -0,43)	(-0,39; 0,68; -0,38)	(-0,41; 0,71; -0,31)	(-0,44; 0,76; -0,22)	(-0,5; 0,87; 0)	(-0,56; 0,97; 0,22)	(-0,59; 1,02; 0,31)	(-0,61; 1,05; 0,38)	(-0,63(-0,625); 1,08; 0,22)
π	(-1; 0; -0,5)	(-1; 0; -0,43)	(-1; 0; -0,35)	(-1; 0; -0,25)	(-1; 0; 0)	(-1; 0; 0,25)	(-1; 0; 0,35)	(-1; 0; 0,43)	(-1; 0; 0,5)
4π/3	(-0,625; -1,08; -0,43)	(-0,61; -1,05; -0,375)	(-0,59; -1,02; -0,31)	(-0,56; -0,97; -0,22)	(-0,5; -0,87; 0)	(-0,44; -0,76; 0,22)	(-0,41; -0,71; -0,31)	(-0,39; -0,68; 0,375)	(-0,375; -0,65; 0,43)
3π/2	(0; -1,35; -0,35)	(0; -1,31; -0,31)	(0; -1,25; -0,25)	(0; -1,18; -0,18)	(0; -1; 0)	(0; -0,82; 0,18)	(0; -0,75; 0,25)	(0; -0,69; 0,31)	(0; -0,65; 0,35)
5π/3	(0,72; -1,24; -0,25)	(0,69; -1,19; -0,22)	(0,65; -1,13; -0,18)	(0,61; -1,05; -0,125)	(0,5; -0,87; 0)	(0,39; -0,68; 0,125)	(0,35; -0,60; 0,18)	(0,31; -0,54; 0,22)	(0,28; -0,49; 0,25)
2π	(1,5; 0; 0)	(1,43; 0; 0)	(1,35; 0; 0)	(1,25; 0; 0)	(1; 0; 0)	(0,75; 0; 0)	(0,65; 0; 0)	(0,57; 0; 0)	(0,5; 0; 0)

Для проверки правильности построения я построила ленту на сайте[4], просто введя уравнения (*Рис. 8*).

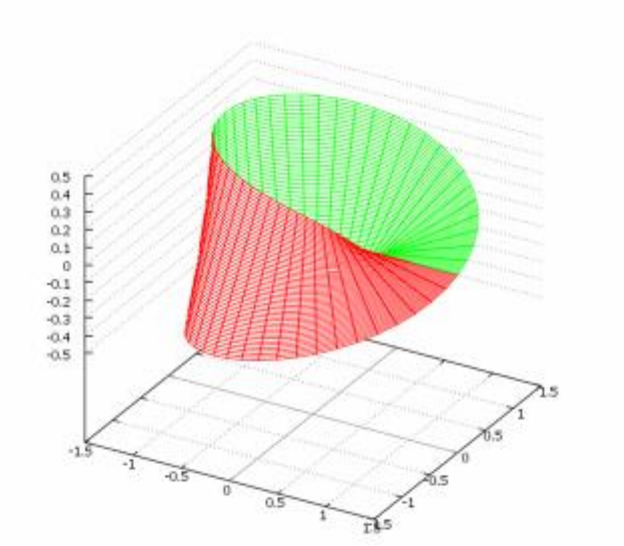

Рис. 8

Применение

Свойства ленты Мёбиуса широко используются в технике. За последнее время в разных странах было выдано более ста патентов и авторских свидетельств на её использование. Полоса ленточного конвейера выполняется в виде ленты Мёбиуса, что позволяет ему работать дольше, потому что вся поверхность ленты изнашивается равномерно. Также в системах записи на непрерывную плёнку применяются ленты Мёбиуса (чтобы удвоить время записи). Во многих матричных принтерах красящая лента также имеет вид листа Мёбиуса для увеличения её ресурса. Форму ленты имеют лопасти бетономешалки, миксера, вследствие чего энергозатраты уменьшаются на 1/5. Американские горки также имеют форму ленты Мёбиуса.

Широкое применение нашла лента и в научной фантастике. По одной из теорий писателей (а также и физиков-теоретиков) наша вселенная представляет собой подобие ленты Мёбиуса. Также, существует гипотеза, что молекула ДНК является фрагментом ленты. Более того, такая структура логично объясняет наступление биологической смерти – спираль замыкается сама на себя и происходит самоуничтожение.

Задача о ленте Мёбиуса

Каково минимальное λ такое, что из прямоугольника с меньшей стороной 1 и большей стороной λ можно свернуть несамопересекающуюся ленту Мёбиуса (бумагу мять не разрешается)?

Ограничения на размеры листа, из которого склеивается лента Мёбиуса, имеются только, если его нельзя мять. В случае смятия можно сделать ленту даже из такого прямоугольника, в котором длина меньше ширины (имеется в виду длина ленты Мёбиуса). Для этого нужно сложить его «гармошкой» вдоль ширины чётное количество раз (*рис.9,а*), а затем, после склеивания (*рис.9, б*), развернуть (*рис.9, в*).

Рис.9, а

Рис. 9, б

Рис.9, в

Гораздо сложнее решается задача, в которой прямоугольник нельзя мять, а разрешается лишь изгибать его. Понятно, что чем больше его длина, тем проще будет склеить ленту. Следовательно, существует такое число λ, что из полоски длины больше λ можно сделать ленту Мёбиуса, а из полоски длины меньше λ – нельзя. При этом наличием склеиваемого участка ленты мы пренебрегаем, считая, что края склеиваются стык в стык.

Для начала нужно понять математический смысл требования «не сминать бумагу». Изгибающиеся, но несмятые поверхности называют развёртывающимися. Существует теория развёртывающихся поверхностей, в которой мы рассмотрим следующие свойства[5]:

1. Через каждую точку А развёртывающейся поверхности, не лежащую на её границе, проходит лежащий на её поверхности отрезок, не кончающийся в А. Такой отрезок называется образующей поверхности.

2. Если через точку А, не лежащую на границе поверхности, проходят две различные образующие, причём А не является концом ни одной из них, то достаточно маленький кусок поверхности, окружающий А, является плоским. В таком случае точка А называется плоской.

3. Если точка А, не лежащая на границе поверхности, является концом какой-нибудь образующей а, то через точку А проходит единственная не кончающаяся в ней образующая b, которая разделяет поверхность на две части: с той стороны от образующей b, с которой находится образующая а, к образующей b прилегает плоский кусок, с другой стороны от b, сколь угодно близко от точки А, имеются неплоские точки. В таком случае точка А называется полуплоской.

Если точка поверхности не является ни граничной, ни плоской, то через неё проходит единственная не кончающаяся в ней образующая, причём концы этой образующей лежат на границе поверхности.

Точки, лежащие на границе области плоских точек, являются либо граничными для всей поверхности, либо полуплоскими.

Перейдём непосредственно к нахождению λ.

1. Теорема 1: $\lambda \geq \pi/2$.

Пусть лента Мёбиуса сделана из бумажной полоски длины *l*. Намотаем на неё длинную бумажную ленту. Если пренебрегать толщиной бумаги, то лента будет составлена из прямоугольников равной длины, каждый из которых принимает форму самой ленты. Отметим на этой ленте прямые образующие и плоские точки. Учитывая, что на практике длина ленты *l* любая, а мы ищем минимальную *l*, рисунок 10, а приблизителен.

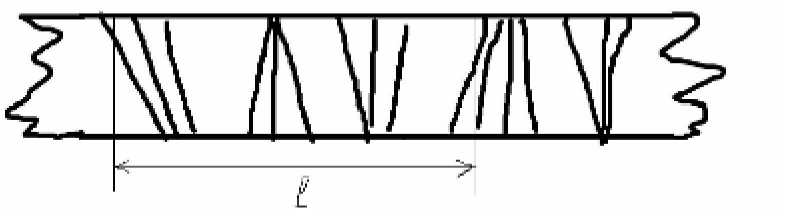

Рис. 10, а

Рисунок повторяется с периодом 2l (через каждое l он «переворачивается»). Области плоских точек представляют собой четырёхугольники (треугольники).

Рассмотрим образующую AB (она может быть любой) (*Рис. 10, б*). Если её симметрично отразить через среднюю линию полоски («перевернуть») и переместить, скажем, вправо, то получится отрезок CD (*Рис. 10, б*), который также является одной из образующих (*рис. 9*).

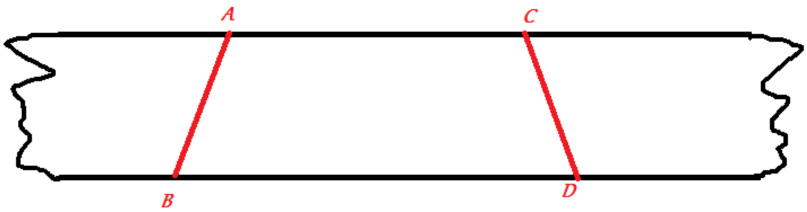

Рис. 10, б

AC+BD=2*l* (*Рис. 10, в*).

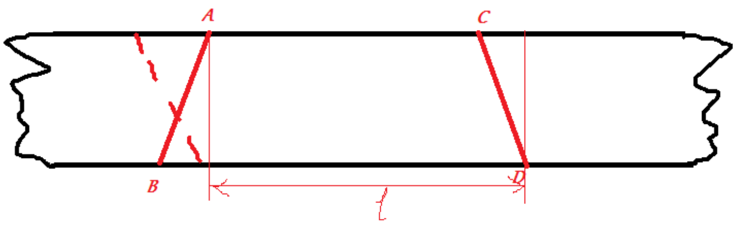

Рис. 10, в

При наматывании длинной ленты на лист Мёбиуса образующие AB и CD займут одинаковое положение, причём A совместится с D, а B с C, отрезки AB и CD создадут в пространстве угол в 180º.

Между AB и CD бесконечное количество образующих. При движении этих образующих от AB к CD угол, который они образуют в пространстве, непрерывно меняется от 0º до 180º.

Возьмём любое число n и найдём между AB и CD такие образующие A_1B_1, …, $A_{1-n}B_{1-n}$, что величина угла между AB и A_kB_k равна k*180/n (точки A_1, A_2 и т. д. лежат между A и C, а точки B_1, B_2 и т. д. соответственно между B и D). Длина каждой из образующих больше или равна 1, а величина угла между двумя соседними образующими не менее 180/n.

Каждая из сумм $AA_1 + BB_1$, $A_1A_2 + B_1B_2$ и т. д. не меньше длины a_{2n}, где a_{2n} – это сторона правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность радиуса 1.

На рисунке 11 отрезки A_kE и $A_{k+1}B_{k+1}$ равны по длине, параллельны и направлены в одну сторону, кроме того, $A_kF=A_kH=1$и FG//EB_k (считаем, что $A_{k+1}B_{k+1} < A_kB_k$). Мы видим, что $A_kA_{k+1}+B_kB_{k+1} = EB_{k+1} + B_kB_{k+1} \geq EB_k \geq FG \geq FH \geq a_{2n}$ (A_kA_{k+1}, B_kB_{k+1}, EB_{k+1} – длины изображенных на рисунке 11 криволинейных отрезков; предпоследнее неравенство следует из того, что угол FHG > 90º , а последнее - из того, что угол $FA_kH \geq 180º/n$).

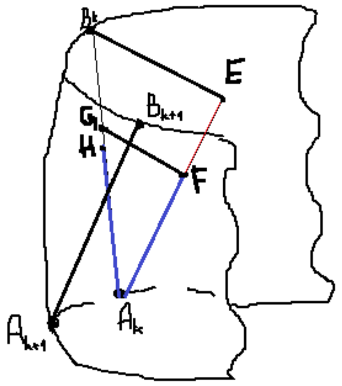

Рис.11

Таким образом, $2l$ = AC + BD = ($AA_1 + BB_1$) + ($A_1A_2 + B_1B_2$) + … ≥ na_{2n}, следовательно, $2l$ при любом n не меньше половины периметра правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Значит, $2l$ не меньше половины длины самой этой окружности, то есть π, $l \geq \pi/2$.

2. Теорема 2: $\lambda \leq \sqrt{3}$.

Предположим, что $\lambda = \sqrt{3}$. Тогда на полоске, из которой мы склеиваем ленту, можно расположить два равносторонних треугольника (*Рис. 12*). Перегнём полоску по линиям этих треугольников, чередуя направление сгиба. Края AB и CD совместятся, при этом A совместится с D, а B с C. Получится лента Мёбиуса.

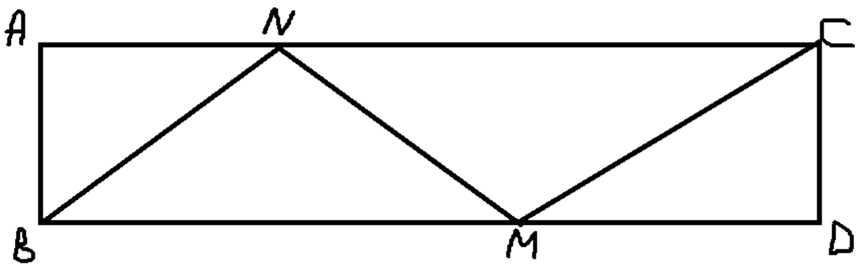

Рис. 12

Однако было нарушено главное правило: не мять бумагу. Но учитывая, что если взять длину немногим больше $\sqrt{3}$, то изломы можно заменить изгибами (этого нельзя сделать, когда линии сгиба пересекаются).

Так как мы ищем наименьшее λ, то в данном случае $\lambda \leq \sqrt{3}$

Таким образом, задача решена: $\pi/2 \leq \lambda \leq \sqrt{3}$.

Существует и ещё одна задача, решение которой позволяет найти формулу листа Мёбиуса, получающегося путём складывания плоского листа бумаги. Она была недавно решена, однако решение не описывается алгебраической формулой, и маловероятно, что такая форма вообще существует.

Заключение

В результате выполнения данной работы я разобралась в том, что такое топология, рассмотрела ленту Мёбиуса как элемент топологического пространства. Также, я рассмотрела свойства ленты, провела различные эксперименты с ней. Кроме того, я выяснила, как решать задачи по этой теме. И, наконец, я построила график ленты Мёбиуса в трёхмерном пространстве.

Свойства ленты Мёбиуса широко используются в повседневной жизни: конвейеры в магазинах самообслуживания, лопасти миксера, даже американские горки – всё это имеет форму ленты. Я считаю, что дальнейшее изучение этой темы может привести ко многим открытиям, полезным для человечества. Меня заинтересовала теория о том, что ДНК по структуре похоже на ленту Мёбиуса. Я считаю, что если попробовать разобраться в этой теме, то можно узнать много полезного для человека. Возможно, что свойства ленты Мёбиуса помогут продлевать человеческую жизнь. В дальнейшем я планирую глубже изучить данную теорию.

Примечания

[1] – Советский Энциклопедический словарь под ред. Прохорова А. М. М.: Советская Энциклопедия. 1983. С. 1336

[2] – Советский Энциклопедический словарь под ред. Прохорова А. М. М.: Советская Энциклопедия. 1983. С. 775

[3] – Лента Мёбиуса//Википедия. 19.06.2013 *http://ru.wikipedia.org/wiki/Лента_Мёбиуса/*

[4] – *http://grafikus.ru/plot3d/*

[5] – Фукс Д. Лента Мёбиуса // Квант. 1979. №1. С. 4.

Список использованной литературы

1. Кордемский Б. А. Топологические опыты своими руками // Квант. 1974. №3. С.73-75
2. Лента Мёбиуса//Википедия. 19.06.2013, 28.08.2013, 13.10.2013, 12.01.2014, 10.02.2014. *http://ru.wikipedia.org/wiki/Лента_Мёбиуса/*
3. Язык пространства: топология//Наука и человек. 19.06.2013, 12.01.2014. *http://mashinku.ru/язык-пространства-топология/*
4. Прасолов В. В. Наглядная Топология. М.: МЦНМО. 1995. 111 с.
5. Советский Энциклопедический словарь под ред. Прохорова А. М. М.: Советская Энциклопедия. 1983. 1599 с.
6. Таллер А. Сюрпризы листа Мёбиуса// Квант. 1978. №6. С. 28-31
7. Фукс Д. Лента Мёбиуса// Квант. 1979. №1. С.2-9