Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 9-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Как мы научились решать квадратные уравнения

Корепанова Алла Александровна,
10 кл., МАОУ «Лицей №4», г. Пермь,
Семушина Любовь Борисовна,
учитель математики высшей категории.

Пермь. 2014.

Одно из замечательных качеств математика – любознательность. Он никогда не останавливается на достигнутом. Найдя один способ решения, он начинает искать другие. Он смотрит, нельзя ли тот или иной метод применить в других обстоятельствах. Именно так рождался современный способ решения квадратных уравнений.

Уже издавна вавилоняне умели решать приведенные квадратные уравнения. Они рассматривали их как задачи на определение длины и ширины прямоугольника по известной его площади и сумме длины и ширины. Другими словами, если x_1 – длина, x_2 - ширина, q – площадь, p – сумма длины и ширины. На нашем языке это значит:

$$\begin{cases} x_1 * x_2 = q \\ x_1 + x_2 = p \end{cases}$$

Умножим первое уравнение почленно на 4, а второе возведём в квадрат.

$$\begin{cases} 4x_1x_2 = 4q \\ x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = p^2 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое

$$x_1^2 – 2x_1x_2 + x_2^2 = p^2 - 4q$$

Т.к. $x_1 \geq x_2$, то

$x_1 - x_2 = \sqrt{p^2 - 4q}$, тогда

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = \sqrt{p^2 - 4q} \\ x_1 + x_2 = p \end{cases}$$

из этого находим

$x_1 = \frac{p+\sqrt{p-4q}}{2}$

$x_2 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$

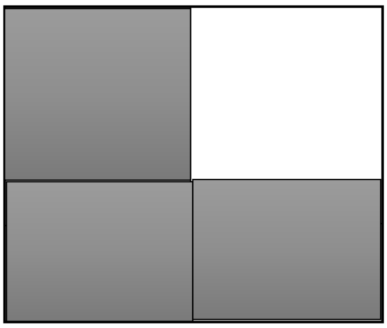
Евклид же (III в. до Н. Э.) решал квадратные уравнения, применяя геометрический способ.

Рассмотрим данный метод на примере:

$x^2 + x = 12$

Пусть AB = x, BC =1/2 . Построим квадрат со стороной AC = AB + BC.

A B C



Тогда сумма площадей трех прямоугольников равна 12.

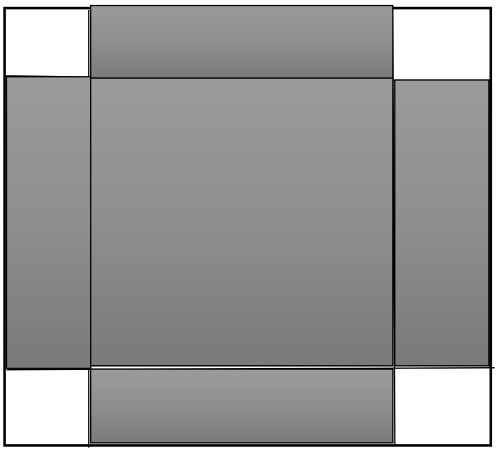
Т.к. сумма площадей трех частей квадрата равна 12 и площадь четвертой равна ¼ , то площадь всего квадрата равна 49/4, т.е. $(x + ½)^2 = 49/4$, тогда

x + ½ = 7/2 или x + ½ = - 7/2

x = 3 x = - 4, однако Евклид не находил отрицательных корней.

В 825 году эту задачу решал ал-Хорезми. Попробуем решить наше уравнение этим способом:

Построим квадрат со стороной x и на его сторонах построим прямоугольники со сторонами x и ¼ . В углах фигуры построим квадраты со стороной ¼ .



Найдем площадь получившегося квадрата.

Площадь внутреннего квадрата и четырех прямоугольников равна 12 и площадь маленького квадрата равна 1/16 , тогда площадь большого квадрата

$12 + 4 * 1/16 = 12 + ¼ = 49/4$, тогда

$(x + 2 * ¼)^2 = 49/ 4$

$x + ½ = 7/2$ или $x + ½ = - 7/2$

$x = 3$ $x = - 4$, однако Ал-Хорезми не признавал отрицательных чисел.

В III Н.Э. квадратное уравнение $x^2 – 20x + 96 = 0$ решал великий древнегреческий математик Диофант.

Пусть

$$\begin{cases} a + b = 20 \\ a * b = 96 \\ a - b = 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases}(a+b)/2 = 10 \\ a * b = 96 \\ (a-b)/2 = z\end{cases}$$

Сложим первое и третье уравнение

$$\begin{cases}a = 10 + z \\ a * b = 96 \\ a - b = 2z\end{cases}$$

Выразим b через третье уравнение

a – b = 2z

b = a – 2z

b = 10 + z – 2z

b = 10 – z , тогда

(10 – z) * (10 + z) = 96

$100 - z^2 = 96$

$z^2 = 4$

Т.к. раньше использовались только неотрицательные числа, то

z = 2 , тогда

a = 10 + z = 12

b = 10 – z = 8

Мы нашли корни уравнения, но не каждое уравнение можно решить этим методом.

После этого над решением квадратного уравнения работали немецкий математик М. Штифель (1487 – 1567 гг.), нидерландец А. Жирар (1595 – 1632 гг.), Р.Декарт и Н.Ньютон, и только тогда возник современный способ решения. Вывести его можно следующим образом:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Разделим правую и левую часть на а и перенесем свободный член в правую часть:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Прибавим к правой и левой части $\frac{b^2}{4a^2}$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Далее Франсуа Виет вывел теорему, основываясь на выведенной нами формуле:

$$x_1 * x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} * \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{b^2 - b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

С помощью этой теоремы также можно решить уравнение:

$x^2 + x - 12 = 0$, тогда $\begin{cases} x_1 * x_2 = -12 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$

Значит $x_1 = 3$ и $x_2 = -4$.

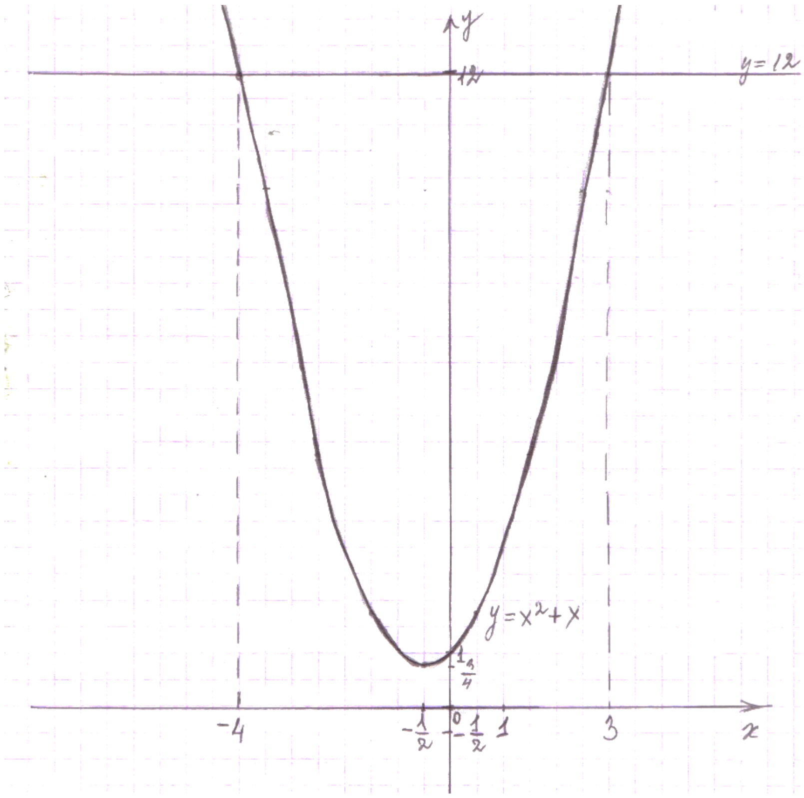
Сейчас существует ещё один способ решения данных уравнений – графический

$x^2 + x = 12$

Зададим функции

$y = x^2 + x$ и $y = 12$

Построим графики, после чего найдем абсциссы точек их пересечения.



Отсюда мы находим, что $x_1 = 3$ и $x_2 = -4$, однако данный способ довольно неточен и неудобен для иррациональных корней.

Таким образом, мы видим, что современный способ решения квадратных уравнений не возник сам по себе: в нём заложены труды многих великих математиков, которые всегда искали что-то новое, а находя шли дальше, покоряя следующие высоты. Я верю, когда-нибудь мы найдем большое количество других способов, и это будет означать наше развитие как математиков и, конечно же, как личностей, создающих что-то совершенно новое и прекрасное.

Список литературы

1.Л.Канападзе «Математика без скуки», Москва, «Мой мир», 2006

2.Я.И.Перельман «Занимательная алгебра», Москва, издательство «Наука», 1975

3.Л.Ф.Пичурин «За страницами учебника алгебры», Москва, «Просвещение», 1990

4. http://5klass.net/algebra-9-klass

5. http://raal100.narod.ru/index/0-253