Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 9-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Шахматы на нестандартных досках

Гачегова Елена Алексеевна,

Лахвич Дмитрий Сергеевич,

11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,

Чудинова Елена Борисовна,

учитель математики высшей категории.

Пермь. 2014.

Оглавление

Введение

Шахматы – это одна из самых древних интеллектуальных игр на Земле. На протяжении веков эта удивительная игра занимает умы людей. Математика и шахматы имеют много общего. Шахматная доска, фигуры и сама игра часто используются для иллюстрации разнообразных математических понятий и задач. Шахматные примеры и термины можно встретить в литературе по кибернетике, теории игр, вычислительной математике, исследованию операций, теории графов, теории чисел и комбинаторике.

В последнее время большую популярность получили шахматы на досках нетрадиционной конфигурации: тороидальные, круглые, цилиндрические.

В данной работе рассмотрены математические задачи, которые обычно решаются на стандартной шахматной доске, но нами они будут решены еще и на досках нестандартных. Полностью рассмотрены задачи, связанные с независимостью шахматных фигур. Выведены характеристики силы шахматных фигур для всех рассматриваемых досок. Проведен сравнительный анализ.

Глава I: Описание нестандартных шахмат

Цилиндрические шахматы — вариант игры в шахматы, в котором игровая доска считается развёрткой цилиндра. Существует несколько разновидностей формы цилиндрической доски: вертикальная и горизонтальная. Мы рассматриваем первый вариант доски.

Вертикали «a» и «h» являются соседними: например, король, находясь на поле a5, может перейти на поля h4, h5 или h6; ладьи на начальных позициях защищают друг друга. Все вертикали равноправны, вертикальных краёв у доски нет.

Некоторые фигуры (ферзь, ладья, слон) могут в одиночку объявить двойной шах. Например, слон или ферзь на c5 даёт двойной шах королю на g1 — «диагонали» c5-d4-e3-f2-g1 и c5-b4-a3-h2-g1 пересекаются в двух точках. Ладья или ферзь, находясь на одной горизонтали с неприятельским королём, ставит ему двойной шах, если на горизонтали нет других фигур и пешек.

Начальная расстановка фигур и правила остаются обычными. То есть в данных шахматах меняется лишь форма доски, не более.

Рис. 1. Цилиндрическая доска

Тороидальные шахматы являются модификацией цилиндрических, а именно, это замкнутая цилиндрическая доска. В итоге у такой доски нет никаких границ. Правила игры остаются теми же.

Круговые шахматы — современная игра, созданная на базе византийских шахмат, от которых отличается тем, что фигуры ходят по современным правилам. Изобретателем этого варианта является английский историк Дэвид Рейнольдс.

В круговые шахматы играют на круглой доске, состоящей из 4 колец по 16 ячеек в каждом.

Доска и начальная расстановка образует круг сворачиванием обычной шахматной доски.

Правила игры напоминают классические шахматы, но есть некоторые отличия. Пешки двигаются в своем направлении. Достигая противоположного края доски, пешки превращаются в любую фигуру. Рокировки здесь нет. Ладья может ходить полностью весь круг.

Рис. 2. Расстановка фигур на круглой доске

Глава II: Независимость шахматных фигур

При переходе к новым доскам возникают интересные математические задачи. Множество красивых задач рождается при решении следующей комбинаторной проблемы:

Какое наибольшее количество одноименных фигур (ферзей, ладей, слонов, коней и королей) можно расставить на доске так, чтобы никакие две из них не угрожали друг другу? Сколькими способами это можно сделать?

Число независимости - наибольшее число одноименных фигур, которые можно расставить на шахматной доске так, чтобы никакие две не угрожали друг другу (N_n).

Независимость шахматных фигур на стандартной доске.

1. Конь. С независимостью коней имеется полная ясность. Очевидно, расставляя 32 коня на полях одного цвета (рис. 3), мы получим два независимых множества. Убедимся, что больше 32 коней расставить невозможно. Пусть мирные кони каким-то образом расположены на доске. Рассмотрим произвольный замкнутый маршрут коня по этой доске. В этом маршруте после каждого поля, занятого конем нашей расстановки, должно следовать свободное поле. Значит, кони не могут занимать более половины доски. Если же половина доски заполнена конями, то они должны следовать в маршруте через одно поле и, значит, располагаться на полях одного цвета.

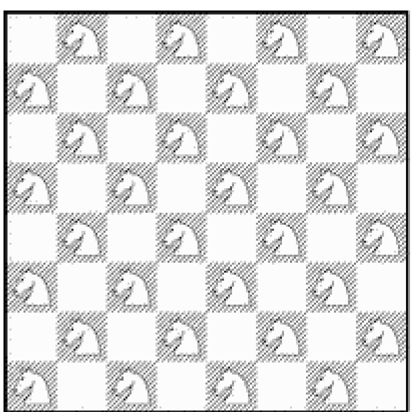

Рис. 3. 32 мирных коня.

Итак, мы не только доказали, что N_8(К)=32, но и обнаружили существование двух независимых расстановок — кони могут стоять только на белых или только на черных полях. Никаких других фигур, не угрожающих друг другу, в таком большом количестве, расставить нельзя, и поэтому коней по праву можно считать самыми мирными жителями шахматной семьи.

Совершенно аналогично доказывается, что N_n(К)=$n^2/2$, если n четно, и N_n(К)=$(n^2+1)/2$, если n нечетно. В первом случае вновь имеются две (одноцветные) расстановки, а во втором — только одна (кони стоят на полях того цвета, которого на доске больше).

2. **Ладья**. На квадратной доске n×n расставить более n ладей таким образом, чтобы они не угрожали друг другу, невозможно. Так как каждая ладья ставит под удар одну горизонталь и одну вертикаль, то, если ладей будет более n, то несколько фигур будут располагаться на полях, которые находятся под ударом других фигур (рис. 4.).

Рис. 4. Восемь мирных ладей.

3. **Ферзь**. Рассмотрим числа независимости Nn(Ф). Как мы знаем N2(Ф)=1, N3(Ф)=2, Nn(Ф)=n. Число соответствующих расстановок известно только для n = 14. На обычной доске можно расставить восемь независимых ферзей 92-мя различными способами.

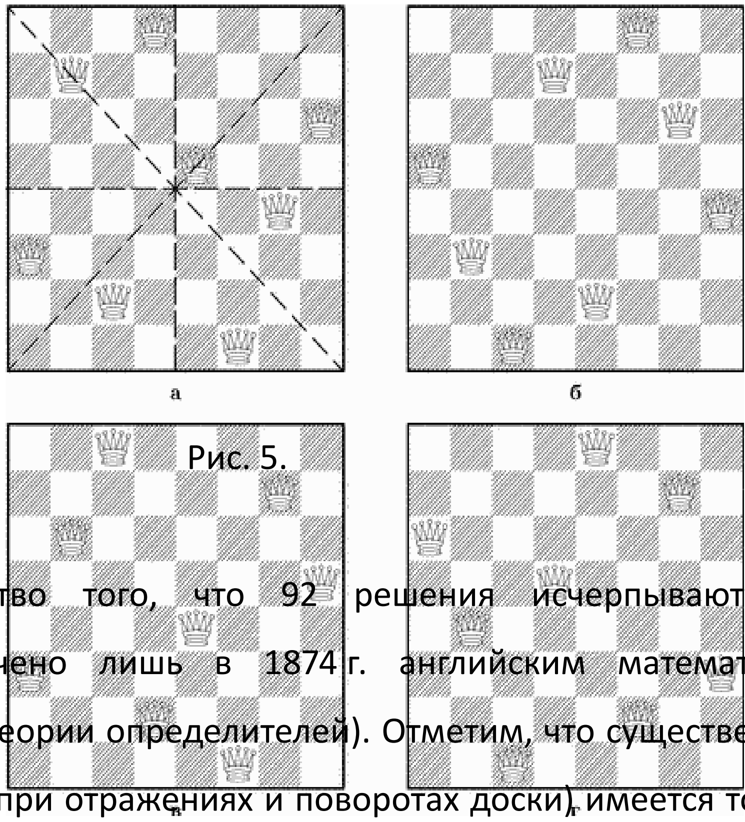

Рис. 5.

Строгое доказательство того, что 92 решения исчерпывают все возможности, было получено лишь в 1874 г. английским математиком Д. Глэшером (при помощи теории определителей). Отметим, что существенных решений (не совпадающих при отражениях и поворотах доски) имеется только двенадцать. Из каждого решения задачи о ферзях можно получить ряд других при помощи поворотов (вращений) доски на 90, 180 и 270°, а также при ее зеркальном отражении относительно линий, разделяющих доску пополам. Например, из расстановки, показанной на рис. 3,а, при повороте доски на 90° по часовой стрелке мы получаем расстановку на рис. 3,в, а при отражении доски относительно линии, разделяющей королевский и ферзевый фланги, — на рис. 3,г. При помощи других поворотов и отражений доски можно получить еще пять решений.

Набор расстановок восьми мирных ферзей называется основным, если, во-первых, эти расстановки не переходят друг в друга при поворотах и отражениях доски, и, во-вторых, любая другая расстановка получается из какой-нибудь основной при помощи данных преобразований доски. Доказано, что всякий основной набор решений задачи содержит ровно 12 расстановок. Вот один из таких наборов:

1) см. рис. 3,а;

2) см. рис. 3,б;

3) a4, b1, c5, d8, e6, f3, g7, h2;

4) a4, b2, c5, d8, e6, f1, g3, h7;

5) a4, b2, c7, d3, e6, f8, g1, h5;

6) a4, b2, c7, d3, e6, f8, g5, h1;

7) a3, b5, c2, d8, e6, f4, g7, h1;

8) a4, b1, c5, d8, e2, f7, g3, h6;

9) a4, b7, c3, d8, e2, f5, g1, h6;

10) a6, b4, c2, d8, e5, f7, g1, h3;

11) a4, b8, c1, d5, e7, f2, g6, h3;

12) a4, b2, c7, d5, e1, f8, g6, h3.

4. **Король**. Разобьем доску на 16 квадратов 2x2 (рис. 4, доска 8x8 выделена на нем). Если мы хотим, чтобы короли не касались друг друга, то, очевидно, в каждом из этих квадратов надо поместить не более одного из них. Это означает, что больше шестнадцати королей, удовлетворяющих условию задачи, расставить невозможно. Итак, максимальное число мирных королей равно 16 (рис. 6). Число способов, которыми можно расположить на шахматной доске 16 королей, не угрожающих друг другу, составляет 281571.

Рис. 6. Задача о мирных королях.

Обобщим последнюю задачу для доски nxn. Если n четно, то доска разбивается на $n^2/4$ квадратов, и искомое число королей равно $n^2/4$. При нечетных n доска разбивается на $(n-1)^2/4$ квадратов 2x2, на каждый из которых можно поставить по королю; еще n королей умещается на границе доски, и всего получаем $(n+1)^2/4$ мирных королей. Случай $n=9$ представлен на рис. 3, на доске стоят 25 королей. Если n представить в виде $n=2k$ или $n=2k-1$, то искомое число мирных королей на доске nxn, независимо от четности n, записывается как k^2.

5. **Слон**. Рассмотрим стандартную доску $n\times n$. Число диагоналей, идущих в одном направлении, равно (2n-1), из них две диагонали содержат по одной (угловой) клетке. Эти одноклеточные диагонали нельзя занимать слонами одновременно, ибо в противном случае слоны могли бы атаковать друг друга по главной диагонали, соединяющей занятые ими клетки. Следовательно, максимальное число слонов, которые могут разместиться на доске так, что они не будут атаковать друг друга, равно (2n-2). Доказано, что общее число расстановок равно 2^n, причем в каждой из них все слоны располагаются на краю доски[1;69].

В частности, на обычной доске 8×8 можно расставить 14 мирных слонов, причем сделать это можно 256 способами.

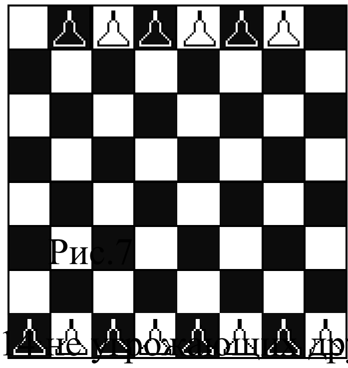

Рис.7

На рис. 7 показана расстановка 14 не угрожающих друг другу слонов.

Независимость шахматных фигур на цилиндрической доске

1. Конь. При “сворачивании” доски решение данной задачи для коня не меняется, потому что чередование полей доски не меняется. Значит, при расположении коней на полях одного цвета, они не будут нападать друг на друга.

2. Ладья. Для ладьи также ничего не меняется, т.к. не происходит смещения горизонтали и вертикали.

3. Ферзь. Задача о ферзях для цилиндрической доски 8×8 приобретает следующий вид: На цилиндрической доске 8×8 расставить 8 ферзей так, чтобы никакие 2 на атаковали друг друга, невозможно. Докажем это.

Рассмотрим вертикальную цилиндрическую доску. Запишем на каждом поле доски номер вертикали, горизонтали и диагонали, проходящих через это поле (рассматриваются диагонали, параллельные стрелкам; нумерация видна на рис. 8).

Если 8 ферзей не угрожают друг другу, то на восьми полях, занимаемых ими, все первые цифры должны быть различны и, значит, образуют полный набор чисел 1,2, …,8. То же утверждение справедливо для вторых и третьих цифр. Итак, сумма всех 24 цифр, стоящих на восьми полях с ферзями, равна (1+…+8)×3=108. Т.к. сумма цифр каждого поля делится на 8, то и найденная сумма должна быть кратна 8, однако 108 на 8 не делится – противоречие! [1;147]

187	286	385	484	583	682	781	888
178	277	376	475	574	673	772	871
161	268	367	466	565	664	763	862
152	251	358	457	556	655	754	853
143	242	341	448	547	646	745	844
134	233	332	431	538	637	736	835
125	224	323	422	521	628	727	826
116	215	314	413	512	611	718	817

Рис.8

Путем перебора получено, что на цилиндрической доске можно расставить не более 6 мирных ферзей.

4. Король. В случае цилиндрической доски при четных n получим $n^2/4$ квадратов, т.е. искомое число королей равно $n^2/4$. При нечетных n доска также разбивается на $(n-1)^2/4$ квадратов 2×2, на каждый из которых можно поставить по одному королю; но на границе доски умещается уже не n королей, а (n-1)/2, и в итоге получаем $(n-1)^2/4+(n-1)/2=(n^2-1)/4$ мирных королей.

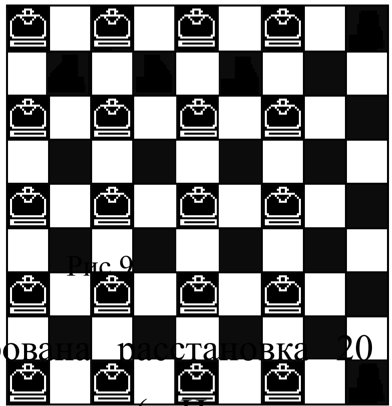

Рис 9

На рис. 9 продемонстрирована расстановка 20 мирных королей на вертикальной цилиндрической доске. (На рисунке показана развертка цилиндрической доски). Рисунок иллюстрирует тот факт, что, поставить королей на «последний» столбец нельзя, т.к. он полностью «просматривается» королями «первого» столбца.

5. Слон. Все диагонали цилиндрической доски одинаковые. Всего на цилиндрической доске n диагоналей, идущих в одном направлении. Следовательно, максимальное число не угрожающих друг другу слонов равно n. Определим, сколькими способами можно расставить n мирных слонов на цилиндрической доске n×n.

Рассмотрим диагонали, идущие в одном направлении. На первую диагональ можно произвольно поставить одного слона n способами, затем на вторую диагональ – (n-1) способами (одна из диагоналей, идущих в противоположном направлении, находится под наблюдением уже поставленного слона), на третью диагональ – (n-2) способами, и т.д., вплоть до (n-1) диагонали, на которой для слона осталось 2 «безопасных» поля, и последней, n-ой диагонали, с единственным полем для слона. Получаем n·(n-1)·(n-2)·…·2·1=n! различных расположений слонов.

В частности, на цилиндрической доске 8×8 можно расставить 8 не атакующих друг друга слонов 40320 способами.

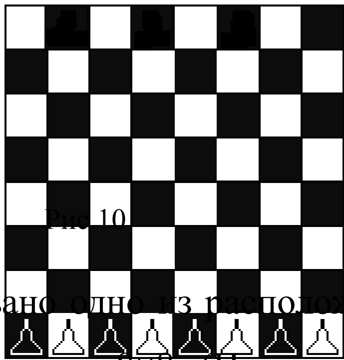

Рис 10

На рис. 10 продемонстрировано одно из расположений 8 мирных слонов на вертикальной цилиндрической доске 8×8. (На рисунке показана развертка цилиндрической доски).

Независимость шахматных фигур на тороидальной доске

1. **Конь**. При “сворачивании” доски решение данной задачи для коня не меняется, потому что чередование полей доски не меняется. Значит, при расположении коней на полях одного цвета, они не будут нападать друг на друга.

2. **Ладья**. Для ладьи также ничего не меняется, т.к. не происходит смещения горизонтали и вертикали.

3. **Ферзь**. Путем перебора получили, что максимальное число независимых ферзей на тороидальной доске 8x8 - 6. Для доски nxn формула не выведена.

4. **Король**. Если n четно, то ответ тот же, что и для обычной доски — $n^2/4$, в частности, расстановка королей на доске 8x8 (см. рис. 11) проходит и для тороидальной доски — при склеивании краев обычной доски все короли по-

прежнему будут находиться в отдалении друг от друга, Иначе обстоит дело при нечетных n. Например, при склеивании краев доски 9x9 (см. рис. 4) многие короли окажутся соседями — как стоящие на одной вертикали (a1 и a9 и т.д.), так и стоящие на одной горизонтали (a1 и i1 и т.д.). Можно показать, что на нечетной, тороидальной доске nxn максимальное число не угрожающих друг другу королей равно $(n^2-\square n)/4$, т.е. на доске 9x9 вместо 25 мирных королей умещается только 18. Искомая расстановка для этой доски показана на рис. 9, где все короли располагаются на полях, отдаленных друг от друга ходом коня. Нетрудно проверить, что при склеивании краев этой доски никакие два короля не становятся соседями.

Рис. 11. Короли на тороидальной доске.

5. **Слон**. Каждый слон будет проходить 1 круг (может за 1 ход пройти 8 полей, вернувший туда, откуда начал), т.е. максимально возможное число независимых слонов – 8 (на доске 8x8). На
доске nxn – n.

Независимость шахматных фигур на круглой доске

1. **Конь.** На круглой доске решение данной задачи для коня не меняется, потому что чередование полей доски не меняется. Значит, при расположении коней на полях одного цвета, они не будут нападать друг на друга.

2. **Ладья.** Для ладьи путем перебора получено, что на круглой доске можно расставить не более 4 мирных ладей.

3. **Ферзь** . Аналогично ладье.

4. **Король.** (Как и в стандартной доске) . Итак, максимальное число мирных королей равно 16.

5. **Слон.** Все диагонали круглой доски одинаковые. Всего на круглой доске 16 диагоналей, идущих в одном направлении. Следовательно, максимальное число не угрожающих друг другу слонов равно 16.

Стандартная доска

Цилиндрическая доска

Тороидальная доска

Круглая доска

Король

16

16

16

16

Ферзь

8

6

6

4

Ладья

8

8

8

4

Слон

14

8

8

16

Конь

32

32

32

32

Табл. 1. Независимость шахматных фигур

Глава III: Доминирование шахматных фигур

Какое наименьшее число одноименных фигур (ферзей, ладей, слонов, коней или королей) можно расставить на доске так, чтобы они держали под обстрелом все свободные поля доски?

Число доминирования - наименьшее число одноименных фигур, которые можно расставить на шахматной доске так, чтобы они держали под обстрелом все свободные поля доски (D_n).

Доминирование шахматных фигур на стандартной доске

1.**Конь**. Для доминирования на обычной доске достаточно иметь 12 коней (рис. 12). Меньше 12 не хватит, т.к. каждое из 12 красных полей бьют разные кони. В общем случае эта задача для коней не решена.

Рис. 12. Двенадцать коней-часовых.

2. **Ладья**. Dn(Л)=n, число расстановок равно $2n^n$-n!(при любой расположении менее n ладей найдется хотя бы одна вертикаль и хотя бы одна горизонталь без ладей, т.е. n — это наименьшее число доминирующих ладей на доске nxn). .На шахматной доске имеем $2 \cdot 8^8$-8! расстановок восьми доминирующих ладей.

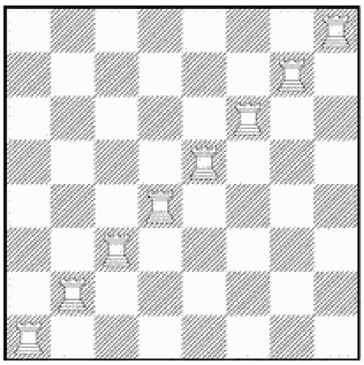

Рис. 13. Восемь доминирующих ладей.

3.**Ферзь**.

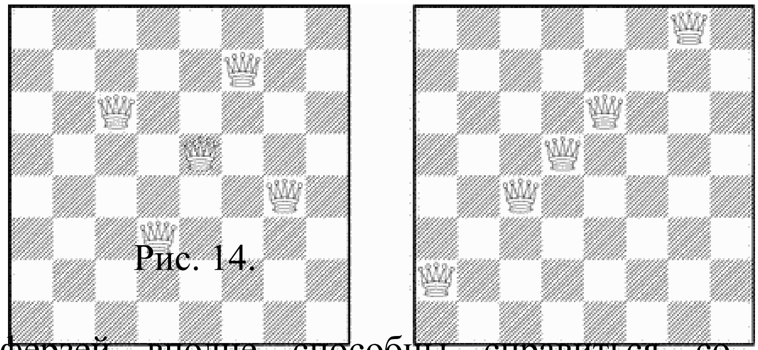

Рис. 14.

Оказывается, пять ферзей вполне способны справиться со всей шахматной “тюрьмой” Доказано, что всего существует 4860 расстановок этих пяти ферзей-часовых. В расстановке, изображенной на рис. 12.а, ферзи держат под обстрелом все свободные поля доски, но сами не угрожают друг другу. На рис. 14.б ферзи стоят на одной диагонали и, значит, обстреливают не только свободные поля доски, но и занятые.

С увеличением размеров доски необходимое число ферзей-часовых, естественно, возрастает. Любопытно, однако, что пяти ферзей хватает и для обстрела свободных полей досок 9x9, 10x10 и даже 11x11.

4.**Король**. В каждом из девяти прямоугольников, выделенных на рис. 13 (пять из них квадраты), имеется одно поле (на нем стоит король), которое может быть атаковано только королем, находящимся в этом же прямоугольнике. Следовательно, для того чтобы все свободные поля доски были под угрозой, в каждом из наших девяти прямоугольников должен стоять хотя бы один король. Число девять и является решением задачи для обычной доски.

Рис. 15. Задача о королях-часовых.

Для доски nxn задача также решается с помощью ее разбиения на квадраты 3x3 и граничные прямоугольники, содержащие остальные поля. В зависимости от остатка, который получается при делении числа n на 3, его можно представить одним из трех способов: n=3k, n=3k-□1, n=3k□-2. Оказывается, наименьшее число королей, которые держат под угрозой все свободные поля доски nxn, записывается очень просто — k^2. При n=8 имеем n=8=3·3□-1 (см. второе представление для n), т.е. k=3, и $k^2=9$ (см. рис. 13).

5.**Слон**. Мы знаем, что Dn(C)=n, и на доске 8x8 доминируют 8 слонов (при любой расположении менее n слонов найдется хотя бы одна диагональ без слонов, т.е. n — это наименьшее число доминирующих слонов на доске nxn). Хотя формула для числа расстановок n слонов, доминирующих на доске nxn, имеет довольно громоздкий вид, приведем ее. Число расстановок слонов равно $[(2k-1)!(4k^2+k)]^2$ при n=4k; $[(2k)!(4k^2+5k+2)]^2$ при n=4k+2 и, наконец, $2(k!)^2(k+2)$ при n=2k-1 (k > 0).

Интересно, что при четных n число различных расстановок n доминирующих слонов, представляет собой полный квадрат. В частности, на обычной доске имеем [(2·2-1)!(4·22+2)]2=1082=11664 расстановок слонов-часовых. Понятно, в чем здесь дело. Белопольные и чернопольные слоны можно расставлять отдельно друг от друга. При этом, если доска четная, число расстановок белопольных слонов, обладающих некоторым свойством (независимости или доминирования), равно числу расстановок чернопольных слонов, обладающих тем же свойством. Пусть это число равно t. Комбинируя каждую из расстановок белопольных слонов с каждой из расстановок чернопольных слонов, всего получаем t^2 расстановок слонов, обладающих выбранным свойством.

Доминирование шахматных фигур на цилиндрической доске.

1. Конь. Очевидно, что на цилиндрической доске решение данной задачи выглядит также, т.к. каждое из 12 красных полей (рис.12.) по-прежнему бьют разные кони.

2. Ладья. Т.к. при любой расположении менее n ладей найдется хотя бы одна вертикаль и хотя бы одна горизонталь без ладей, т.е. n — это наименьшее число доминирующих ладей на доске nxn.

3. Ферзь. Путём перебора выяснилось, что для цилиндрической доски необходимо также 5 ферзей.

4. Король. Оказывается, на цилиндрической доске эта задача решается также, а значит формула, полученная для обычной доски, применима и для цилиндрической доски.

5. Слон. При любой расположении менее n слонов найдется хотя бы одна диагональ без слонов, т.е. n — это наименьшее число доминирующих слонов на доске nxn, т.е. решение для цилиндрической доски совпадает с решением для стандартной доски.

Доминирование шахматных фигур на тороидальной доске.

1.**Конь**. Очевидно, что на тороидальной доске решение данной задачи выглядит также, т.к. каждое из 12 красных полей (рис.10.) по-прежнему бьют разные кони.

2.**Ладья**. Т.к. при любой расположении менее n ладей найдется хотя бы одна вертикаль и хотя бы одна горизонталь без ладей, т.е. n — это наименьшее число доминирующих ладей на доске nxn.

3.**Ферзь**. Путём перебора выяснилось, что для тороидальной доски необходимо также 5 ферзей.

4.**Король**. Оказывается, на тороидальной доске эта задача решается также, а значит формула, полученная для обычной доски, применима и для тороидальной доски.

5.**Слон**. При любой расположении менее n слонов найдется хотя бы одна диагональ без слонов, т.е. n — это наименьшее число доминирующих слонов на доске nxn, т.е. решение для тороидальной доски совпадает с решением для стандартной доски.

Доминирование шахматных фигур на круглой доске

1. Конь. При рассмотрении круглой доски чередование полей доски значительно не меняется не меняется., поэтому задача не усложняется. В расположении коней меняется лишь то, что они расположены на доске не тройками, а четверками. Количество фигур на поле остается тем же – 12.

2. Ладья. В случае с ладьей все очень просто. Так как доска круглая достаточно выставить ладьи шеренгой по радиусу доски. Этот радиус состоит из четырех клеток, значит и фигуры нам понадобится 4.

3. Ферзь. С ферзем дела обстоят так же, как и с ладьей. Следовательно нам необходимо выставить 4 фигуры.

4.**Король**. Как и в случае классической доски мы разбиваем все поле на квадраты три на три, которые контролирует один король. Из-за размеров доски идеально поделить ее не получается и у нас остаются незатронутые области (1x3 и 1x4). В оставшиеся области мы можем в первом случае поместить одного короля, а во втором придется помещать двух. Таким образом общее количество фигур получается равным 12.

5. **Слон**. Со словами дела обстоят довольно сложно. Из-за формы доски у них получается очень ограниченное движение. Из-за чего приходится

использовать гораздо больше фигур нежели в случае со стандартной доской. В ходе экспериментов было получено число необходимых слонов – 16.

Стандартная доска

Цилиндрическая доска

Тороидальная доска

Круглая доска

Король

9

9

9

12

Ферзь

5

5

5

4

Ладья

8

8

8

4

Слон

8

8

8

16

Конь

12

12

12

12

Табл. 2. Доминирование шахматных фигур

Глава IV: Олимпиадные задачи

Как было уже сказано, при решении обозначенной комбинаторной проблемы рождается много интересных задач. Рассмотрим одну из них, как следствие результатов, полученных выше.

Задача: Каким наименьшим числом красок надо воспользоваться для раскраски доски, чтобы любые два поля, связанные ходом данной фигуры (ферзя, ладьи, коня, слона или короля), были окрашены в разные цвета?

Иначе говоря, спрашивается, при какой раскраске доски фигуры, стоящие на полях одного цвета, не угрожают друг другу. Решим данную задачу для коня, слона и ладьи на всех четырех досках.

Олимпиадные задачи на стандартной доске.

Меньше всего красок – две – требуется в случае коней. Собственно здесь и раскрашивать нечего, годится обычная черно-белая доска. Двух красок хватает для раскраски любой доски $n \times n$, а при $n=1$ или 2, можно ограничиться и одной краской. (Выше было показано, что конь ставит под удар только коня с поля другого цвета). В случае слонов и ладей для раскраски обычной доски достаточно восьми красок (а для раскраски доски $n \times n$ – n красок). Выше было показано, что ладья ставит под удар все поля горизонтали и вертикали поля, на котором она находится. Слон же ставит под удар две диагонали, которые пересекаются на поле, где стоит слон. Раскрасить доску можно следующим образом. Каждую вертикаль доски, заполненной слонами, можно окрасить в свой цвет. Для ладей все поля первой горизонтали окрасим в разные цвета, а для раскраски последующих горизонталей используем циклический сдвиг красок. Другими словами, если краски занумеровать числами от 1 до 8 (для доски $n \times n$ – числами $1,2,\ldots n$), то окраска первой горизонтали – $1,2,\ldots 8$; второй – $2,3,\ldots,8,1$; третьей – $3,4,\ldots,8,1,2$ и т.д.; восьмой – $8,1,\ldots,7$.

Олимпиадные задачи на тороидальной доске

Так же, как и в случае обычной доски, меньше всего красок – две – требуется в случае коней. Двух красок, очевидно, хватает для раскраски любой доски $n \times n$, а при $n=1$ или 2, можно ограничиться и одной краской. Число независимости коня на тороидальной доске такое же, как и на обычной. Выше было показано, что при переходе на тороидальную доску для коня ничего не меняется. Поэтому и для раскраски полей тоже ничего не измениться. В случае слонов и ладей для раскраски тороидальной доски размером 8×8 достаточно восьми красок (а для раскраски тороидальной доски $n \times n$ – n красок). Раскраска производится аналогично раскраске обычной доски. Для слона при переходе на тороидальную доску «диагонали» доски тоже будут пересекаться только на том поле, где стоит фигура. Поэтому задача о раскраске решается аналогично, хотя число независимости изменяется.

Олимпиадные задачи на цилиндрической доске

Так же, как и в случае обычной доски, меньше всего красок – две – требуется в случае коней. Двух красок, очевидно, хватает для раскраски любой доски $n \times n$, а при $n=1$ или 2, можно ограничиться и одной краской. Число независимости коня на цилиндрической доске такое же, как и на обычной. Выше было показано, что при переходе на цилиндрическую доску для коня ничего не меняется. Поэтому и для раскраски полей тоже ничего не измениться. В случае слонов и ладей для раскраски цилиндрической доски размером 8×8 достаточно восьми красок (а для раскраски цилиндрической доски $n \times n$ – n красок). Раскраска производится аналогично раскраске обычной доски. Для слона при переходе на цилиндрическую доску «диагонали» доски тоже будут пересекаться только на том поле, где стоит фигура. Поэтому задача о раскраске решается аналогично, хотя число независимости изменяется.

Олимпиадные задачи на круглой доске

Так же, как и в случае обычной доски, меньше всего красок – две – требуется в случае коней. Двух красок вполне хватает для раскраски доски. Число независимости коня на круглой доске такое же, как и на обычной. Выше было показано, что при переходе на тороидальную доску для коня ничего не меняется. Поэтому и для раскраски полей тоже ничего не измениться. Для ладей наименьшим числом будет 16 (по количеству клеток на горизонтали). Клетки вертикали могут быть раскрашены любыми цветами, главное чтобы они не повторялись, то есть на одной вертикали может быть 4 любых цвета из 16 предложенных. Для слонов из подсчета доминирования можно сделать вывод, что красок нужно 4, мы окрашиваем горизонталь в один цвет и через 4 прямые мы можем повторить цвет.

Глава V: Сила шахматных фигур

Сила фигуры - величина относительная и зависит от конкретной обстановки на доске. Очевидно, фигура тем сильнее, чем большее число полей она держит под ударом. Число атакованных полей зависит от ее положения на доске, и для всех фигур, кроме пешки (которая ходит одним способом, а бьет - другим), совпадает с числом полей, достижимых из данного поля за один ход.

Подсчитывая число возможных ходов фигуры х с каждого поля доски и складывая эти числа, получаем общее число ходов S(x). Деля S(x) на число полей, доступных фигуре, получаем P(x) - ее подвижность. Выразить количественно силу фигуры х можно, деля P(x) на подвижность пешки P(п).

Найдем силу фигур на обычной доске, а затем перейдем к нестандартным доскам.

Сила шахматных фигур на стандартной доске.

1. Пешка. Для пешки считаем поля, на которые она может пойти без взятия, и поля, которые она держит под охраной (перемещаясь на них при взятии). Тот факт, что при достижении последней горизонтали она может превратиться в разные фигуры, мы сейчас во внимание не принимаем (см. рис. 14, б).

$$S(п) = 2*10+3*32+4*6=140$$

2. **Король**. С угловых полей доски он может сделать по три хода, а с остальных крайних полей по пять. На внутренних полях доски в его распоряжении имеется восемь ходов (рис. 16, а). Суммируя, получаем общее число ходов короля на доске:

$$S(Кр) =3*4+5*24+8*36=420$$

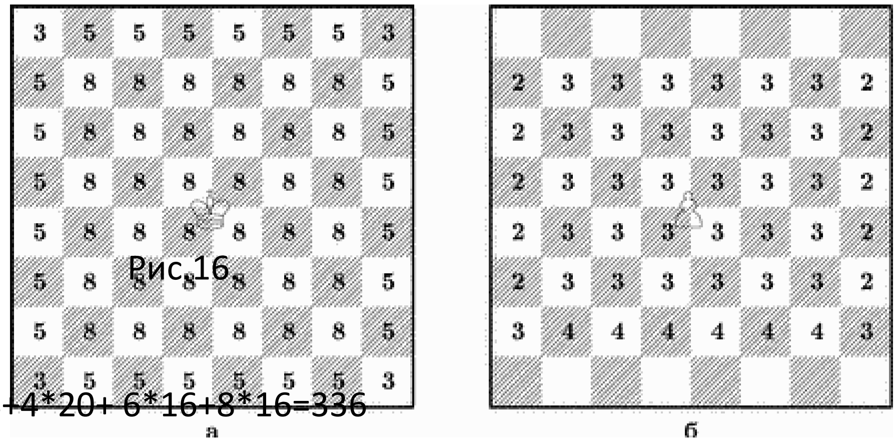

Рис.16.

3. **Конь**. S(к) = 2*4+3*8+4*20+ 6*16+8*16=336

4. **Слон**. S(с)= 7*28+9*20+ 11*12+13*4=560

5. **Ладья**. S(л) = 14*64=896

6. **Ферзь**. S(ф) = 21*28+23*20+ 25*12+27*4=1456

Число полей, доступных любой фигуре равно 64, исключение – пешка, R(п)=56.

Сила шахматных фигур на цилиндрической доске.

1. Пешка. С каждой клетки, начиная с третьего ряда, пешка может сделать по 3 хода, со второго ряда может сделать по 4 хода.

S(п) = 3*48+4*8=176

2. Король. S(Кр) =5*16+8*48=464

3. Конь. S(к) = 6*16+8*48=480

4. Слон. S(с)= 14*64=896

5. Ладья. S(л) = 14*64=896

6. Ферзь. S(ф) = 27*64=1728

Сила шахматных фигур на тороидальной доске.

1. **Пешка**. С каждой клетки, начиная с третьего ряда, пешка может сделать

по 3 хода, со второго ряда может сделать по 4 хода.

S(п) = 3*48+4*8=176

2. **Король**. С каждого поля доски король может сделать по 8 ходов, т.к. на тороидальной доске нет граней.

S(Кр) =8*64=512

3. **Конь**.S(к) =8*64=512

4. **Слон**. S(с) =14*64=896

5. **Ладья**. S(л) = 14*64=896

6. **Ферзь**. S(ф) = 27*64=1728

Т.к на тороидальной доске есть только условные грани, то все фигуры, кроме пешки. Могут сделать с любого поля доски наибольшее для них число ходов. Число полей, доступных любой фигуре равно 64, исключение – пешка, R(п)=56.

Сила шахматных фигур на круглой доске.

Пешка. Для пешки считаем поля, на которые она может пойти без взятия, и поля, которые она держит под охраной (перемещаясь на них при взятии). Тот факт, что она может превратиться в разные фигуры, мы сейчас во внимание не принимаем:

S(п) = 2*10+3*10+3*2+4*2=44

Посчитая число возможных ходов пешки , находим её подвижность .

P(п)=S(п)s(x)=4424=1.8

где s(x) доступное количество полей для пешки.

Король на внешних полях может сделать по 5 ходов, а во внутренних по 8.

S(Кр) =16*5+32*8+16*5=416

P(Кр)=41664=6.5

Для коня считали перемещение методом подбора . На крайних полях он может сделать 4 хода. А во внутренних по 6 .

$$S(к) = 16*4+32*6+16*4=320$$

$$P(к)=32064=5$$

Слон для любой клетки может ходить по 6 ходов по периметру .

$$S(с)= 16*6+16*6+ 16*6+16*6=384$$

$$P(с)=38464=6$$

Ладья: Из любой клетки ладья способна совершить 15 ходов по периметру и 3 по ширине. Поэтому для всей доски получаем:

$$S(л) = 18*64=1152$$

$$P(л)=115264=18$$

Ферзь – сочетание слона и ладьи. Следовательно, число его ходов равно

$$S(ф) = (18+6)*64=1536$$

$$P(ф)=153664=24$$

Ранее, мы получили подвижность для каждой фигуры ,чтобы узнать количественную силу фигуры нужно подвижность каждой фигуры P(x) разделить на подвижность пешки P(п) , которая равна 2.5

P_{XC}

P_{XZ}

P_{XT}

P_{XK}

F_{XC}

F_{XZ}

F_{XT}

F_{XK}

пешка

2.5

3.1

3.1

1,8

1

1

1

1

король

6.6

7.25

8

6,5

2.6

2.3

2.6

2,6

конь

5.25

7.5

8

5

2.1

2.4

2.6

2

слон

8.75

14

14

6

3.5

4.5

4.5

2,4

ладья

14

14

14

18

5.6

4.5

4.5

7,2

ферзь

22.75

27

27

24

9.1

8.7

8.7

8,4

Табл. 3. Подвижность и сила шахматных фигур.

Заключение

Итак, нами были достигнуты следующие поставленные задачи: мы исследовали стандартные и нестандартные шахматы, рассчитали независимость и доминирование шахматных фигур на них, получили относительные силы фигур и провели сравнительный анализ численных характеристик рассмотренных нами шахмат.

Так же нами на примере олимпиадной задачи было показано, что дает знание независимости и доминирования фигур в шахматах.
Подобные расчеты, касающиеся круглой доски до этого никем опубликованы не были.

Список литературы

1. Гик Е.Я. Шахматы и математика. – М., 1983.

2. Гик Е.Я. Занимательные математические игры. – М.,1987.

3. Окунев Л.Я. Комбинаторные задачи на шахматной доске. – М., 1935.