

Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 9-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Математическая гармония человеческого тела

Некрасова Анна Андреевна,
9 кл., МАОУ «СОШ №132», г. Пермь,
Молчанова Людмила Григорьевна,
учитель математики, информатики.

Пермь. 2014.

Оглавление

Введение.....	3
1. Обзор литературы.....	6
1.1. Золотое сечение в математике	6
1.2. Формула красоты	10
2. Методика исследования.....	14
3. Результаты и их обсуждение.....	16
Выводы	19
Список литературы	20
Приложение	21

Введение

Изучая в школе математику, мы часто слышим, что без знания этой науки никак не обойтись в современной жизни. Но взгляните на странички наших учебников! Где они, эти пропорции, корни, пирамиды, синусы в окружающей нас действительности? Где же они прячутся – эти числа и математические закономерности во всём, что нас привлекает? А что же нас привлекает в жизни? Всё красивое и гармоничное! Но тогда как же это связано между собой - красота, гармония и ... математика?

Гармония в переводе с греческого языка означает связь, соразмерность, стройный порядок. В общем смысле гармония предполагает возможность единства в множественности. Это соединение, представляющее точную пропорцию между частями, которые составляют целое. Гармония возникает как порядок, согласно которому различные отношения, составляющие целое, разные функции существа или системы способствуют одной цели.

Первые исследования данного вопроса описаны в самом известном математическом сочинении античной науки - «Началах» Евклида (III век до н. э.), содержащих основы античной математики: элементарную геометрию, теорию чисел, алгебру, теорию пропорций и отношений, методы определения площадей и объемов и др. Именно из «Начал» Евклида к нам пришла следующая геометрическая задача, называемая задачей «о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» (золотое сечение), сущность которой сводилась к разделению отрезка АВ точкой С в таком отношении, чтобы большая часть отрезка СВ так относилась к меньшей части АС, как отрезок АВ к своей большей части СВ.

Но задолго до Евклида о золотом сечении, судя по всему, знали еще в древнем Египте, Вавилоне и Китае. Помимо геометрии принцип золотого сечения широко использовался в живописи, скульптуре, при изготовлении музыкальных инструментов и особенно в архитектуре. Строители египетских пирамид, Парфенона, средневековых соборов, Витрувий,

Фидий, Леонардо да Винчи, Пифагор, Евклид, Платон, Кеплер и Пачоли, скрипичный мастер Страдивари — вот лишь малая, но представительная часть списка тех, чьи имена, так или иначе связаны с историей золотого сечения.

Впоследствии, в течение многих столетий ученые не уделяли должного внимания развитию математического аппарата для моделирования «золотого» мира, который существует в реальной действительности. Однако в современной науке интерес к Золотому Сечению возрос с новой силой. Золотое Сечение оказалось источником новых и плодотворных идей в математике, теоретической физике и кристаллографии, экономике, биологии, ботанике, компьютерной науке, теории кодирования и криптографии. Поэтому данная работа не теряет своей **актуальности** в наше время. Применяя «сухие» законы математики для исследования реальных живых объектов (в нашей работе это учащиеся 8-х классов), мы убеждаемся в том, что за всем, что вызывает у нас эстетическое наслаждение, скрываются математические закономерности.

Цель данной работы познание математических закономерностей в мире и дополнение системы знаний представлениями о “Золотом сечении” как мере красоты человеческого тела.

Для реализации объявленной цели были поставлены следующие **задачи:**

- Познакомиться с понятием «золотого сечения» и его свойствами.
- Установить как связаны золотое сечение и идеальные пропорции человеческого тела.
- Сравнить пропорции учащихся 8-х классов с идеальными.
- Установить соответствие идеальных показателей с показателями учащихся 8 класса.

При выполнении работы были использованы следующие **методы:**

1. Теоретический: изучение и анализ литературы, постановка целей и задач.

2. Экспериментальный: определение, какие части человеческого тела делится в золотых пропорциях, и их измерение у учащихся 8-х классов.
3. Математический: расчет «золотого сечения» по полученным измерениям, визуализация полученных данных.
4. Эмпирический: описание и объяснение результатов исследований.

1. Обзор литературы

1.1. «Золотое сечение» в математике.



“Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них - это теорема Пифагора, а другое - деление отрезка в среднем и крайнем отношении ... Первое можно сравнить с мерой золота; второе же больше напоминает драгоценный камень”.

Иоганн Кеплер.

С давних пор человек стремится окружать себя красивыми вещами.

На определенном этапе своего развития человек начал задаваться вопросом: почему тот или иной предмет является красивым и что является основой прекрасного? Ещё у древних греков родилось представление о том, что основой прекрасного является гармония.

О золотом сечении знали еще в древнем Египте и Вавилоне, в Индии и Китае. Великий Пифагор создал тайную школу, где изучалась мистическая суть «золотого сечения». Евклид применил его, создавая свою геометрию, а Фидий — свои бессмертные скульптуры. Платон рассказывал, что Вселенная устроена согласно «золотому сечению». Аристотель нашел соответствие «золотого сечения» этическому закону. Высшую гармонию «золотого сечения» будут проповедовать Леонардо да Винчи и Микеланджело, ведь красота и «золотое сечение» — это одно и то же. А христианские мистики будут рисовать на стенах своих монастырей пентаграммы «золотого сечения», спасаясь от Дьявола. При этом ученые — от Пачоли до Эйнштейна — будут искать, но так и не найдут его точного значения.

Красота скульптуры, красота храма, красота картины, симфонии, поэмы... Что между ними общего? Разве можно сравнивать красоту храма с красотой ноктюрна? Оказывается можно, если будут найдены единые критерии прекрасного, если будут открыты общие формулы красоты, объединяющие понятие прекрасного самых различных объектов - от

цветка ромашки до красоты человеческого тела...". И эта формула – формула золотого сечения – некий универсальный информационный код красоты (число), соединяющий разные искусства и разные века в интуитивном постижении прекрасного.

Итак, “золотое сечение” – это такое деление целого на две неравные части, при котором целое так относится к большей части, как большая к меньшей, или другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему (рис. 1):

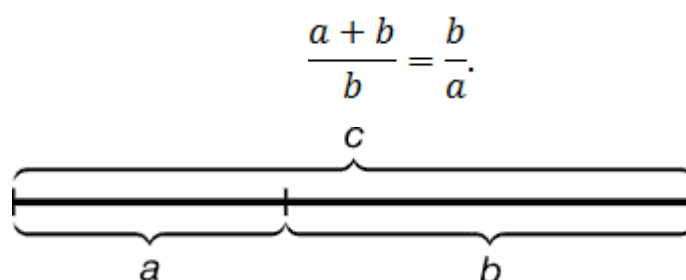


Рисунок 1. Золотое сечение или деление отрезка в крайнем и среднем отношении

Такая задача имеет решение в виде корней уравнения:

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

единственный положительный корень которого

$$x_+ \equiv \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ 63811\ 77203\ \dots$$

и есть число (константа) золотого сечения.

дал это название числу 0,618, убедившись в том, что рост Как известно, это число называется числом φ (ФН) в честь выдающегося греческого скульптора Фидия (Phidias), который широко использовал это уникальное число в своих скульптурах.

Термин «золотое сечение» (aurea sectio) идет от Клавдия Птолемея, который человека правильного телосложения естественно делится именно в таком отношении. Закрепился же данный термин и стал популярным благодаря Леонардо да Винчи, который часто его использовал.

Вот первое поразительное свойство φ :

$$\frac{1}{\varphi} \approx \varphi - 1, \text{ то есть } \frac{1}{1,618} \approx 1,618 - 1.$$

Такое невозможно ни с одним другим числом.

Вот еще одно удивительное равенство:

$$\varphi^2 \approx \varphi + 1.$$

то есть: $1,618 \times 1,618 \approx 2,618 = 1,618 + 1.$

Итак, “золотое сечение” – это иррациональное число, оно приблизительно равно 1,618.

Задача 1. Возьмите отрезок длиной 10 см и разделите его приблизительно в золотом отношении.

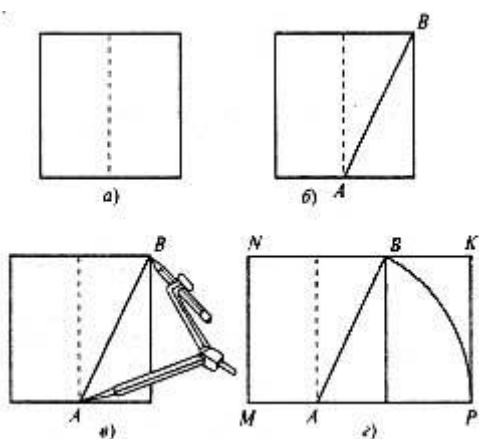
(6,2 см и 3,8 см) одна часть отрезка больше другой в 1,6 раза.

Части “золотого сечения” составляют приблизительно 62% и 38% всего отрезка.

В эпоху Возрождения “золотое сечение» было очень популярным среди художников, скульпторов, архитекторов. Так, выбирая размеры картины, художники старались, чтобы отношение ее сторон равнялось Φ . Такой прямоугольник стали называть “золотым”.

Задача 2. Построим золотой прямоугольник.

Начертим квадрат и разделим его на два равных прямоугольника. В одном из прямоугольников проведем диагональ АВ. Циркулем проведем окружность радиуса АВ с центром в точке А. Продолжим основание квадрата до пересечения с дугой в точке Р и проведем под прямым углом вторую сторону искомого прямоугольника.

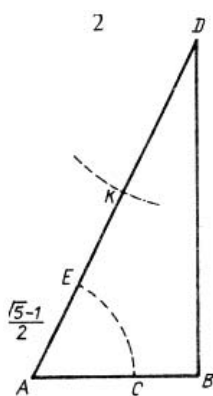


Измерьте линейкой длины сторон построенного прямоугольника MNKP и вычислите отношения большей стороны к меньшей. (Отношение сторон должно быть примерно равно 1,6).

Но как же разделить отрезок в золотом отношении?

С помощью непосредственных измерений сделать это невозможно, поскольку число Φ –иррациональное. Древние мастера использовали

циркуль и линейку, причем были найдены различные способы построения. Рассмотрим один из них, самый простой.



Пусть дан отрезок AB , и надо осуществить его “золотое сечение”. Проведем перпендикуляр к отрезку AB (будем считать, что $AB=1$) и отложим на нем отрезок $BD = 2AB$. Из точки D проведем окружность радиусом DK , где $DK=AB$.

Проведем окружность с центром в точке A и радиусом $AE=1/2AK$. Она пересечет отрезок AB в точке C золотого сечения.

Итак, найдена, казалось бы, совершенно ординарная точка на обычном отрезке. А между тем ею обеспечивается присутствие красоты, соразмерности всех частей.

На основании пропорции золотого сечения был построен ряд чисел, замечательный тем, что каждое последующее число оказывалось равным сумме двух предыдущих. Этот ряд был открыт итальянским математиком средневековья Леонардо Пизанским, более известным под именем Фибоначчи (родился около 1170 - умер после 1228). После его открытия числа эти так и стали называться именем известного математика. Ряд Фибоначчи обладает тем свойством что, отношения между соседними членами по мере возрастания чисел ряда, все более приближаются к 0,618, то есть, к отношению золотого сечения.

Числа, образующие последовательность 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ... называются "числами Фибоначчи", а сама последовательность - последовательностью Фибоначчи.

В числах Фибоначчи существует одна очень интересная особенность. При делении любого числа из последовательности на число, стоящее перед ним в ряду, результатом всегда будет величина,

колеблющаяся около иррационального значения $1.61803398875\dots$ и через раз то превосходящая, то не достигающая его.

Более того, после 13-ого числа в последовательности этот результат деления становится постоянным до бесконечности ряда... Именно это постоянное число деления в средние века было названо Божественной пропорцией, а ныне в наши дни именуется как золотое сечение, золотое среднее или золотая пропорция.

Было установлено, что числовой ряд чисел Фибоначчи характеризует структурную организацию многих живых систем.

Например, винтовое листорасположение на ветке составляет дробь (число оборотов на стебле/число листьев в цикле, напр. $2/5$; $3/8$; $5/13$), соответствующую рядам Фибоначчи. Хорошо известна "золотая" пропорция пятилепестковых цветков яблони, груши и многих других растений. Носители генетического кода - молекулы ДНК и РНК - имеют структуру двойной спирали; ее размеры почти полностью соответствуют числам ряда Фибоначчи.

Выяснилось, что в расположении листьев на ветке (филотаксис), семян подсолнечника, шишек сосны проявляет себя ряд Фибоначчи, а стало быть, проявляет себя закон золотого сечения.

1.2. Формула красоты.

Удивительно то, что и человек в соотношении отдельных частей тела и расстояний между ними, подчиняется законам "золотого сечения".

Немецкий учёный Альберт Дюрер доказал, что рост человека делится в золотых пропорциях линией, проходящей через пупок и линией, проходящей через кончики средних пальцев опущенных рук.

Его труды продолжил Цейзинг. Он выяснил, что пропорции мужского тела колеблются в пределах $13 : 8 = 1,625$. А пропорции женского тела в среднем находятся в соотношении $8 : 5 = 1,6$. Пропорции "золотого сечения" проявляются в отношении длины плеча, предплечья, кисти и пальцев и т.д.

Поразительно, но в лице человека можно проследить множество пропорций, подчиненных "золотому сечению". Причем, чем больше в лице человека соотношений в этой пропорции, тем красивее нам он кажется. Есть лица, при характеристике которых употребляют выражение "правильные черты лица". У этих людей основные пропорции наиболее близки к соотношению 1,618: или 62 : 38.

Какие же пропорции в лице человека стремятся к "золотому сечению"?

Прежде всего, у людей с красивыми лицами наблюдается:

- Идеальная пропорция между расстояниями от медиального угла глаза до крыла носа и от крыла носа до подбородка. Это соотношение называется "динамической симметрией" или "динамическим равновесием".



- Соотношение высоты верхней и нижней губы будет 1,618:
- Высота надгубной складки и высота губ будут составлять соотношение 62 : 38:
- Ширина одной ноздри суммарно с шириной переносицы относится к ширине другой ноздри в пропорции "золотого сечения".
- Ширина ротовой щели также относится к ширине между наружными краями глаз, а расстояние между наружными уголками глаз - к ширине лба на уровне линии бровей, как все пропорции "золотого сечения".
- Расстояние между линией верхней части лба до линии зрачков и расстояние между линией зрачков и линией смыкания губ имеет пропорцию "золотого сечения"

Получается, правильную красоту можно математически просчитать и даже прибегнуть к хирургической корректировке с целью

совершенствования внешности. В настоящее время стоматология, занимается не только лечением заболеваний полости рта, но и эстетической медициной.

Удивительно, но и в стоматологии можно проследить пропорции "золотого сечения". Красивая улыбка - это не только белоснежные здоровые ровные зубы, но и их правильное соотношение и расположение. И здесь мы опять сталкиваемся с закономерностью "золотого сечения"

Вот некоторые примеры соотношений размеров и расстояний между зубами:

- Ширина верхнего центрального резца относится к ширине нижнего центрального резца, как $62 : 38$, т.е. $1,618$; в соотношении "золотого сечения"

- В этой же пропорции находится ширина двух верхних резцов к ширине двух нижних.

- Расстояние между премолярами верхней челюсти относится к ширине четырёх верхних резцов, как $62 : 38$:

И этот список можно продолжить:

Как же на практике можно использовать знание о "золотом сечении" и его влиянии на параметры в стоматологии? Разумеется, искать применение золотых пропорций в эстетической стоматологии. Расположение, размер и взаимное соотношение зубов в полости рта - всё это подчинено общему закону - "золотому сечению". Вольно или невольно, врач использует эти пропорции при восстановлении коронковой части зуба, при протезировании или ортодонтических мероприятиях. Лучше, конечно, чтобы врач применял математическую составляющую в формировании вашей красоты и здоровья.

Кроме этого есть и еще несколько основных золотых пропорции нашего тела:

- расстояние от кончиков пальцев до запястья и от запястья до локтя равно $1:1.618$

- расстояние от уровня плеча до макушки головы и размера головы равно 1:1.618;
- расстояние от точки пупа до макушки головы и от уровня плеча до макушки головы равно 1:1.618;
- расстояние точки пупа до коленей и от коленей до ступней равно 1:1.618.

Художники, ученые, модельеры, дизайнеры делают свои расчеты, чертежи или наброски, исходя из соотношения золотого сечения.

Закономерности «золотой» симметрии проявляются и в генетическом коде человека. В «золотых» соотношениях находятся показатели артериального давления, пульса и дыхания. Циклическим колебаниям в «золотой» пропорции подвержены многие другие показатели человеческого организма, даже соотношение периодов сна (медленный сон – быстрый сон), находятся в пропорциях, близких к «ЗОЛОТЫМ».

Мы теперь знаем, что человек - только часть живого мира на нашей планете, подчиняющийся общим законам мироздания. И доказательство тому - учение о "золотом сечении", дошедшее до нас из глубины веков.

2. Методика исследования

Изучая правило "золотого сечения" и понимая, человек в соотношении отдельных частей тела и расстояний между ними, подчиняется этим законам, нам захотелось проверить насколько пропорции тел подростков близки к идеальным, поэтому мы выдвинули **гипотезу**, что пропорции подростков соответствуют правилам «золотого сечения».

Для проведения измерительных работ были использованы результаты немецкого учёного Альберта Дюрера, который определил, какие части человеческого тела делится в золотых пропорциях.

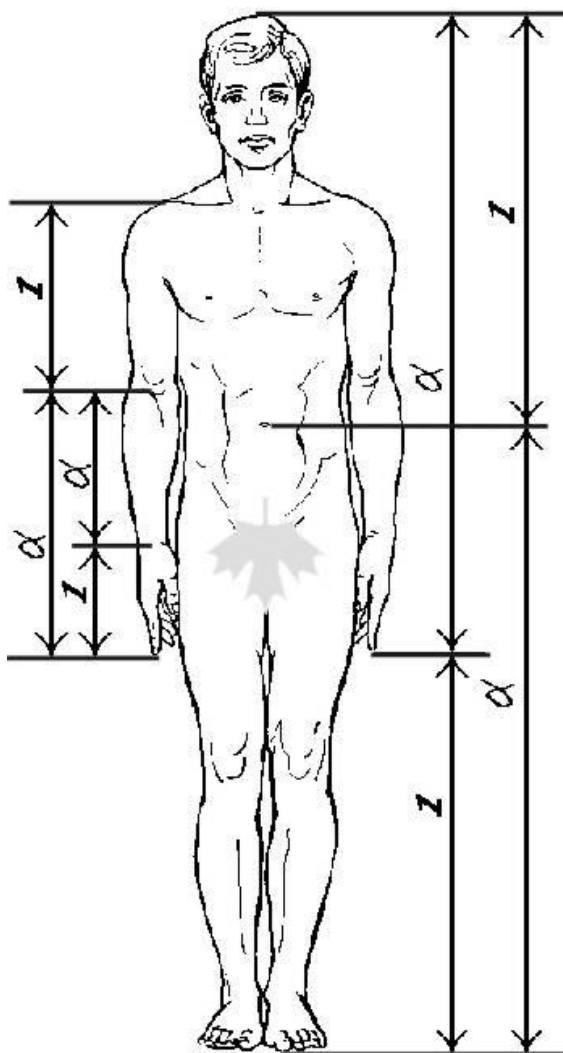


Рис.1. Пропорции человеческого тела, согласно теории Альберта Дюрера

Объектом исследования были выбраны учащиеся 8^х классов МАОУ «СОШ №132» г. Перми.

Оборудования, приборы, материалы: сантиметр, линейка.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить, какие части тела человека находятся в отношении золотого сечения.
2. Измерить следующие длины: рост, стопу, предплечье, плечо, кисть, расстояние от локтя до стопы.
3. Определить отношение роста к расстоянию от локтя до стопы, от плеча к предплечью, от предплечья к кисти.
4. Сравнить полученные результаты с «золотым сечением».
5. Сделать выводы по результатам исследования.

3. Результаты и их обсуждение

Для проведения эксперимента, были выбраны 10 учащихся 8 классов, которые отличаются по росту и по комплекции, произведены замеры роста, расстояния от локтя до стопы, плеча, предплечья, кисти (см. прил.). С помощью электронного приложения Microsoft Excel произведен расчет отношения роста и расстояния от локтя до стопы, плеча к предплечью и предплечья к кисти, согласно данным немецкого учёного Альберта Дюрера. (рис.1). Полученные результаты представлены в таблице 1, таблице 2 и таблице 3.

Таблица 1

Имя	Рост	От локтя до стопы	Отношение
Стас	173	114	1,52
Влад	173	108	1,60
Корнил	169	105	1,61
Максим	178	114	1,56
Гоша	172	110	1,56
Диана	158	101	1,56
Алена	175	112	1,56
Саша	160	100	1,60
Соня	155	95	1,63

Таблица 2

Имя	Плечо	Предплечье	Отношение
Стас	33	25	1,32
Влад	36	27	1,33
Корнил	36	25	1,44
Максим	37	29	1,28
Гоша	35	27	1,30
Диана	29	22	1,32
Алена	34	25	1,36
Саша	30	22	1,36
Соня	29	22	1,32

Таблица 3

Имя	Предплечье	Кисть	Отношение
Стас	25	19	1,32
Влад	27	19	1,42
Корнил	25	17	1,47
Максим	28	18	1,56
Гоша	27	18	1,50
Диана	24	15	1,60
Алена	25	19	1,32
Саша	22	16	1,38
Соня	22	15	1,47

Для подтверждения или опровержения гипотезы мы сопоставили «золотое сечение» и отношение пропорций учащихся, что наглядно изображено на графике. (рис.2, 3, 4)

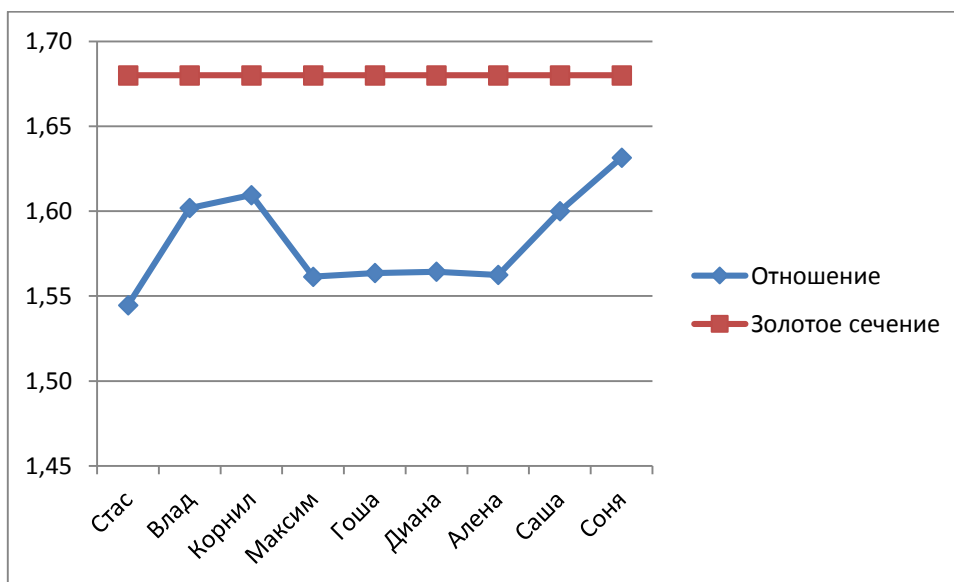


Рис.2. Сравнительный анализ отношений роста к расстоянию от локтя до стопы

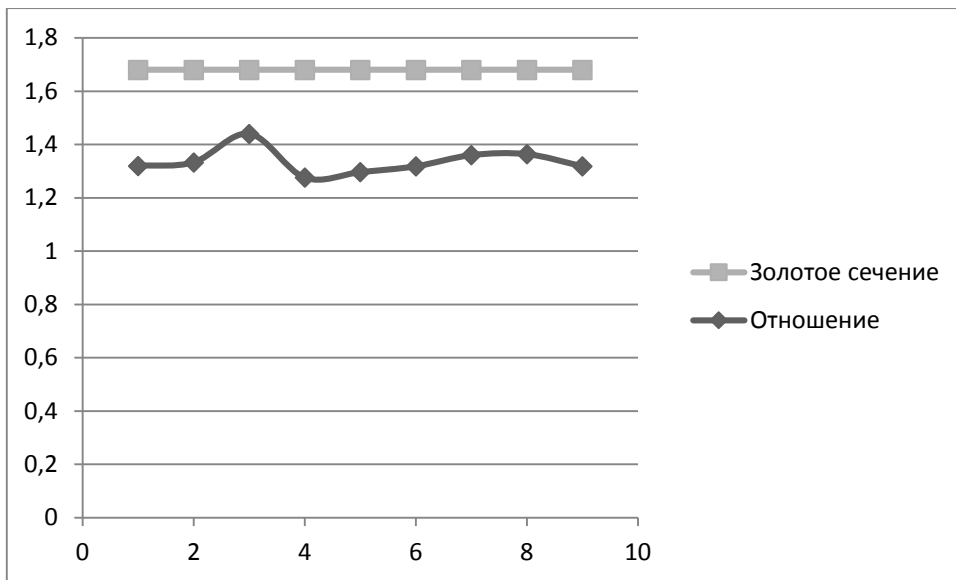


Рис.3. Сравнительный анализ отношений плеча к предплечью к золотому сечению

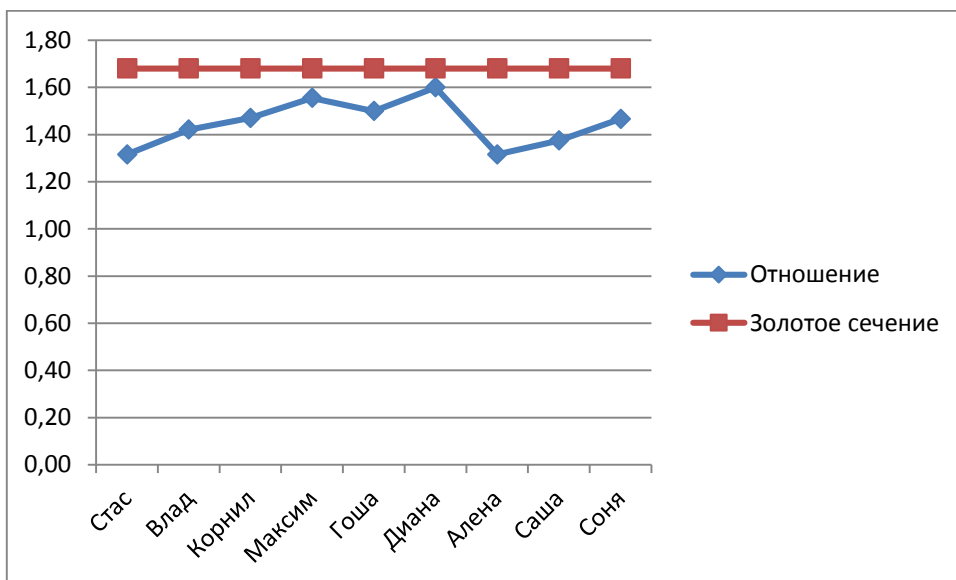


Рис.4. Сравнительный анализ отношений предплечья к кисти к золотому сечению

Выводы

В данной работе мы изучили динамическую симметрию, которая называется божественной пропорцией или «золотым сечением». Проведя измерения пропорции тела подростка (таб.1, 2, 3), мы проанализировали и установили, что полученные результаты отличаются от «золотого сечения» в среднем примерно на 0,2 (рис 2, 3, 4). С нашей точки зрения, это объясняется тем, что данные Альберта Дюрера были предложены для взрослого человека, а наши измерения проводились на подростках.

Однако, выбирая изначально учащихся разных комплекций и ростов, мы убедились, что искомые пропорции оказались в пределах одной величины. Отношение роста к расстоянию от локтя до стопы примерно равно 1,58, отношение предплечья к плечу - 1,44, отношения плеча к кисти - 1,33, что позволяет нам судить о пропорциональности тел подростков.

Таким образом, наша гипотеза о существовании особых числовых закономерностей, которые отвечают за гармонию, пропорциональность человеческого тела, подтверждается.

Литература

1. Фернандо Корбалан. Золотое сечение. Математический язык красоты. / Пер. с англ.- М.: Де Агостини, 2014.-160 с.
2. Бендукидзе А. Д. Золотое сечение «Квант» № 8, 1973
Васютинский Н. А. Золотая пропорция. -м.: Молодая гвардия,1990.-
238с. –(Эврика).
3. Шмигевский Н. В. Формула совершенства // Страна знаний.- 2010.-№
4.-С.2-7.
4. Сабанеев Л. Л. Этюды Шопена в освещении закона золотого сечения.
Опыт позитивного обоснования законов формы // Искусство.-1925.-
№2.-С.132-145; 1927.-№2-3.-С.32-56.
5. Гика М. Эстетика пропорций в природе и искусстве. – М.:
Издательство Всесоюзной академии архитектуры, 1936. -189 с.
6. <http://www.math.smith.edu/~phyllo/index.html>
7. <http://evolutionoftruth.com/abennett>

Приложение

