

Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 9-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Полезное и самое неуловимое число

Пешин Андрей Вячеславович,
8 кл., МБОУ «СОШ № 2», г. Оса,
Субботина Надежда Александровна,
учитель математики.

Пермь. 2014.

Оглавление

I. Введение	стр. 3
II. Полезное и самое неуловимое число	стр. 5
2.1.1. Геометрический период	стр.7
2.1.2. Классический период	стр. 9
2.1.3. Эра компьютерных вычислений	стр. 12
2.2. Свойства числа π	стр. 13
2.3. Занимательные факты, связанные с числом π	стр.14
2.4. Исследования π	
2.4.1. Практическая работа	стр. 20
2.4.2. Способы нахождения центра окружности	стр. 22
2.4.3. Лабораторная работа	стр. 23
III. Выводы	стр. 25
Литература	стр.26
Приложения	

I. Введение

Мало какому числу из всех чисел, которые используются в математике, в естественных науках, в инженерном деле и в повседневной жизни, уделяется столько внимания, сколько уделяется числу π («пи»). В одной книге говорится: «Число пи захватывает умы гениев науки и математиков-любителей во всем мире». Некоторые даже считают его одним из пяти важнейших чисел в математике.

Число π - это отношение длины окружности к ее диаметру. Вы можете вычислить длину окружности абсолютно любого круга, независимо от его радиуса. Для этого нужно умножить диаметр этого круга на π .

С развитием наук число π появляется в формулах, используемых во многих сферах. Физика, электротехника, электроника, теория вероятностей, строительство и навигация - это лишь некоторые из них. И кажется, что подобно тому, как нет конца знакам числа π , так нет конца и возможностям практического применения этого полезного, неуловимого числа π . И мне захотелось побольше узнать об этом загадочном числе π .

Появилась **проблема**: узнать неизвестное об известном числе π .

Цель исследования: доказательство того, что известное число π необычно.

Задачи:

- 1) Найти материал о числе π .
- 2) Провести практикум по вычислению числа π .
- 3) Провести анализ полученного результата.
- 4) Сравнить результаты практической работы со значением π .
- 5) Создать презентацию.

Методы:

- Поисковый
- Измерение (практическая работа)
- Лабораторная работа
- Сравнение и анализ

Гипотеза: возможно, что число π действительно необычно.

Объект исследования: необычность числа π .

Предмет исследования - число π .

II. Полезное и самое неуловимое число.

2.1. Большинство из нас будут удивлены, узнав, сколько людей интересуется числом π . В школе на нелюбимой многим геометрии мы уяснили, что это отношение длины окружности к диаметру, что ж тут может быть интересного? Но познакомившись поближе с этим виртуальным героем, мы будем удивлены еще больше, ибо история человечества предстанет нам как череда усилий величайших умов по уточнению знаков числа π и поисков алгоритмов для этого процесса.

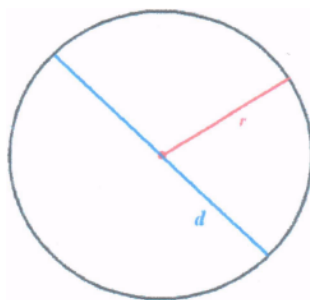
Число π - это постоянное число, равное отношению длины окружности к её диаметру и одинаково для всех окружностей.

L - Длина окружности.

D- диаметр

R- радиус.

$$\pi = L/D$$



Люди изучают число π уже на протяжении 4000 лет.

Специалисты считают, что **история Пи** началась еще в древнем Вавилоне. Одно из первых упоминаний о числе Пи можно встретить в текстах египетского писца по имени Ахмес (около 1650 года до н. э.), известных сейчас как папирус Ахмеса (Ринда). В папирусе Ахмеса запечатлена первая попытка рассчитать число Пи по «квадратуре круга», которая заключалась в измерении диаметра круга по созданным внутри квадратам.

Обозначение этого числа произошло от греческого слова «периферия» — то есть окружность. На греческом, окружность звучит как Perijerio.

Впервые обозначением этого числа греческой буквой π воспользовался британский математик Джонс в 1706 году, а общепринятым оно стало после работ Леонарда Эйлера в 1737 году. Символ Пи (π) используется в математических формулах уже на протяжении 250 лет.



Британский математик

Уильям Джонс

(1675-1749)

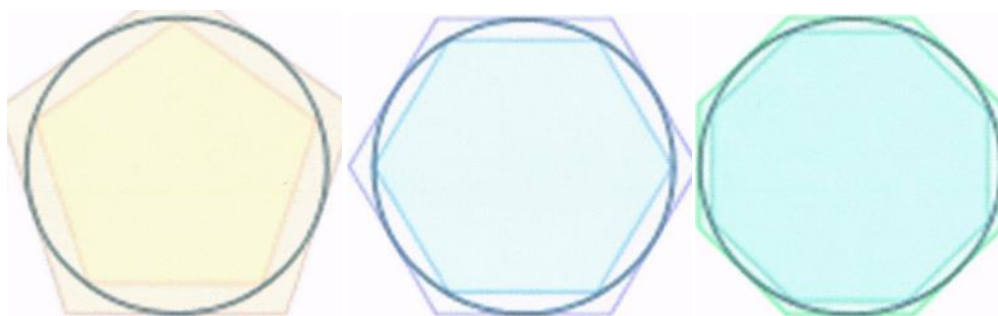
История числа π шла параллельно с развитием всей математики. Некоторые авторы разделяют весь процесс на 3 периода:

1. **Древний период**, в течение которого *и* изучалось с позиции геометрии
2. **Классическая эра**, последовавшая за развитием математического анализа в Европе 18 веке
3. **Эра цифровых компьютеров.**

2.1.1. Геометрический период.

То, что отношение длины окружности к диаметру одинаково для любой окружности, и то, что отношение немногим больше 3, было известно еще древнеегипетским, вавилонским, древнеиндийским и древнегреческим геометрам. Самое раннее из известных приближений датируется 1900 годом до н.э.: это $25/8$ (Вавилон) и $256/81$ (Египет), оба эти обозначения отличаются от истинного значения не более чем на 1%. Ведийский текст «Шатахапатха - брахмана» дает число π как $339/108$.

Архимед, возможно, первым предложил математический способ вычисления π . Для этого он вписывал в окружность и описывал около нее правильные многоугольники. Принимая диаметр окружности за единицу, Архимед рассматривал периметр вписанного многоугольника как нижнюю оценку длины окружности, а периметр описанного за верхнюю. Рассматривая правильный 96 угольник Архимед получил значение $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$ и предположил, что π примерно равняется $22/7$, что примерно 3,142857142857143.



Таб.1

	Число	Округленное значение	Точность вычисления
Вавилон	25/8	3,125	1 разряд после запятой
Египет	256/81	3,16049	1 разряд после запятой
Шатахапатха - брахмана	339/108.	3,13888...	1 разряд после запятой
Архимед	22/7	3.14285713...	2 разряда после запятой
Ариабхата	377/120	3.14166667...	3 разряда после запятой
Цзу Чунчжи	355/113	3.14159292...	6 разрядов после запятой

Вывод 1. Из данной таблицы видно, чем больше ученые занимались изучением числа, тем точнее стали его результаты.

2.1.2. Классический период.

До II тысячелетия было известно не более 10 цифр π . Дальнейшие крупные достижения в изучении π связаны с развитием математического анализа, в особенности с открытием рядов, позволяющих вычислить π с любой точностью, суммируя подходящее количество членов ряда. В 1400-х годах Мадхава из Сангамаграма нашёл первый из таких рядов:

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots$$

Этот результат известен как ряд Мадхавы — Лейбница, или ряд Грегори — Лейбница (после того как он был заново обнаружен Джеймсом Грегори и Готфридом Лейбницем в 17 веке). Однако этот ряд сходится к π очень медленно, что приводит к сложности вычисления многих цифр числа на практике — необходимо сложить около 4000 членов ряда, чтобы улучшить оценку Архимеда. Однако преобразованием этого ряда в

$$\pi = \sqrt{12} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots \right)$$

Мадхава смог вычислить π как 3,14159265359, верно определив 11 цифр в записи числа. Этот рекорд был побит в 1424 году персидским математиком Джамшидом ал-Каши, который в своём труде под названием «Трактат об окружности» привёл 17 цифр числа π , из которых 16 верные.

Первым крупным европейским вкладом со времён Архимеда был вклад голландского математика Людольфа ван Цейлена, затратившего десять лет на вычисление числа π с 20-ю десятичными цифрами (этот результат был опубликован в 1596 году). Применяв метод Архимеда, он довёл удвоение до n -угольника, где $n = 60 \cdot 2^{29}$. Изложив свои результаты в сочинении «Об окружности» («VandenCirckel»), Людольф закончил его словами: «У кого есть охота, пусть идёт дальше». После смерти в его рукописях были обнаружены ещё 15 точных цифр числа. Людольф завещал, чтобы найденные им знаки были высечены на его надгробном камне. В честь него число π иногда называли «Людольфовым числом», или «константой Людольфа».



Людольф ван Цейлен,
голландский математик
(1540—1610)

Примерно в это же время в Европе начали развиваться методы анализа и определения бесконечных рядов. Первым таким представлением была формула Виета:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \dots$$

найденная Франсуа Виетом в 1593 году.

Теоретические достижения в XVIII веке привели к постижению природы числа π , чего нельзя было достичь лишь только с помощью одного численного вычисления. Иоганн Генрих Ламберт доказал иррациональность π в 1761 году.



Иоганн Генрих Ламберт

(1728—1777)

немецкий физик, философ, математик.

2.1.3. Эра компьютерных вычислений

Эпоха цифровой техники в XX веке привела к увеличению скорости появления вычислительных рекордов. Джон фон Нейман и другие использовали в 1949 году ЭНИАК для вычисления 2037 цифр π , которое заняло 70 часов. Ещё одна тысяча цифр была получена в последующие десятилетия, а отметка в миллион была пройдена в 1973 году. Такой прогресс имел место не только благодаря более быстрому аппаратному обеспечению, но и благодаря алгоритмам. Одним из самых значительных результатов было открытие в 1960 году быстрого преобразования Фурье, что позволило быстро осуществлять арифметические операции над очень большими числами.

Важным развитием недавнего времени стала формула Бэйли — Боруэйна — Плаффа, открытая в 1997 году Саймоном Плаффом и названная по авторам статьи, в которой она впервые была опубликована. Эта формула,

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right),$$

примечательна тем, что она позволяет извлечь любую конкретную шестнадцатеричную или двоичную цифру числа π без вычисления предыдущих.

Возникает вопрос - а зачем нужна такая колоссальная точность вычислений? Конечно, в обычной жизни, в строительстве, архитектуре и на производстве хватит и относительно небольшой степени точности, например, в 10-15 знаков. Однако не будем забывать, насколько глубоко проникла наука в далекое космическое пространство и внутрь материи. А в этих областях нужны намного более точные оценки. Ещё одним стимулом служит гипотеза о том, что некоторые универсальные постоянные (постоянная Планка, гравитационная постоянная, число "пи") могут изменяться при искривлении пространства.

Так что не все так просто с этим удивительным числом "пи"!

2.2. Свойства числа π

Изучая число математики, определили, что π обладает двумя свойствами:

- **трансцендентность**
- **иррациональность**

π — иррациональное число, то есть его значение не может быть точно выражено в виде дроби m/n , где m и n — целые числа. Следовательно, его десятичное представление никогда не заканчивается и не является периодическим.

Иррациональность числа π была впервые доказана Иоганном Ламбертом в 1761

году путём разложения числа $\frac{e - 1}{2^n}$ в непрерывную дробь. В 1794 году Лежандр привёл более строгое доказательство иррациональности чисел π и π^2 .

π — трансцендентное число, то есть оно не может быть корнем какого-либо многочлена с целыми коэффициентами. Трансцендентность числа π была доказана в 1882 году профессором Кёнигсбергского, а позже Мюнхенского университета Линдеманом.

2.3. Занимательные факты, связанные с числом π

Существует неофициальный праздник «День числа π ». Ежегодно отмечается 14 марта, которое в американском формате дат (месяц/день) записывается как 3.14, что соответствует приближённому значению числа π .

Считается, что праздник придумал в 1987 году физик из Сан-Франциско Ларри Шоу, обративший внимание на то, что 14 марта ровно в 01:59 дата и время совпадают с первыми разрядами числа $\pi = 3,14159$.

Примечательно, что Международный день числа «Пи», случайно или умышленно, совпадает с днем рождения одного из наиболее выдающихся физиков современности - днем рождения Альберта Эйнштейна.

Ученые очень любят этот праздник, отмечая его разнообразными физико-математическими и кулинарными мероприятиями. Кулинария здесь приходится как раз очень кстати - обычно выпекаются большие круглые торты, и вся команда рассаживается вокруг «магического» круга (как правило, с нарисованным «Пи» в центре), угощаясь и рассуждая об относительности этого необычного числа.



Ещё одной датой, связанной с числом π , является 22 июля, которое называется «Днём приближённого числа Пи» (англ. *PiApproximationDay*), так как в европейском формате дат этот день записывается как 22/7, а значение этой дроби является приближённым значением числа π .

На ступенях перед зданием Музея искусств в Сиэтле поставлен памятник числу « π »



Многие ученые пытаются вычислить как можно знаков у числа π .

- 1) В августе 2009 года учёные из японского университета Цукубо рассчитали последовательность из 2 576 980 377 524 десятичных разрядов.
- 2) 31 декабря 2009 года французский программист Фабрис Беллар на персональном компьютере рассчитал последовательность из 2 699 999 990 000 десятичных разрядов.
- 3) 2 августа 2010 года американский студент Александр Йи и японский исследователь Сигэру Кондо (яп.) русск. рассчитали последовательность с точностью в 5 триллионов цифр после запятой.
- 4) 19 октября 2011 года Александр Йи и Сигэру Кондо рассчитали последовательность с точностью в 10 триллионов цифр после запятой.

Если проследить значение числа π и вычисление его чисел, то это можно отразить в таблице:

Таб. 2

$\pi = \sqrt{10} \approx 3,162\dots$	В некоторых странах Азии
$\pi \approx 3,155\dots$	Астроном Ван Фань(229-267 г)
3, 1415927	ЦзуЧун – Чжи (428-499 г)
3, 1415926535897932 (16 зн.)	Аль – Каши в 1424 г
32 верных знака	«Лудольфово число» - 1596 г Голландский математик Лудольф Ван Цейлен
140 знаков	Ланьи (французский математик)- 1719 г
200 знаков	Немец Дазе-1844 г
29 360 128 знаков	Братья Борвейн (США)
100 млн. знаков	Японские математики
5 триллионов	Американский студент Александр Йи и японский исследователь Сигэру Кондо (яп.) (2010)
10 триллионов	Александр Йи и Сигэру Кондо (2011)

Но на этом интерес к числу не заканчивается. Ученые не только вычисляют последовательность цифр в числе, но и пытаются запомнить их. 17 июня 2009 года украинский нейрохирург, доктор медицинских наук, профессор Андрей Слюсарчук установил мировой рекорд, запомнив 30 миллионов знаков **числа Пи**, которые были напечатаны в 20 томах текста. С установлением нового рекорда Андрея Слюсарчук официально поздравил Президент Украины Виктор Андреевич Ющенко. Поскольку устное перечисление 30 млн. цифр со скоростью одна цифра в секунду заняло бы почти год (347 дней) при непрерывном перечислении 24 часа в сутки, 7 дней в неделю, то был применён следующий подход для проверки рекорда: во время демонстраций, Слюсарчука просят назвать произвольно выбранные проверяющими последовательности цифр числа Пи, расположенные на произвольно выбранных местах произвольных страниц 20-томной распечатки, группированной в упорядоченные таблицы. Он многократно успешно проходит этот тест. Свидетелями демонстраций были уважаемые учёные, доктора и кандидаты наук, заведующие кафедрами Институты и Университетов. Книга рекордов Украины перечисляет членов комиссии, участвовавших в демонстрациях. Приведены их научные звания и занимаемые должности. Уникальная память Андрея Слюсарчука основана на эйдетическом восприятии информации.

По данным Книги рекордов Украины, в 2006 году Андрей Слюсарчук установил предыдущий мировой рекорд, запомнив 1 миллион знаков числа Пи.

Число Пи приблизительно равно 3,1415926535897932384626433832795.... Для запоминания, можно использовать приведённые ниже запоминалки.

Для восстановления числа нужно подсчитать число символов в каждом из слов и записать по порядку. Вот некоторые из них:

1. Вот и знаю я число, именуемое "пи". Молодец! (7 цифр)

2. Если очень постараться.

Можно сразу пи прочесть:

Три, четырнадцать, пятнадцать,

Девяносто два и шесть (9 знаков)

3. Вот и Миша, и Анюта прибежали

Пи узнать число они желали (11 знаков)

4. Это я знаю и помню прекрасно:

Пи многие знаки мне лишни, напрасны.

Доверимся знаньям громадным

Тех, пи кто сосчитал, цифр армаду. (21 знак!)

Где же применяется число π ?

Космические объекты, элементы космических кораблей, расчет траекторий полета, орбит и т.д. не обходится без формул, в запись которых входит число пи.

Вот как написал об этом интересном числе Кымпан Ф.

«Число π присутствует в чертежах и вычислениях, при подготовке и проведении полетов в космос, оно представляет необходимое количество своих десятичных знаков всякий раз, когда они нужны инженерам, рассчитывающим цилиндрические, сферические или конические части машин, физикам и астрономам... Куда бы мы ни обратили свой взор, видим проворное и трудолюбивое число π : оно заключено и в самом простом колесике, и в самой сложной автоматической машине».

В честь загадочного числа «пи» - основы многих вычислений, открытий и инноваций, созданы духи. Этот аромат был создан под руководством Александра МакКуина (Alexander McQueen) - коренного англичанина в Париже, поэтому он не мог не получиться неординарным и уникальным, ведь в нем смешалось два мира: английское спокойствие и французская любовь к праздникам. Флакон аромата - отдельное произведение искусства. Он был создан знаменитым дизайнером Сержем Мансо (Serge Mansau) и представляет собой прозрачную пирамиду с вытесненными геометрическими узорами.



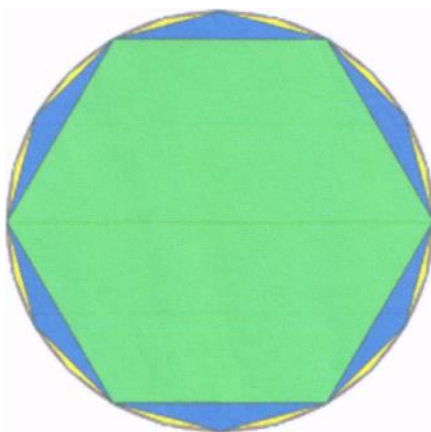
2.4. Исследования числа π

2.4.1. Практическая работа

В ходе исследования решили еще раз убедиться в значении числа π

- Определение: Числом π называется отношение длины окружности к её диаметру.

Теорема: Отношение длины окружности к её диаметру одинаково для всех окружностей.



- Доказательство:

Обозначим через L - длину окружности, через d - её диаметр, то формулировка теоремы запишется следующим образом:

Рассмотрим правильный n -треугольник, вписанный в окружность радиуса r со стороной A_n и периметром P_n , то отношение одинаково для всех окружностей.

Рассмотрим две произвольные окружности с вписанными в них правильными n -угольниками. Из подобия треугольников AOB и $A_1O_1B_1$ следует, что т.к. окружности брали произвольные, то это равенство будет справедливо для всех окружностей.

Итак, для всех окружностей, следовательно, это отношение длины окружности к её диаметру принято обозначать греческой буквой « π ».

Для вычисления числа π взяли несколько предметов имеющих форму круга и попробовали вычислить число π , при этом измеряя длину окружности и диаметр.

Все значения занесли в таблицу № 3. Получились следующие значения

Таб.3

Объект	L	d	π
Крышка	17,58	8,5	2,24
Коробочка	38,3	19	2,03
Тарелка	50,87	25,4	2
Кружка	26	13	2
Банка	16,6	8,3	2
Скотч	9,7	4,85	2
Значок	12,56	6,28	2

Вывод 2. Вычисленные значения числа π не совпали со значением, известным на протяжении многих веков. Пришлось задуматься о причине расхождений полученных нами результатов со значениями ученых.

Для вычисления π мы измеряли L- длину окружности и d - диаметр. Значит, допустили ошибку при вычислении диаметра и неточно вычислили длину окружности. Для продолжения исследования обратились к определению этих понятий:

Диаметр: Это хорда (отрезок, соединяющий две точки на окружности) (сфере, поверхности шара) и проходящий **через центр** этой окружности (сферы, шара). Также диаметром называют длину этого отрезка. Диаметр окружности является хордой, проходящей через центр этой окружности; такая хорда имеет максимальную длину.

Главное в его нахождении то, что диаметр проходит через центр окружности. Возник новый вопрос - как найти центр в круге? В литературе нашли несколько способов для нахождения центра окружности (круга).

2.4.2. Способы нахождения центра окружности.

- 1) Начертить треугольник, так, чтоб окружность была вписана в него. Из вершины треугольника провести линии к точкам пересечения сторон треугольника с окружностью. Там где линии пересекаются и, будет являться центром.
- 2) Начертить две касательные. Из точек касания, начертить перпендикуляры, точка их пересечения искомый центр.
- 3) Взять две любые хорды. От центра каждой из них опустить перпендикуляр, пересечение которых даёт центр.
- 4) Чертим, квадрат в окружности, и от одного конца квадрата проводим к другому концу линию. Тоже делаем и с двумя другими углами. И когда эти две линии пересекутся это и будет центром окружности.

Выбрав 4 способ, снова замерыли длину диаметра и окружности и снова посчитали значение числа π .

Данные занесли в таблицу (таблица № 4)

Таб.4

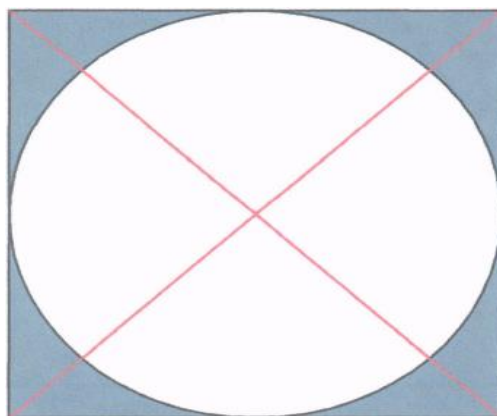
Объект	L	d	π
Коробочка	38,3	12,2	3,14
Кружка	26	8,3	3,13
Банка	16,6	5,3	3,13
Крышка	17,58	5,6	3,14
Скотч	9,7	3,1	3,13
Значок	12,56	4	3,14159
Тарелка	50,87	16,2	3,14

Вывод 3: значение числа π равна 3,14 для любой окружности и совпадает со значением ученых - математиков, которые много веков занимались его вычислениями. Важно при этом нужно найти центр, чтобы измерить диаметр.

2.4.3. Лабораторная работа

Для подтверждения полученных результатов провели лабораторную работу: **Измерение с помощью взвешивания (физический метод)**, которую выполнили по следующему плану.

1. Заготовить квадрат на листе картона.
2. Взвесить с помощью школьных лабораторных весов квадрат;
3. Вписать в квадрат окружность, вырезать круг и взвесить его;



4. Пользуясь формулами вычислить значение π

$$m = \rho V; V = SH;$$

ρ - плотность бумаги.

1) для круга:

$$m_{\text{кр}} = \rho S_{\text{кр}} H = \rho \pi r^2 H;$$

2) для квадрата:

$$M_{\text{кв}} = \rho S_{\text{кв}} H = \rho 4r^2 H;$$

$$(S = a^2 = (2r)^2 = 4r^2).$$

$$\frac{m}{M} = \frac{\rho \pi r^2 H}{\rho 4 r^2 H} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

5. Вычислить на микрокалькуляторе значение, полученное в ходе выполнения лабораторной работы

4. Рассчитать относительную погрешность полученного результата.

$$\frac{|\pi - \text{число}|}{\pi} \times 100\%.$$

Вывод 4. Значение этого удивительного числа с помощью физического метода не меняется и равно 3,14.

III. Выводы

В ходе проведенного исследования узнали, что число π очень интересно и неуловимо. Число π обладает свойствами: иррациональность и трансцендентностью.

Оно применяется во многих наук. До сих пор ученые занимаются вычислением этого числа.

Исследуя число, пришли к следующим выводам

1. Чем больше ученые занимались изучением числа, тем точнее стали его результаты, вычисляя все больше и больше знаков.

2. Значение числа π равна 3,14 для любой окружности. Для этого нужно найти центр, чтобы точно измерить диаметр. Существует несколько способов нахождения центра окружности.

3. Можно вычислить значение π , используя измерение с помощью взвешивания (физический метод).

В ходе исследования получены результаты:

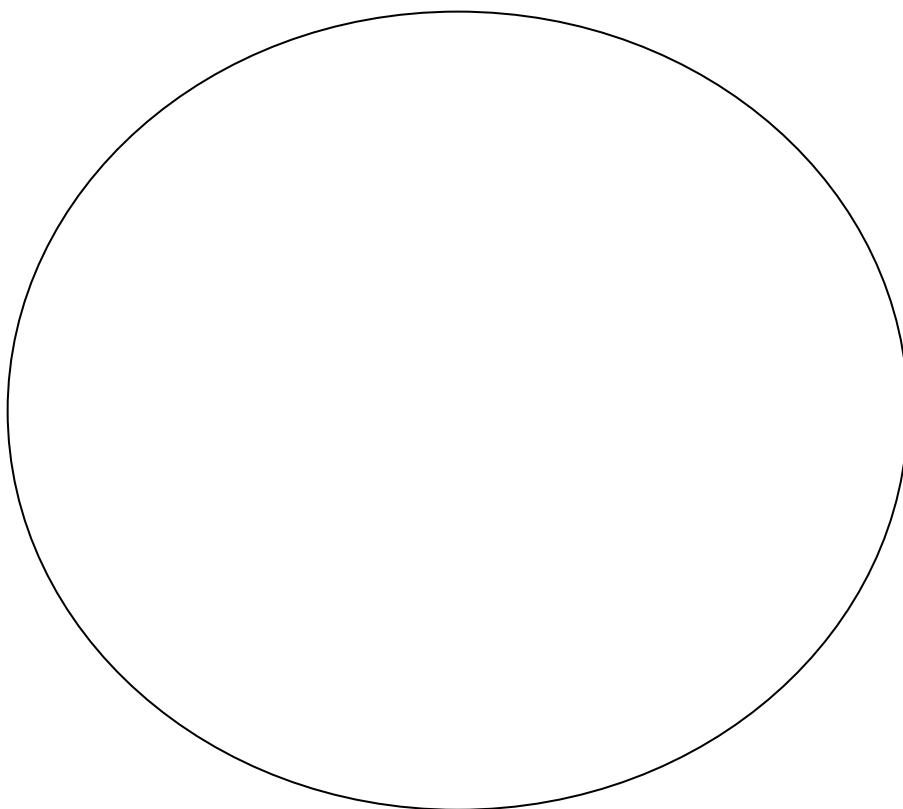
1. Проведена практическая работа по нахождению числа π .
2. Проведена лабораторная работа
3. Составлен буклет
4. Создана презентация.

Литература:

1. Жуков А. В. О числе π М: МЦМНО, 2002. 32 с.
2. Жуков А. В. Вездесущее число « π ». — 2-е изд. — М.: Издательство ЛКИ, 2007.—216с
3. Звонкий А. Что такое π // Квант, 1978 №11
4. Калейдоскоп Число π II Квант, 1996 №6
5. Кымпан Ф. История числа π . - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987
6. Перельман Я. И. Квадратура круга. Л.: Дом занимательной науки, 1941
7. <http://www.rutvet.ru/in>

Приложения

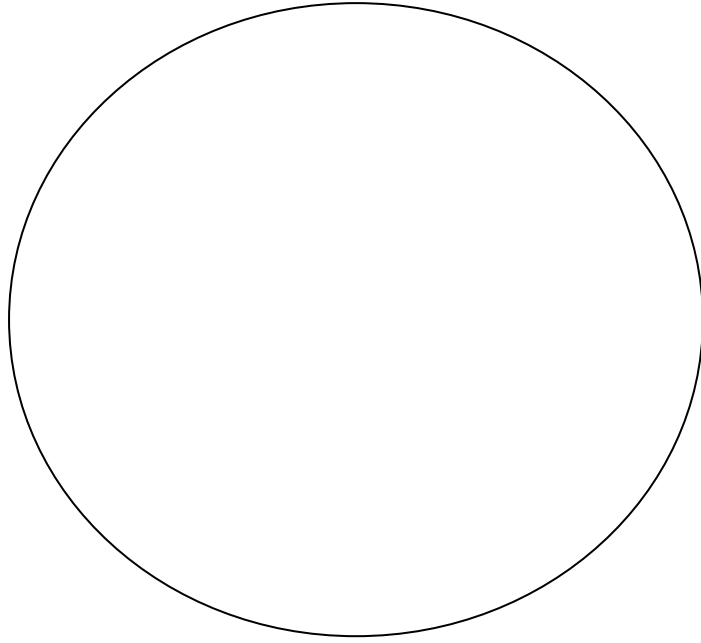
ТАРЕЈКА



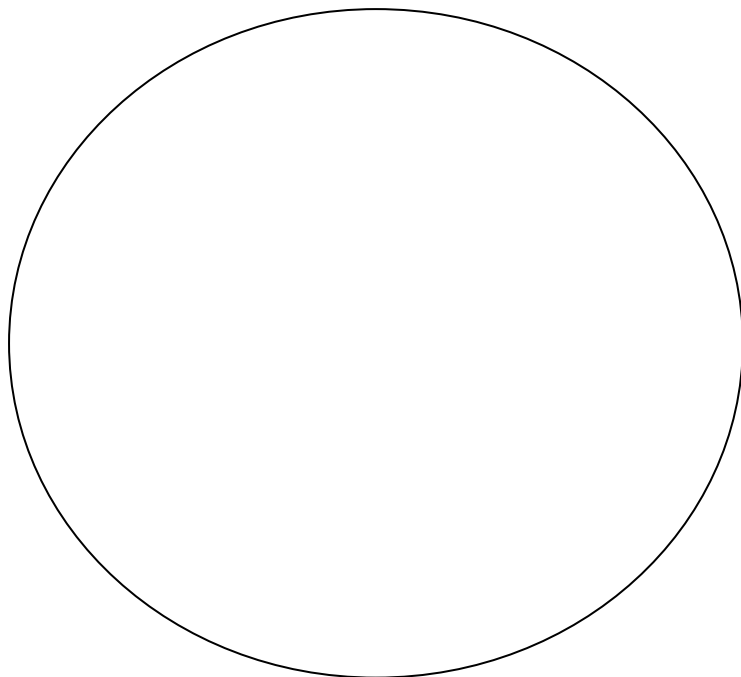
A large, empty circle with a thin black outline, centered on the page. It occupies most of the width and height of the drawing area.



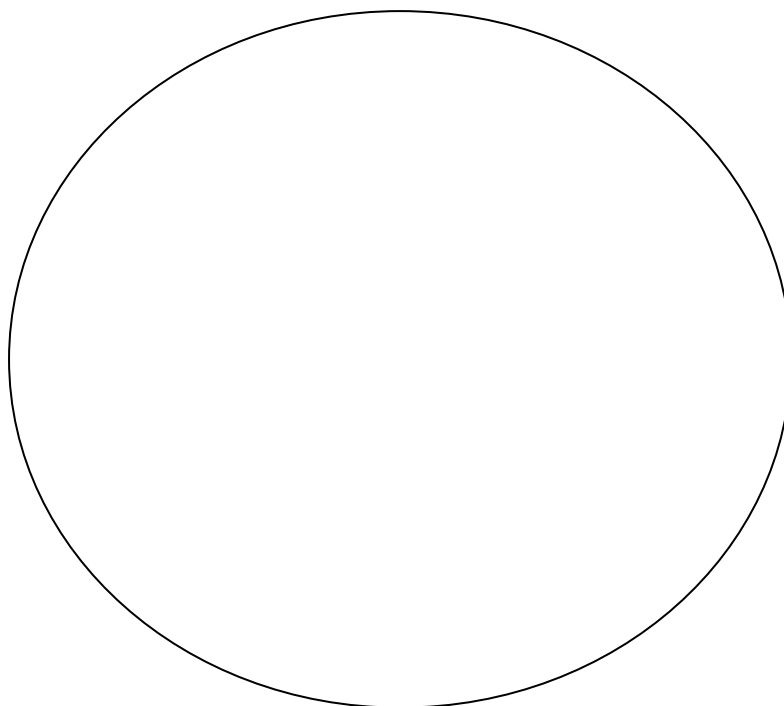
КРУЖКА



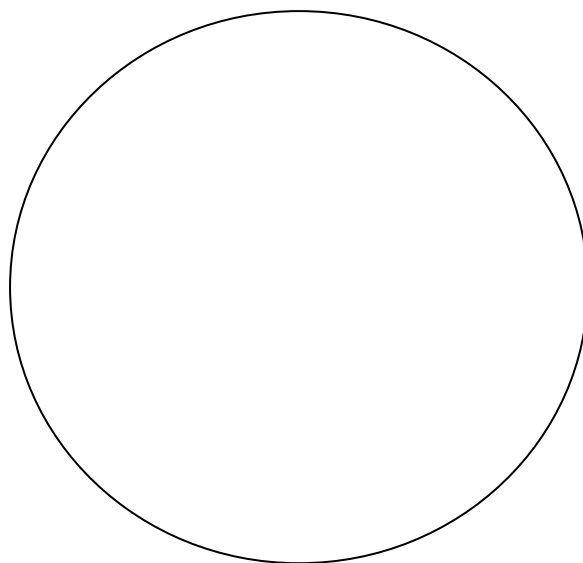
БАНКА



КРЫШКА



ЗНАЧОК



СКОТЧ

