Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 9-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Построение дискретных аналитических и гармонических функций и некоторые их свойства

Козьма Владимир Михайлович,

11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,

Грайфер Лазарь Борисович,

к.ф.-м.н., доцент ПНИПУ.

Пермь. 2014.

Содержание

Введение

На рубеже 21 века, возрос интерес математиков разных математических специальностей к изучению дискретных функций. Но, если в предыдущие годы этот интерес был связан в значительной степени с приближенным решением задач для комплексных функций с условиями аналитичности и гармоничности, то сейчас математиков, изучающих задачи математического анализа, дифференциальной геометрии, топологии, теории случайных блужданий и математических моделей в различных областях физики (протекания, намагничеваемости), дискретные задачи стали интересовать сами по себе. Их теория стала развиваться самостоятельно и позволила продвинуться в изучении многих проблем.

Наш интерес к задачам дискретной теории аналитических и гармонических функций связан с выступлениями филдсовского лауреата Смирнова С. К., предложившего школьникам начать знакомство с современной математикой с изучения дискретных аналитических и гармонических функций. Мы попытались построить простейшие варианты дискретизации и рассмотрели некоторые свойства дискретных функций, связанных со случайными блужданиями.

ГЛАВА 1 АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1.1 Аналитическая функция

Однозначная функция f называется аналитической в точке z_0, если сужение функции f на некоторую окрестность z_0 является аналитической функцией. Если функция аналитична в точке z_0 то она аналитическая в каждой точке некоторой окрестности точки z.

Свойства

1.Сумма, произведение функций, аналитических в точке, есть функция, аналитическая в этой точке. Поэтому, в силу аналитичности функции $w = c$, линейная комбинация функций, аналитических в точке, является аналитической функцией.

2.Частное функций, аналитических в точке, есть функция, аналитическая в этой точке, если знаменатель в ней отличен от нуля.

3.Суперпозиция аналитических функций — функция аналитическая. Если $f(z)$ - аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то обратная функция $f^{-1}(w)$ является аналитической в $w_0(f(z_0) = w_0)$.

1.2 Гармоническая функция

Гармоническая функция — вещественная функция U, определенная и дважды непрерывно дифференцируемая на евклидовом пространстве D (или его открытом подмножестве), удовлетворяющая уравнению Лапласа: $\Delta U = 0$,

где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа, то есть сумма вторых производных по всем прямоугольным декартовым координатам x_i. Например, гармонической функцией является электростатический потенциал в точках, где отсутствует заряд.

3. Связь аналитических функций с гармоническими

Другая отличительная особенность аналитической функции связана с дифференцируемостью ее действительной и мнимой частей как функций двух действительных переменных. Во-первых, из формулы и утверждения следует, что эти функции имеют непрерывные частные производные любого порядка в области, где функция является аналитической. Во-вторых, нетрудно убедиться, что функции

$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$

являются гармоническими в области аналитичности $f(z)$.

Напомним, что гармонической в области D называется функция $u(x, y)$ двух действительных переменных, которая имеет в D непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в D уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$
(2.23)

Для доказательства справедливости равенства (2.23) для функций $u = \operatorname{Re} f(z)$ и $v = \operatorname{Im} f(z)$ достаточно продифференцировать одно из равенств (условия Коши-Римана) по x, другое — по y и воспользоваться равенством смешанных производных, которое имеет место в силу непрерывности этих производных.

Уравнение (2.23) называется уравнением Лапласа, его можно записать в виде $\Delta u = 0$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа. Уравнение имеет важное значение при решении плоских задач математической физики.

ГЛАВА 2 ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим аналоги аналитических функций, определенные на множестве целых чисел в комплексной плоскости, для которых процессы суммирования значений и вычисления конечных разностей специальным образом будут аналогичны интегрированию и дифференцированию комплексных аналитических функций.

Определение 1. Два комплексных числа и называются соседними, если разность равна одному из чисел или .

Определение 2. Последовательность целых комплексных чисел назовем контуром , если и , и , … , и образуют пары соседних точек. Если точки и тоже являются соседними, то данный контур называется замкнутым.

Определение 3. Интегралов функции f(z) по контуру назовем сумму

Для сокращения при обозначении значений функции f в вершине будем использовать обозначение .

Решетку точек, построенных относительно вершины , разобьем на 2 части: четную и нечетную решетки. К четной решетке отнесем те точки, для которых сумма (m+n) есть число четное, а к нечетной решетке те точки, для которых (m+n) нечетное. Метод перечисления точек решетки, можно назвать спиральной системой координат.

Определение 4. Функцию f(z) назовем дискретной аналитической в области R решетки, если интеграл по любому квадрату из R равен нулю.

Вычислим интеграл по границе элементарного квадрата Q с вершинами (0,0), (1,0), (1,1),(1,0), обозначив , , , .

Тогда

После приведения подобных получаем:

(4)

Пользуясь 1-м определением дискретной аналитичности, приравниваем выражение (4) к нулю:

, откуда (5)

Следовательно, можно дать другое определение дискретной аналитической функции

Определение 5. Функция f(z), определяется в вершинах квадрата (0,0), (1,0), (1,1),(1,0) называется дискретной аналитической на нем, если выполнено соотношение:

(6)

Соотношение (6) можно привести к виду:

(7),

где использована спиральная система координат. Получим из условий дискретной аналитичности (1), (6) и (7) f(z) условия, аналогичные условиям Коши-Римана для дискретной гармоничности для ее действительной и мнимой частей и , определенных на той же сетке, что и f, где .

Для этого запишем условие (7) в виде:

(8).

Подставим в (8) ; используя спиральную координатную систему:

(9)

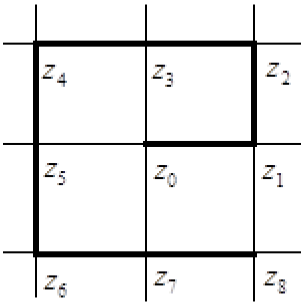
Приравнивая к нулю действительные и мнимые части (9) получим:

- для действительной части,

- для мнимой части.

Собрав вместе значения и в вершинах квадрата, получаем аналоги уравнений Коши-Римана

Применим условия аналитичности к данному рисунку.



Разобьем данный рисунок на 4 квадрата и для каждого квадрата напишем уравнения Коши-Римана

Для первого квадрата:

Для второго квадрата:

Для третьего квадрата:

Для четвертого квадрата:

Преобразуем уравнения в две отдельных системы: в 1 выразим во 2 .

Теперь сложим их:

(10)

(11)

Определение 6. Назовем функцию u дискретной гармонической в т.(0,0), если в спиралевидной системе она удовлетворяет на сетке уравнению (10).

Таким образом, мы получим аналог теоремы о гармоничности для аналитической функции f(z) ее действительной и мнимой частей. Однако, в отличии от классического случая, гармоничность и аналитичность определяется по разным точкам. Следовательно, определения аналитичности для всех квадратов области задания были существенны.

Отметим, что оператор не связывает значение функции на четной решетке со значениями на нечетной решетке. Мы сможем получить такие же уравнения для значений на нечетной решетке при повороте квадрата на 45 градусов.

ГЛАВА 3 ПРИМЕНЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ И ЗАКОНОВ КИРХГОФА ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

3.1 Физические определения

Для исследования случайного блуждания оказывается полезной физическая интерпретация, использующая электрические цепи. Поскольку мы собираемся применять электрические цепи для доказательства математического результата, то нам понадобится их формальное аксиоматическое определение.

Определение. Электрическая цепь - это связный конечный граф, у которого каждому ребру xy приписано положительное вещественное число, называемое его проводимостью C(xy), и задано два непересекающихся выделенных множества вершин (P и N). Считается, что вершины из множества N соединены с отрицательным полюсом батарейки и землей, а вершины из множества P с положительным.

Потенциалы вершин v(x) определяются следующими аксиомами:

1. **Граничное условие**. Если $x \in N$, то $v(x) = 0$. Если $x \in P$, то $v(x) = 1$.
2. **Правило Кирхгофа**. Если , то ,

где суммирование ведется по всем ребрам xy, содержащим вершину x.

Замечание. Мы допускаем графы с кратными ребрами. Если граф имеет несколько ребер между вершинами x и y, то xy будет обозначать любое из них (путаницы из-за этого не возникнет).

3.2 Связь случайных блужданий с гармоническими функциями

Пример. Рассмотрим город, схема которого приведена на рисунке 3. Отрезки обозначают улицы. Пути отхода помечены буквой E, а буквой P помечены точки, занятые полицией. Из точки x = (a, b) пьяница перемещается в каждую из точек (a + 1, b), (a − 1, b), (a, b + 1), (a, b − 1) с вероятностью 1/4. Если он достигает одной из точек E или P, то его передвижения заканчиваются. Найдем вероятность P(x) того, что начав свой путь в точке x, пьяница не попадет в руки полиции.

Рассмотрим электрическую цепь на рисунке 3 справа, состоящую из единичных резисторов. Так же, как и в примере 1, мы видим, что функция P(x) удовлетворяет аксиомам 1–2 из определения электрической цепи.

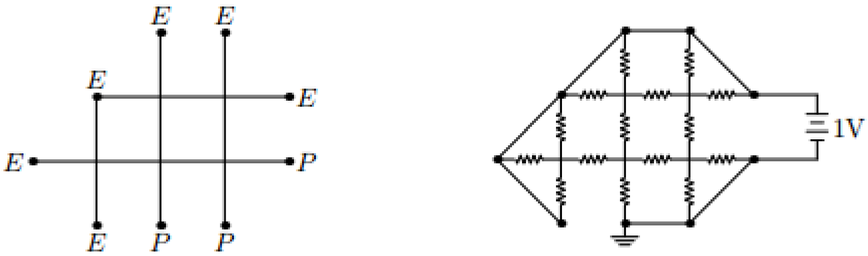
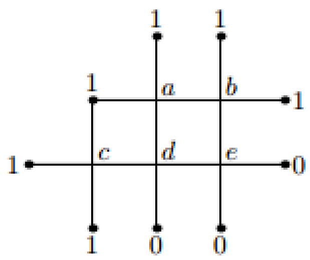


Рис.3

Обозначим вероятности P(x) через a, b, c, d, и e; см. рисунок 4 слева. Тогда аксиомы 1–2 примут вид

$$a = (b + d + 2)/4;$$
$$b = (a + e + 2)/4;$$
$$c = (d + 3)/4;$$
$$d = (a + c + e)/4;$$
$$e = (b + d)/4.$$



		1	1	
	1	.823	.787	1
1	.876	.506	.323	0
	1	0	0	

Рис.4

Решая эту систему, находим искомые вероятности P(x). На рисунке 4 справа значения вероятностей приведены с точностью до тысячных.

Итак, для этого примера найденные вероятности опять совпадают с потенциалами в соответствующей электрической цепи.

Теперь мы рассмотрим, подходит ли уравнение (10) к задаче на случайные блуждания.

Переделаем это уравнение для значений на нечетной решетке.

Для точки .

Для точки .

Для точки .

Для точки .

Для точки .

Из этого следует, что случайные блуждания связаны с гармоническими функциями.

3.3 Теорема единственности

Определение. Функция v(x) на вершинах электрической цепи называется гармонической, если она удовлетворяет аксиоме 2, но не обязательно аксиоме 1. Вершины, принадлежащие одному из множеств N и P, называются граничными, а остальные внутренними.

Установим несколько важных свойств гармонических функций.

Принцип суперпозиции. *Если функции u(x) и v(x) гармонические, то при любых a,b ∈ R функция au(x) + bv(x) гармоническая.*

Доказательство. Для любой внутренней вершины x

=

где суммирование ведется по всем ребрам xy, выходящим из x. Значит, au(x) + bv(x) - гармоническая функция.

Принцип максимума. *Гармоническая функция на конечной электрической цепи принимает свое наибольшее и наименьшее значение на граничных вершинах.*

Доказательство. Пусть v(x) - гармоническая функция, которая принимает наибольшее значение в некоторой вершине x. Докажем, что если x - внутренняя вершина, то в ее соседях наша функция принимает такие же значения. Так как v(x) - наибольшее значение, то для каждой соседней вершины y выполнено неравенство . Следовательно, По аксиоме 2 последнее неравенство обращается в равенство. Значит, для всех y.

Так как электрическая цепь - связный граф, то существует путь, соединяющий вершину x с одной из граничных вершин. По доказанному значения нашей функции во всех вершинах пути одинаковы. Значит, в одной из граничных вершин также принимается наибольшее значение функции v(x), что и требовалось. Доказательство для наименьшего значения аналогично.

Теорема единственности. *В конечной электрической цепи не может быть двух различных расстановок потенциалов, удовлетворяющих обеим аксиомам 1–2.*

Доказательство. Пусть u(x) и v(x) - две расстановки потенциалов. Рассмотрим гармоническую функцию u(x)−v(x). Она принимает значение 0 на всех граничных вершинах. По принципу максимума она равна 0 и во всех внутренних вершинах. Следовательно, u(x) и v(x) совпадают. **Физическая интерпретация вероятности достижения**. *Для любой конечной электрической цепи потенциал v(x) вершины x равен вероятности P(x) того, что случайное блуждание, начавшееся из вершины x, достигнет множества P раньше, чем множества N.* **Доказательство.** Действительно, вероятность P(x) удовлетворяет обеим аксиомам 1–2. Потенциал v(x) также удовлетворяет этим аксиомам. По теореме единственности v(x) = P(x) при всех x.

3.4 Теорема существования.

Теорема существования. *В любой конечной электрической цепи существует расстановка потенциалов, удовлетворяющая аксиомам 1–2.*

Первое доказательство теоремы существования. Рассмотрим случайное блуждание по электрической цепи. Пусть PT(x) – вероятность того, что, стартуя из вершины x и делая T шагов, мы достигнем, положительного полюса батарейки раньше, чем отрицательного. Ясно, что прификсированном x последовательность PT(x) возрастает и ограничена, значит, имеет предел P(x). Функция P(x) удовлетворяет аксиомам 1–2.

Сходимость метода релаксации. *В каком бы порядке мы не проходили по внутренним вершинам (так, чтобы в каждой из них оказаться сколь угодно много раз), получаемые нами функции стремятся к функции, удовлетворяющей аксиомам 1–2. В частности, функция, удовлетворяющая аксиомам 1–2, существует.*

Доказательство метода релаксации (и заодно второе доказательство теоремы существования). Разобьем доказательство на несколько шагов.

Лемма 1. *Значение функции в каждой вершине (за исключением вершин множества P) на каждом шаге процесса не превосходит взвешенного среднего арифметического соседей.*

Доказательство. Индукция по номеру шага. Изначально это условие выполняется. В тот момент, когда мы делаем очередной шаг, значение в соответствующей вершине не уменьшается (по предположению индукции). Значит, взвешенное среднее у соседей этой вершины тоже не уменьшается. Поскольку ни на какие другие вершины это не влияет, индукционный переход доказан. Заодно мы доказали, что последовательность значений в каждой вершине не убывает.

Лемма 2. *Значения функции неотрицательны и не превосходят 1.*

Доказательство. Пусть это не так. Рассмотрим первый шаг, когда появилось значение, большее единицы. Получим, что число, большее 1, равняется взвешенному среднему чисел, не больших 1, - противоречие. Аналогично получаем, что все значения неотрицательны.

Лемма 3. *В каждой вершине x последовательность получаемых значений функции имеет некоторый предел u(x).*

Доказательство. Действительно, по леммам 1 и 2, эта последовательность не убывает и ограничена сверху числом 1.

Лемма 4. *Полученная в пределе функция u(x) удовлетворяет аксиомам 1–2.*

Доказательство. Функция u(x), полученная в пределе, удовлетворяет аксиоме 1, потому что функции на каждом шаге удовлетворяют этой аксиоме. Проверим аксиому 2. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По лемме 3, начиная с некоторого шага n нашего процесса, значение очередной функции в каждой вершине x будет отличаться от u(x) не более, чем на ε. Возьмем произвольную внутреннюю вершину x. Рассмотрим первый момент после n-го шага, когда обновляется значение функции в вершине x.

Пусть значения функции сразу после обновления равны $u(x) - \varepsilon(x)$, где $0 < \varepsilon(x) < \varepsilon$. Поскольку после обновления значение в вершине x равно взвешенному среднему значений в соседних вершинах, то

Перенося слагаемые, содержащие функцию $\varepsilon(x)$, в правую часть, получаем

Поскольку то

Но число ε можно выбрать сколь угодно малым, значит

Аксиома 2 выполнена.

Итак, мы показали, что получаемые нами функции стремятся к функции, удовлетворяющей аксиомам 1–2. Сходимость метода релаксации доказана.

Заключение

При выполнении работы мы связали несколько определений дискретных аналитических и гармонических функций и использовали различные приемы для доказательства их свойств. Введенные определения элементарны, но в настоящие время построенная на более современной математической базе теория дискретных аналитических функций позволила дать полные решения многих задач по изучению критических явлений в протекании, намагничивание методами исследования с помощью дискретных аналитических и гармонических функций.

Трудами филдсовских лауреатов: У. Терсона, С. Новикова, С. Смирнова и других математиков разных стран. Эта часть математики, первоначально используемая в качестве основы для численных расчетов, превратились в серьезную ветвь математического анализа. В работе показано, что к ее изучению можно приступить без специальных знаний в области анализа, базируясь на вполне элементарных свойствах рекуррентных формул и элементарных вероятностных понятиях и физических законах.

Список литературы.

1. Бобенко А. И., Сурис Ю.Б. Дискретная дифференциальная геометрия. Москва, Ижевск.: R&C, 2010, с 486.

2. Лаврентьев М. Я., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973, с 736.

3. Скопенков М., Прасолов. М., Дориченко. С. Разрезание металического прямоугольника// Квант, 2011, № 3, с 10-16.

4. Скопенков М., Смыкалов В., Устинова В. Случайные блуждания и электрические цепи// Математическое просвещение, 2011, № 6, с 25-47.

5. Смирнов С. К. О современной математике и ее преподавании// Квант, 2011, № 2, с 11-19.

6. Тиман А. Ф., Трофимов В. Н. Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968, с 206.

7. Smirnov S. Discrete complex analysis and Probability// Proceedings of the International congress of Mathematicians Hyderabad, India, 2010, с 1-27.