Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 9-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Принцип Дирихле

Комягин Максим Михайлович,
8 кл., МАОУ «Лицей №1», г. Кунгур,
Горбунова Надежда Сергеевна,
учитель математики.

Пермь. 2014.

Содержание

Введение... 3

II. Основная часть

2.1. Принцип Дирихле.. 4

2.2. Обобщенный принцип Дирихле... 7

2.3. Принцип недостаточности.. 11

2.4. Раскраска.. 14

2.5. Авторские задачи.. 18

III. Заключение... 20

Список литературы.. 21

Приложение.. 22

I. Введение

Математика - древняя наука. Она существовала и была актуальна ещё до нашей эры, остаётся таковой и сейчас. За время развития математики было создано много теорий, правил, формул с целью решения задач различными способами. Одним из ведущих математиков, работавших над исследованием разных способов решения задач, является немецкий математик Иоганн Петер Густав Лежён Дирихле (13 февраля 1805, Дюрен, Французская империя, ныне Германия — 5 мая 1859, Гёттинген, королевство Ганновер, ныне Германия) . Он внёс существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел. Являлся членом Берлинской и многих других академий наук, в том числе Петербургской. Дирихле принадлежат крупные открытия в самых разных областях математики, а также в механике и математической физике. Он вывел множество формул и принципов решения задач. Одни из них так и называется - Принцип Дирихле [7].

Цель работы: рассмотрение принципа Дирихле и аналогичных ему принципов, изучение задач с использованием данных принципов.

Задачи работы:

1. Изучить научную литературу по данной теме.
2. Познакомиться с различными вариациями принципа Дирихле.
3. Рассмотреть способы решения задач на данный принцип.
4. Научиться решать задачи на принцип Дирихле.
5. Определить значимость принципов Дирихле для решения математических задач.

II. Основная часть

2.1. Принцип Дирихле

Знаете ли вы, что среди зрителей, сидящих в Большом театре во время спектакля, обязательно есть люди, родившиеся в один и тот же день одного и того же месяца? Подсчитаем: в зале большого театра 2000 мест. И даже если не все они заполнены (что в этом знаменитом театре бывает нечасто), можно смело утверждать, что на спектакле собралось более 366 человек. Но 366 - это максимально возможное число дней в году, считая 29 февраля. Итак, для 367-го зрителя просто не остаётся свободной от дней рождений его соседей по залу даты в году.

Просто? Тем не менее это рассуждение даже имеет своё название в математике: **принцип Дирихле** (в честь немецкого математика Иоганна Петера Густава Лежёна Дирихле). По традиции принцип Дирихле почему-то всегда объясняют на примере кроликов в клетках: если общее число кроликов больше числа клеток, в одной из этих клеток наверняка сидит более одного кролика[5].

Также этот принцип может выглядеть следующим образом: в n клетках невозможно рассадить поодиночке n+1 кроликов, т.е найдётся клетка, где сидят не менее двух кроликов[3] .

Этот принцип можно сформулировать в терминах отображений между множествами: при отображения множества P, содержащего n+1 элементов, в множество Q, содержащее n элементов, найдутся два элементы множества P, имеющие дин и тот же образ[1].

Таким образом, чтобы применить принцип Дирихле к решению задач, надо указать, что принимать за "клетки", а что за "кроликов", а также указать способ, которым надо усаживать "кроликов" в "клетки". В терминах отображений между множествами это означает , что надо указать не только множества P и Q, но и задание отображение между ними.

Задача 1. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа: -1, 0 и 1. Рассмотрим восемь сумм: суммы трёх чисел в каждой строке, в каждом столбце и по двум диагоналям. Могут ли быть все эти суммы различны?

Решение. Предположим, что "клетками" будут все различные значения всех трех чисел, каждое из которых принимает значение 0, 1 или -1. Этих значений будет 7: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. А "кроликами" будут наборы из трёх чисел, расположенные в одном столбце, или в одной строке, или по одной из двух диагоналей таблицы. Рассаживаем кроликов в клетки , где значение суммы равно сумме чисел этого "кролика"-набора. Тогда согласно принципу Дирихле найдётся "клетка", где сидят не менее двух кроликов. А это значит, что найдутся две рассматриваемые тройки чисел, для которых суммы равны. Итак, все суммы различными быть не могут[2,с19].

Задача 2. Шесть школьников съели семь конфет. Докажите, что один из них съел не менее двух конфет[6].

Решение. Возьмём за "клетки" школьников, а за "кроликов" конфеты. Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдётся школьник, который съел хотя бы две конфеты.

Задача 3. В классе 15 учеников. Найдется ли месяц, в котором отмечают свои дни рождения не меньше, чем два ученика этого класса ?

Решение. Пусть "клетками" будут месяцы, а "кроликами" - ученики. Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдётся месяц, в котором отмечают свои дни рождения хотя бы два ученика[6].

Задача 4. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

Решение. Примем за "клетки" количество иголок. Всего "клеток" будет 600001 (0,1,2,...600000). А за "кроликов" ёлки. Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдутся две ёлки имеющие одинаковое количество иголок[4,с2].

Задача 5. Из любых трёх целых чисел можно выбрать два, сумма которых чётна. Докажите это[6].

Решение. За "клетки" примем чётность чисел, их две (чётные числа и нечётный). За "кроликов" - числа. Используя принцип Дирихле получим, что в какой-то из двух "клеток" будет по одинаковому числу "кроликов". Это означает, что найдутся два числа одинаковой чётности. А если имеется два числа одинаковой чётности, то сумма этих чисел будет чётной.

В выше представленных задачах нужно было только найти что принять за "кроликов", а что за "клетки", и применит принцип Дирихле. В следующей задаче надо не только найти что принять за "кролики" и за "клетки", но и найти верное количество клеток.

Задача 6. Докажите, что в Вашем классе найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей среди своих одноклассников[6].

Решение. Предположим, что в классе 30 человек, тогда за "кроликов" возьмём учеников, а за "клетки" количество друзей. Друзей у каждого человека может быть 0,1,...,29 т.е. у нас получится 30 "клеток". Но "клетки" 29 и 0 одновременно существовать не могут т.к. если человек имеет 29 друзей, то каждый из его друзей будет иметь хотя бы одного друга, значит всего может быть 29 "клеток" (0,1,...,28 или 1,2,...,29). Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдутся два человека имеющие одинаковое число друзей.

Можно сделать вывод, что в задачах на принцип Дирихле надо правильно распределить что будет "кроликами", а что "клетками". Также чтобы решить задачу на принцип Дирихле, надо найти правильное число "кроликов"и" клеток" исходя из условия задачи.

2.2. Обобщенный принцип Дирихле

Чаще всего в задачах применяется не Принцип Дирихле, а некоторое его свойство, которое называется обобщённый принцип Дирихле.

Рассмотрим задачи с применением не принципа Дирихле, а некоторого его обобщения, которое сформулировано ниже, и которое обычно встречается в задачах.

Обобщение принципа Дирихле: даны n клеток и nk + 1 кроликов размещены в эти клетки. Тогда найдется клетка, где сидят не менее k + 1 кроликов[4,с1].

Задача 1. В классе учится 29 человек. Саша Иванов допустил в диктанте 13 ошибок, и никто другой не сделала большего числа ошибок. Доказать, что по крайней мере трое учащихся сделали одинаковое число ошибок[4,с1].

Решение. Примем за "клетки" всевозможные варианты количества ошибок. Их 14, так как школьники могут сделать 0, 1, ..., 13 ошибок. А за "кроликов" примем школьников, которые писали диктант. Их по условию 29. Каждого из них сажаем в клетку, которая соответствует количеству ошибок сделанных им. Тогда получим, что найдётся "клетка", в которой сидят по меньшей мере три "кролика", а это и означает , что найдутся трое школьников, сделавших одинаковое число ошибок.

Задача 2. В пяти классах школы учатся 160 человек. Доказать, что найдутся 4 человека, у которых день рождения приходится на одну и туже неделю[4,с1].

Решение. В году может быть максимально 53 недели. Их и примем за "клетки" а, за "кроликов" приме ребят. Рассаживаем "кроликов" по тем "клеткам", которые соответствуют их дням рождения. В силу принципа Дирихле найдётся "клетка" по меньшей мере с четырьмя "кроликами", а это и означает, что найдётся неделя, когда день рождения сразу у четырёх человек.

Задача 3. У человека на голове не более 400000 волос, в Москве более 8 млн. жителей. Докажите, что найдутся 20 москвичей с одинаковым числом волос[6].

Решение. По условию на голове у каждого из москвичей может быть от 0 до 400000 волос имеем всего 400001 возможность. Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда лысых москвичей найдется не более 19, имеющих 1 волос тоже не более 19, ..., имеющих 400000 волос тоже не более 19. Но тогда всего москвичей не более $19 \times 400001 = 7600019$, что меньше 8 миллионов противоречие.

При решении задач с использованием принципа Дирихле можно поступать двояко:

1) Допускать противное и вычисляем, сколько необходимо значений. Сравнивая с данными условиями, приходим к противоречию (задачи 1, 2).

2) Выбирать, что принять за "клетки" и что взять за "кроликов". Применяя непосредственно принцип Дирихле, устанавливаем существование того, что искали (задача 3).

Также с помощью принципа Дирихле можно решать задачи, в которых надо достать какое либо количество предметов разного цвета или типа (например: пары носков или перчаток разных цветов). Данные задачи приведены ниже.

Задача 4. В ящике лежат 10 пар чёрных и 10 пар красных перчаток одного размера. Сколько перчаток надо вытащить из ящика наугад, чтобы наверняка среди них были:

а) Две перчатки одного цвета;

б) Одна пара перчаток одного цвета;

в) Одна пара перчаток разных цветов[4, с2]?

Решение. а) Если за "клетки" принять цвета перчаток, то, взяв любые три печатки, получится, что в одной из "клеток" находятся два "кролика"-перчатки. А это и требуется.

б) Можно взять 20 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать одноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 21. Доказать, что число 21 является искомым.

Примем за "клетки" цвета перчаток (их два). В качестве "кроликов" возьмём перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из "клеток" будет не меньше 11 "кроликов". Это означает, что найдётся 11 перчаток одного цвета. Но имеется только 10 пар перчаток одного цвета, поэтому все они не могут быть на одну руку. Значит, среди этих 11 перчаток найдётся одна пара перчаток одного цвета.

в) Можно взять 20 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать разноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 21. Доказать, что число 21 является искомым.

Из всех перчаток можно составить разноцветные пары. Разделим пары на две группы. В первую группу будут входить пары у в которых правая перчатка чёрная, а левая красная. Во вторую группу - пары у в которых правая перчатка красная, а левая чёрная. Эти группы и будут "клетками", а "кроликами" будут перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из "клеток" будет не меньше 11 "кроликов". Это означает, что найдётся 11 перчаток из одной группы. Но имеется только 10 пар перчаток данной группы, поэтому все они не могут быть на одну руку или одного цвета. Значит среди этих 11 перчаток найдётся пара перчаток разных цветов.

Задача 5. Возникает вопрос: а если добавить к этим перчаткам ещё 10 пар белых перчаток? Какое количество перчаток нужно было бы тогда вытащить, чтобы среди них наверняка были:

а) Две перчатки одного цвета;

б) Одна пара перчаток одного цвета;

в) Одна пара перчаток разных цветов?

Решение. а) Если за "клетки" принять цвета, а за "кроликов" перчатки, то, выбирая 4 любых "кролика"-перчатки, получится, что в одной "клетке" находится по крайней мере два "кролика". Значит, искомое число равно 4

(Ясно, что из трёх разноцветных перчаток нельзя найти двух перчаток одного цвета).

б) Можно взять 30 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать одноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 31. Доказать, что число 31 является искомым.

Примем за "клетки" цвета перчаток (их три). В качестве "кроликов" возьмём перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из "клеток" будет не меньше 11 "кроликов". Это означает, что найдётся 11 перчаток одного цвета. Но имеется только 10 пар перчаток одного цвета, поэтому все они не могут быть на одну руку. Значит, среди этих 11 перчаток найдётся одна пара перчаток одного цвета.

в) Можно взять 30 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать разноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 31. Доказать, что число 31 является искомым.

Из всех перчаток можно составить разноцветные пары. Разделим пары на три группы. В первую группу будут входить пары в которых правая перчатка чёрная, а левая любого другого цвета. Во вторую группу - пары в которых правая перчатка красная, а левая любого другого цвета. В третью группу - пары в которых правая перчатка белая, а левая любого другого цвета. Эти группы и будут "клетками", а "кроликами" будут перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из "клеток" будет не меньше 11 "кроликов". Это означает, что найдётся 11 перчаток из одной группы. Но имеется только 10 пар перчаток данной группы, поэтому все они не могут быть на одну руку или одного цвета. Значит среди этих 11 перчаток найдётся пара перчаток разных цветов.

Чаще в задачах применяется обобщённый принцип Дирихле. С помощью данных принципов можно решать различные задачи в том числе и задачи на вытягивание предметов. Задачи на данные принципы можно решать и методом от противного.

2.3. Принцип недостаточности

У принципа Дирихле есть аналогичные ему принципы. Таковым является принцип недостаточности. Судя по названию эта формула основывается на недостаточности какого-то количества предметов. Так и есть. Ниже приведена формула принципа недостаточности и её доказательство.

Если разместить не более $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ кроликов в n клеток , то найдутся хотя бы две клетки, в которых сидят по одинаковому числу кроликов[4,с2].

Доказательство. Допустим, что в каждой из n клеток по разному числу кроликов. Это означает, что во всех этих клетках находится не менее 0+1+2+...+n - 1 кроликов. Подсчитаем эту сумму. Для этого будем складывать пары 0+n-1, 1+n-2, 2+n-3... . Замечаем, что сумма этих пар постоянна и равна n - 1. Количество пар равно $\frac{n}{2}$, если n чётное; если же n-нечётное, то можем рассматривать только $\frac{n-1}{2}$ пар и прибавить к ним средний член, который равен $\frac{n-1}{2}$. В сумме получается число, не зависящее от чётности n, и оно равно $\frac{(n-1)}{2} \times n$, т.е. кроликов должно быть больше чем у нас есть. Значит сделанное предположение неверно, т.е. найдутся две клетки, где сидят по одинаковому числу кроликов.

Задача 1. 15 мальчиков собрали 100 орехов. Доказать, что два из них собрали одинаковое число орехов (каждый набрал хотя бы по одному ореху).

Решение. Принимая за "клетки" корзинки мальчиков, за "кроликов" - орехи и применяя принцип недостаточности (n=15), получаем, что в каких-то двух "клетках" находится по равному числу кроликов. Это и означает, что найдутся два мальчика, которые собрали по одинаковому числу орехов[6].

Задача 2. а) У 21 мальчика имеется 200 орехов. Доказать, что как бы они не разделили их, найдутся два мальчика, которым досталось поровну орехов(может оказаться, что орехов им не досталось совсем) [4,с2].

б) Пусть дано k орехов. Какому минимальному числу мальчиков можно раздать эти орехи так, чтобы наверняка нашлось двое, которым их досталось поровну.

Решение. а) Принимая за "клетки" мальчиков, а за "кроликов" орехи и применяя принцип недостаточности (n=21), получаем, что в каких-то двух "клетках" находится по равному числу кроликов. Это и означает, что найдутся два мальчика, которые собрали по одинаковому числу орехов.

б) Проанализируем её условие. Пусть n мальчиков имеет по разному числу орехов. Тогда, как было уже установлено при доказательстве принципа недостаточности, они должны были собрать не менее чем $\frac{n(n-1)}{2}$ орехов. По условию задачи имеется k орехов. Значит, $k \geq \frac{n(n-1)}{2}$ орехов, то между n мальчиками можно разделить орехи так, чтобы никаким двум из них не досталось орехов поровну. Если же $k < \frac{n(n-1)}{2}$, то обязательно найдутся двое, которым орехов досталось поровну. Итак, остаётся поместить число k между двумя такими числами (они называются треугольными), чтобы выполнялись неравенства:

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq k < \frac{n(n+1)}{2}$$

Тогда для n мальчиков условие задачи не будет выполняться, а для n+1 уже будет, значит, n+1 - это и есть искомое количество мальчиков.

Задача 3. В районе 15 школ. Докажите, что как бы не распределяли между ними 90 компьютеров, обязательно найдутся две школы получившее одинаковое количество компьютеров (возможно - ни одного).

Решение. Принимая за "клетки" школы района, а за "кроликов" компьютеры, которые распределили между школами, применяя принцип недостаточности (n=15), получаем, что в каких-то двух "клетках" находится по равному числу кроликов. Это и означает, что найдутся две школы, которые получили по одинаковому числу компьютеров[4,c2].

Данный принцип является аналогом принципа Дирихле. С помощью него можно решать задачи, в которых нужно найти два предмета, у которых имеется по одинаковому числу чего-либо. А также для решения задач на данный принцип можно использовать его доказательство.

2.4. Раскраска

Ещё один аналог принципа Дирихле - это раскраска. В этой главе будет браться какое-либо поле и его надо будет или раскрасить, или найти какую-либо не закрашенную фигуру, или же расставить какое-либо количество точек или фигур на данном поле.

Задача 1. Каждая грань куба раскрашена в чёрный или белый цвет. Доказать, что найдутся одинаково раскрашенные грани, имеющие общее ребро.

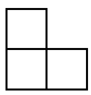
Решение. Рассмотрим любую вершину куба. В ней пересекаются три грани. Примем за "клетки" цвета, а за кроликов грани, пересекающиеся в одной вершине (их три). Поэтому согласно принципу Дирихле найдутся два "кролика" в одной "клетке", а это и означает, что найдутся две грани имеющие общее ребро (так как они имеют общую точку) и окрашенные одинаково[4,с2].

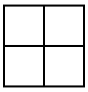
Формула раскраски. Если рассадить n кроликов в n-1 клеток, то найдётся по крайней мере одна свободная клетка.

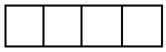
Также может использоваться и другая формулировка: если число клеток больше числа кроликов, то как минимум одна клетка пуста[8].

Задача 2. В квадрате составленном из 100 клеток, закрашено менее 50. Доказать, что на не закрашенные клетки можно положить кость домино, покрывающую ровно две клетки[4,с3].

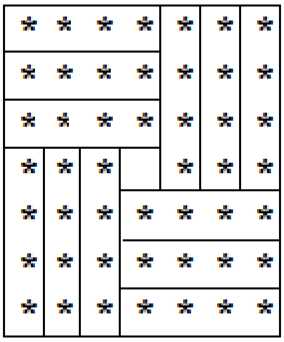
Решение. Чтобы не было свободной пары клеток, в любой строке должно быть не менее пяти закрашенных клеток. Значит всего должно быть не менее закрашенных 50 клеток, чтобы было невозможно выделить свободный участок 1×2. Поскольку закрашенных клеток менее 50, в силу предложения 1 такой участок существует.

Задача 3. На шахматной доске 8×8 расставлена 31 фигура. Доказать, что найдётся свободный треугольник  из трёх клеток[4,с3].

Решение. Чтобы не было свободного треугольника, в любом прямоугольнике 2×2  должны быть заняты две клетки, чтобы в него нельзя уже было поместить треугольник. Так как всю доску можно покрыть 16 неперекрывающимися квадратиками 2×2, то всего фигур должно быть 32, а по условию их всего 31. Значит, согласно предложению 1 найдётся квадратик 2×2, в котором окажется только одна фигура, а в ней и содержится свободный треугольник.

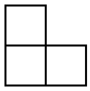
Задача 5. Игра "Морской бой" происходит в квадрате 7×7. Какое наименьшее количество выстрелов надо сделать, чтобы наверняка "ранить" четырёхпалубный корабль, если он имеет вид  [4,с3]?

Решение. Всего имеется 49 клеток. В них можно разместить не более 12 непересекающихся корабликов вида 1×4 (на рисунке они помечены звёздочками), например так:



Значит надо провести не менее 12 выстрелов, чтобы ранить четырёхпалубный корабль. Однако можно, произведя 12 выстрелов, добиться того, чтобы в оставшееся клетки нельзя было поместить четырёхпалубный корабль. Например так:

			*			
*				*		
	*				*	
		*				*
			*			
*				*		
	*				*	

Задача 5. В квадрате 5×5 закрашено 16 клеток. Доказать, что найдётся закрашенная фигура - треугольника вида  .

Решение. Предположим, что в данном квадрате нет закрашенных фигур указанного типа. Тогда в любом квадратике 2×2 закрашено не менее двух клеток. Рассмотрим отмеченный звёздочками квадрат:

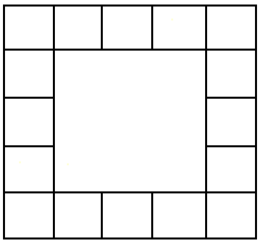
*	*	*	*	
*	*	*	*	
*	*	*	*	
*	*	*	*	

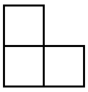
Так как в нём нет закрашенных треугольников, то в отмеченных звёздочками клетках - не более 8 закрашенных клеток; значит, вне его не менее 8 закрашенных клеток[4,с3].

Рассмотрим другой квадрат:

	*	*	*	*
	*	*	*	*
	*	*	*	*
	*	*	*	*

Здесь по аналогичным причинам вне отмеченных звёздочками клеток окажется не менее 8 закрашенных клеток. Значит в граничном "поясе"



будет не менее 14 закрашенных клеток. Всего в нём 16 клеток, поэтому один из четырёх треугольных углов, т.е. фигура вида  , будет закрашена.

Идея решения приведённых задач заключалась в нахождении "клеток", т.е. участков, в которых количество закрашенных клеток было постоянным (или ограничено некоторой константой). Этими участками без наложений их друг на друга можно было полностью покрыть рассматриваемую плоскость, что давало необходимые для решения задачи оценки.

Рассмотрим ещё один приём.

Задача 6. В клетки прямоугольника 5×41 раскрашены в два цвета. Доказать, что можно выбрать три строки и три столбца так, чтобы все 9 клеток, стоящие на пересечение этих строк и столбцов, были одного цвета[4,с3].

Решение. Получим, что в любом из столбцов будет не менее трёх клеток одного (из двух) цветов. Можно воспользоваться принципом Дирихле, приняв за "клетки" цвета, а за "кроликов" - столбцы; "кролика" сажаем в ту "клетку", которая соответствует цвету большинства его раскрашенных клеток. Тогда получим, что в 21 столбце (из 41) будет по три раскрашенные одним цветом клетки (допустим - первым) . В каждом из этих столбцов три раскрашенные клетки можно расположить 10 способами. Снова в силу принципа Дирихле получаем, что в трёх столбцах (из 21) закрашенные клетки будут располагаться одинаково. Проведём прямые через эти столбцы и через три одинаково закрашенные клетки. Эти 9 клеток пересечения и будут искомыми.

В раскраске могут быть как задачи в которых данную плоскость можно покрыть заданными участками без наложений, так и в которых можно покрыть с наложениями. И данные задачи решаются с помощью принципа Дирихле и раскраски.

2.5. Авторские задачи

В данной главе будут рассмотрены задачи, разработанные автором самостоятельно с использование принципа Дирихле и аналогичных ему принципов. Для составления данных задач недостаточно взять любые числа, необходимо продумать соотношение исходных данных.

Задача 1. В саду растёт 10 яблонь. Общее количество яблок на них 43. Доказать, что найдётся две яблони на которых растут по одинаковому числу яблок (на каждом дереве растёт хотя бы по одному яблоку).

Решение. За "клетки" примем яблони, а за кроликов яблоки. Применяя принцип недостаточности получим, чтобы не было двух "клеток", в которых сидят по одинаковому числу "кроликов", всего "кроликов" должно быть не менее 44. По условию задачи их 43, значит найдутся две "клетки" в которых сидят по одинаковому числу кроликов. А это и означает, что в саду растёт две яблони имеющие по одинаковому числу яблок.

Задача 2. На улице 30 домов. В одном из них живёт пять человек, а в любом другом не более пяти человек (в каждом доме живёт хотя бы один человек). Доказать, что найдутся 8 домов в которых живут по одинаковому числу человек.

Решение. За "клетки" примем количество человек, живущих в каждом доме (их 4), а за "кроликов" - количество домов на улице (их 29 так как дом в котором живут пять человек учитывать не будем, потому что такой дом всего один). Применяя обобщенный принцип Дирихле, получим, что в одной из "клеток" будет не менее 8 "кроликов", а это и значит, что найдётся 8 домов, в которых живёт одинаковое количество человек.

Задача 3. На информационном носителе 7 папок и всего в них 8 документов. Доказать, что найдётся папка, в которой хранятся два документа.

Решение. Пусть "кроликами" будут документы, а "клетками" - папки. Применяя принцип Дирихле получим, что в одной из "клеток" будет не менее двух "кроликов". А это значит, что найдётся папка, в которой хранятся два документа.

Задача 4. В тире стреляли в квадрат 5×5, и произвели 24 выстрела. Найдётся ли в этой фигуре квадрат 1×1, в котором нет дырки от пули?

Решение. Всего без наложений квадрат 5×5 можно покрыть 25 квадратиками 1×1. Возьмём за "клетки" квадратики 1×1 (их 25), а за "кроликов" - выстрелы (их 24). Применяя формулу раскраски получим, что по крайней мере одна из "клеток" будет свободна. А это и значит, что найдётся квадратик 1×1, в котором нет дырки от пули.

Данные задачи можно использовать на уроках занимательной математики. Также можно предложить учащимся самим составить задачи, т.к. данная деятельность способствует не только более детальному пониманию принципа Дирихле, но и развитию логического мышления, сообразительности, творческому подходу к решению математических вопросов.

III. Заключение

В ходе работы были изучены различные научные материалы на принцип Дирихле, решено много интересных задач. Автор познакомился с различными вариациями принципа Дирихле. Это такие принципы как раскраска и принцип недостаточности. В ходе исследовательской работы были рассмотрены разные способы решения задач на данные принципы. Автор приобрел опыт решения данных задач, некоторые из них были взяты из олимпиад краевого уровня. Также мной было придумано несколько простых задач на эти принципы. Все поставленные в ходе исследования цели и задачи были достигнуты.

Материал данного реферата в дальнейшем поможет учащимся разных классов при решении задач на принцип Дирихле и аналогичные ему принципы. Использованные в реферате задачи и их решения являются прекрасным практическим материалом для подготовки к олимпиадам и другим математическим конкурсам. Также эти данные можно использовать на уроках занимательной математики, что позволит развивать у ребят логическое мышление.

Список литературы

1) Бородин А.И., Бугай А.С. Биографический словарь деятелей в области математики. - Киев, Радяньская школа, 1979

2) Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад - М., Наука, 1975

3) Большая российская энциклопедия - М.,

4) Математика// Первое сентября, 1996, № 7

5) Я познаю мир: Дет. энцикл. Математика.- М.:ООО "Издательство АСТ-ЛТД", 1999

Интернет - источники:

6) http://www.mccme.ru/courses/dirihle.html.

7) http://ru.wikipedia.org/wiki/ Дирихле_Петер_Густав_Лежён

8) http://ru.wikipedia.org/wiki/Принцип_Дирихле

Приложение

Задача 1. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа: -1, 0 и 1. Рассмотрим восемь сумм: суммы трёх чисел в каждой строке, в каждом столбце и по двум диагоналям. Могут ли быть все эти суммы различны?

Решение. Предположим, что "клетками" будут все различные значения всех трех чисел, каждое из которых принимает значение 0, 1 или -1. Этих значений будет 7: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. А "кроликами" будут наборы из трёх чисел, расположенные в одном столбце, или в одной строке, или по одной из двух диагоналей таблицы. Рассаживаем кроликов в клетки , где значение суммы равно сумме чисел этого "кролика"-набора. Тогда согласно принципу Дирихле найдётся "клетка", где сидят не менее двух кроликов. А это значит, что найдутся две рассматриваемые тройки чисел, для которых суммы равны. Итак, все суммы различными быть не могут.

Задача 2. Шесть школьников съели семь конфет. Докажите, что один из них съел не менее двух конфет.

Решение. Возьмём за "клетки" школьников, а за "кроликов" конфеты. Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдётся школьник, который съел хотя бы две конфеты.

Задача 3. В классе 15 учеников. Найдется ли месяц, в котором отмечают свои дни рождения не меньше, чем два ученика этого класса ?

Решение. Пусть "клетками" будут месяцы, а "кроликами" - ученики. Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдётся месяц, в котором отмечают свои дни рождения хотя бы два ученика.

Задача 4. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

Решение. Примем за "клетки" количество иголок. Всего "клеток" будет 600001 (0,1,2,...600000). А за "кроликов" ёлки. Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдутся две ёлки имеющие одинаковое количество иголок.

Задача 5. Из любых трёх целых чисел можно выбрать два, сумма которых чётна. Докажите это.

Решение. За "клетки" примем чётность чисел, их две (чётные числа и нечётный). За "кроликов" - числа. Используя принцип Дирихле получим, что в какой-то из двух "клеток" будет по одинаковому числу "кроликов". Это означает, что найдутся два числа одинаковой чётности. А если имеется два числа одинаковой чётности, то сумма этих чисел будет чётной.

Задача 6. Докажите, что в Вашем классе найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей среди своих одноклассников.

Решение. Предположим, что в классе 30 человек, тогда за "кроликов" возьмём учеников, а за "клетки" количество друзей. Друзей у каждого человека может быть 0,1,...,29 т.е. у нас получится 30 "клеток". Но "клетки" 29 и 0 одновременно существовать не могут т.к. если человек имеет 29 друзей, то каждый из его друзей будет иметь хотя бы одного друга, значит всего может быть 29 "клеток" (0,1,...,28 или 1,2,...,29). Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдутся два человека имеющие одинаковое число друзей.

Задача 7. В классе учится 29 человек. Саша Иванов допустил в диктанте 13 ошибок, и никто другой не сделала большего числа ошибок. Доказать, что по крайней мере трое учащихся сделали одинаковое число ошибок.

Решение. Примем за "клетки" всевозможные варианты количества ошибок. Их 14, так как школьники могут сделать 0, 1, ..., 13 ошибок. А за "кроликов" примем школьников, которые писали диктант. Их по условию 29. Каждого из них сажаем в клетку, которая соответствует количеству ошибок сделанных им. Тогда получим, что найдётся "клетка", в которой сидят по меньшей мере три "кролика", а это и означает , что найдутся трое школьников, сделавших одинаковое число ошибок.

Задача 8. В пяти классах школы учатся 160 человек. Доказать, что найдутся 4 человека, у которых день рождения приходится на одну и туже неделю.

Решение. В году может быть максимально 53 недели. Их и примем за "клетки" а, за "кроликов" приме ребят. Рассаживаем "кроликов" по тем "клеткам", которые соответствуют их дням рождения. В силу принципа Дирихле найдётся "клетка" по меньшей мере с четырьмя "кроликами", а это и означает, что найдётся неделя, когда день рождения сразу у четырёх человек.

Задача 9. У человека на голове не более 400000 волос, в Москве более 8 млн. жителей. Докажите, что найдутся 20 москвичей с одинаковым числом волос.

Решение. По условию на голове у каждого из москвичей может быть от 0 до 400000 волос имеем всего 400001 возможность. Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда лысых москвичей найдется не более 19, имеющих 1 волос тоже не более 19, ..., имеющих 400000 волос тоже не более 19. Но тогда всего москвичей не более 19 ×400001 = 7600019, что меньше 8 миллионов противоречие.

Задача 10. В ящике лежат 10 пар чёрных и 10 пар красных перчаток одного размера. Сколько перчаток надо вытащить из ящика наугад, чтобы наверняка среди них были:

а) Две перчатки одного цвета;

б) Одна пара перчаток одного цвета;

в) Одна пара перчаток разных цветов?

Решение. а) Если за "клетки" принять цвета перчаток, то, взяв любые три печатки, получится, что в одной из "клеток" находятся два "кролика"-перчатки. А это и требуется.

б) Можно взять 20 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать одноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 21. Доказать, что число 21 является искомым.

Примем за "клетки" цвета перчаток (их два). В качестве "кроликов" возьмём перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из "клеток" будет не меньше 11 "кроликов". Это означает, что найдётся 11 перчаток одного цвета. Но имеется только 10 пар перчаток одного цвета, поэтому все они не могут быть на одну руку. Значит, среди этих 11 перчаток найдётся одна пара перчаток одного цвета.

в) Можно взять 20 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать разноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 21. Доказать, что число 21 является искомым.

Из всех перчаток можно составить разноцветные пары. Разделим пары на две группы. В первую группу будут входить пары у в которых правая перчатка чёрная, а левая красная. Во вторую группу - пары у в которых правая перчатка красная, а левая чёрная. Эти группы и будут "клетками", а "кроликами" будут перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из "клеток" будет не меньше 11 "кроликов". Это означает, что найдётся 11 перчаток из одной группы. Но имеется только 10 пар перчаток данной группы, поэтому все они не могут быть на одну руку или одного цвета. Значит среди этих 11 перчаток найдётся пара перчаток разных цветов.

Задача 11. Возникает вопрос: а если добавить к этим перчаткам ещё 10 пар белых перчаток? Какое количество перчаток нужно было бы тогда вытащить, чтобы среди них наверняка были:

а) Две перчатки одного цвета;

б) Одна пара перчаток одного цвета;

в) Одна пара перчаток разных цветов?

Решение. а) Если за "клетки" принять цвета, а за "кроликов" перчатки, то, выбирая 4 любых "кролика"-перчатки, получится, что в одной "клетке" находится по крайней мере два "кролика". Значит, искомое число равно 4

(Ясно, что из трёх разноцветных перчаток нельзя найти двух перчаток одного цвета).

б) Можно взять 30 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать одноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 31. Доказать, что число 31 является искомым.

Примем за "клетки" цвета перчаток (их три). В качестве "кроликов" возьмём перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из "клеток" будет не меньше 11 "кроликов". Это означает, что найдётся 11 перчаток одного цвета. Но имеется только 10 пар перчаток одного цвета, поэтому все они не могут быть на одну руку. Значит, среди этих 11 перчаток найдётся одна пара перчаток одного цвета.

в) Можно взять 30 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать разноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 31. Доказать, что число 31 является искомым.

Из всех перчаток можно составить разноцветные пары. Разделим пары на три группы. В первую группу будут входить пары в которых правая перчатка чёрная, а левая любого другого цвета. Во вторую группу - пары в которых правая перчатка красная, а левая любого другого цвета. В третью группу - пары в которых правая перчатка белая, а левая любого другого цвета. Эти группы и будут "клетками", а "кроликами" будут перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из "клеток" будет не меньше 11 "кроликов". Это означает, что найдётся 11 перчаток из одной группы. Но имеется только 10 пар перчаток данной группы, поэтому все они не могут быть на одну руку или одного цвета. Значит среди этих 11 перчаток найдётся пара перчаток разных цветов.

Задача 12. 15 мальчиков собрали 100 орехов. Доказать, что два из них собрали одинаковое число орехов (каждый набрал хотябы по одному ореху).

Решение. Принимая за "клетки" корзинки мальчиков, за "кроликов" - орехи и применяя принцип недостаточности (n=15), получаем, что в каких-то двух "клетках" находится по равному числу кроликов. Это и означает, что найдутся два мальчика, которые собрали по одинаковому числу орехов.

Задача 13. а) У 21 мальчика имеется 200 орехов. Доказать, что как бы они не разделили их, найдутся два мальчика, которым досталось поровну орехов(может оказаться, что орехов им не досталось совсем).

б) Пусть дано k орехов. Какому минимальному числу мальчиков можно раздать эти орехи так, чтобы наверняка нашлось двое, которым их досталось поровну.

Решение. а) Принимая за "клетки" мальчиков, а за "кроликов" орехи и применяя принцип недостаточности (n=21), получаем, что в каких-то двух "клетках" находится по равному числу кроликов. Это и означает, что найдутся два мальчика, которые собрали по одинаковому числу орехов.

б) Проанализируем её условие. Пусть n мальчиков имеет по разному числу орехов. Тогда, как было уже установлено при доказательстве принципа недостаточности, они должны были собрать не менее чем $\frac{n(n-1)}{2}$ орехов. По условию задачи имеется k орехов. Значит, $k \geq \frac{n(n-1)}{2}$ орехов, то между n мальчиками можно разделить орехи так, чтобы никаким двум из них не досталось орехов поровну. Если же $k < \frac{n(n-1)}{2}$, то обязательно найдутся двое, которым орехов досталось поровну. Итак, остаётся поместить число k между двумя такими числами (они называются треугольными), чтобы выполнялись неравенства:

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq k < \frac{n(n+1)}{2}$$

Тогда для n мальчиков условие задачи не будет выполняться, а для n+1 уже будет, значит, n+1 - это и есть искомое количество мальчиков.

Задача 14. В районе 15 школ. Докажите, что как бы не распределяли между ними 90 компьютеров, обязательно найдутся две школы получившее одинаковое количество компьютеров (возможно - ни одного).

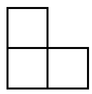
Решение. Принимая за "клетки" школы района, а за "кроликов" компьютеры, которые распределили между школами, применяя принцип недостаточности (n=15), получаем, что в каких-то двух "клетках" находится по равному числу кроликов. Это и означает, что найдутся две школы, которые получили по одинаковому числу компьютеров.

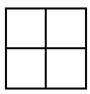
Задача 15. Каждая грань куба раскрашена в чёрный или белый цвет. Доказать, что найдутся одинаково раскрашенные грани, имеющие общее ребро.

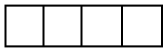
Решение. Рассмотрим любую вершину куба. В ней пересекаются три грани. Примем за "клетки" цвета, а за кроликов грани, пересекающиеся в одной вершине (их три). Поэтому согласно принципу Дирихле найдутся два "кролика" в одной "клетке", а это и означает, что найдутся две грани имеющие общее ребро (так как они имеют общую точку) и окрашенные одинаково.

Задача 16. В квадрате составленном из 100 клеток, закрашено менее 50. Доказать, что на не закрашенные клетки можно положить кость домино, покрывающую ровно две клетки.

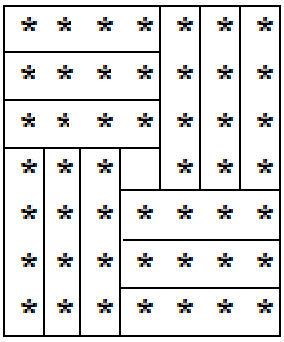
Решение. Чтобы не было свободной пары клеток, в любой строке должно быть не менее пяти закрашенных клеток. Значит всего должно быть не менее закрашенных 50 клеток, чтобы было невозможно выделить свободный участок 1×2. Поскольку закрашенных клеток менее 50, в силу предложения 1 такой участок существует.

Задача 17. На шахматной доске 8×8 расставлена 31 фигура. Доказать, что найдётся свободный треугольник  из трёх клеток.

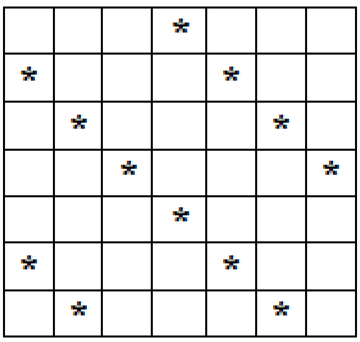
Решение. Чтобы не было свободного треугольника, в любом прямоугольнике 2×2  должны быть заняты две клетки, чтобы в него нельзя уже было поместить треугольник. Так как всю доску можно покрыть 16 неперекрывающимися квадратиками 2×2, то всего фигур должно быть 32, а по условию их всего 31. Значит, согласно предложению 1 найдётся квадратик 2×2, в котором окажется только одна фигура, а в ней и содержится свободный треугольник.

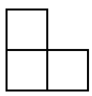
Задача 18. Игра "Морской бой" происходит в квадрате 7×7. Какое наименьшее количество выстрелов надо сделать, чтобы наверняка "ранить" четырёхпалубный корабль, если он имеет вид  ?

Решение. Всего имеется 49 клеток. В них можно разместить не более 12 непересекающихся корабликов вида 1×4 (на рисунке они помечены звёздочками), например так:

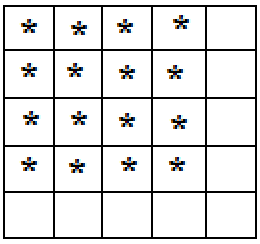


Значит надо провести не менее 12 выстрелов, чтобы ранить четырёхпалубный корабль. Однако можно, произведя 12 выстрелов, добиться того, чтобы в оставшееся клетки нельзя было поместить четырёхпалубный корабль. Например так:



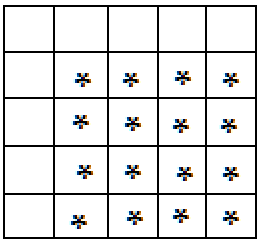
Задача 19. В квадрате 5×5 закрашено 16 клеток. Доказать, что найдётся закрашенная фигура - треугольника вида  .

Решение. Предположим, что в данном квадрате нет закрашенных фигур указанного типа. Тогда в любом квадратике 2×2 закрашено не менее двух клеток. Рассмотрим отмеченный звёздочками квадрат:

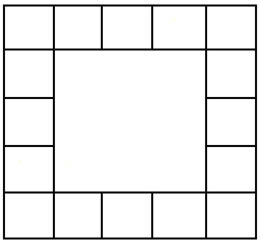


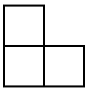
Так как в нём нет закрашенных треугольников, то в отмеченных звёздочками клетках - не более 8 закрашенных клеток; значит, вне его не менее 8 закрашенных клеток.

Рассмотрим другой квадрат:



Здесь по аналогичным причинам вне отмеченных звёздочками клеток окажется не менее 8 закрашенных клеток. Значит в граничном "поясе"



будет не менее 14 закрашенных клеток. Всего в нём 16 клеток, поэтому один из четырёх треугольных углов, т.е. фигура вида , будет закрашена.

Задача 20. В клетки прямоугольника 5×41 раскрашены в два цвета. Доказать, что можно выбрать три строки и три столбца так, чтобы все 9 клеток, стоящие на пересечение этих строк и столбцов, были одного цвета.

Решение. Получим, что в любом из столбцов будет не менее трёх клеток одного (из двух) цветов. Можно воспользоваться принципом Дирихле, приняв за "клетки" цвета, а за "кроликов" - столбцы; "кролика" сажаем в ту "клетку", которая соответствует цвету большинства его раскрашенных клеток. Тогда получим, что в 21 столбце (из 41) будет по три раскрашенные одним цветом клетки (допустим - первым) . В каждом из этих столбцов три раскрашенные клетки можно расположить 10 способами. Снова в силу принципа Дирихле получаем, что в трёх столбцах (из 21) закрашенные клетки будут располагаться одинаково. Проведём прямые через эти столбцы и через три одинаково закрашенные клетки. Эти 9 клеток пересечения и будут искомыми.

Задача 21. На далекой планете Зям-лям, имеющей форму шара, суша занимает более половины поверхности планеты. Докажите, что можно прорыть прямой туннель, проходящий через центр планеты и соединяющий сушу с сушей.

Решение. Предположим, что такой туннель прорыть нельзя. Тогда напротив каждого участка суши должен находится участок воды, значит суша должна занимать не более половины планеты. А по условию на планете Зям-лям суша занимает более половины поверхности планеты. Получили противоречие с условием задачи, значит наше предположение неверно, и прямой туннель, который соединяет сушу с сушей прорыть можно.

Задача 22. В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трех сортов, причем в каждом ящике лежат яблоки какого-то одного сорта. Можно ли найти 9 ящиков с яблоками одного сорта?

Решение. Примем за "клетки" сорта яблок , а за "кроликов" ящики с яблоками. Применяя обобщённый принцип Дирихле получим, что в одной из "клеток" будет не менее 9 "кроликов". А это и означает, что найдутся 9 ящиков с яблоками одного сорта.