

Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 9-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

Моделирование извержения вулкана

Пиль Никита Евгеньевич,
11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,
Анфёрова Ольга Константиновна,
учитель физики.

Пермь. 2014.

Оглавление

Введение.....	3
Актуальность.....	3
Цель работы.....	3
Математическая постановка	4
Содержательная постановка	4
Концептуальная постановка	4
Математическая постановка	4
Выводы	8
Список литературы	9

Введение

Актуальность

Одними из самых опасных природных катастроф являются извержения вулканов. Только за последнее 5 лет случилось около десяти крупных извержений. Надо понимать, что извержение вулкана это не только выход лавовых потоков, но и другого рода опасности, например: вулканическая пыль, вызывающая воздушные коллапсы, или наводнения, оползни. Все это ведет за собой голод, изменение климата, сбои в инфраструктуре. В связи с этим исследования в данной области могут быть полезными в прогнозировании и описании данного процесса.

Цель работы

Общей целью работы будет построение математической модели извержения вулкана, а именно движения магмы в канале вулкана. Благодаря этому можно решить ряд ключевых задач: рассчитать скорость в канале вулкана в зависимости от давления; вычислить распределение скорости потока; рассчитать время подъема магмы в канале вулкана.

Математическая постановка

Содержательная постановка

В данной модели рассмотрим движение магмы в канале вулкана.

Концептуальная постановка

Для начала рассмотрим упрощенную модель движения магмы в канале вулкана. Канал вулкана будем рассматривать, как трубу с круглым сечением, и будем считать ее бесконечно длинной. Магма представляет собой вязкую жидкость с особыми свойствами, будем считать ее несжимаемой с постоянной температурой. Зададим граничные условия: скорость на стенках трубы отсутствует. Для упрощения модели влияние газов в расчет не берем, и будем рассматривать канал в горизонтальном положении, так как влияние силы тяжести мало.

Математическая постановка

Таким образом, получаем следующую модель:

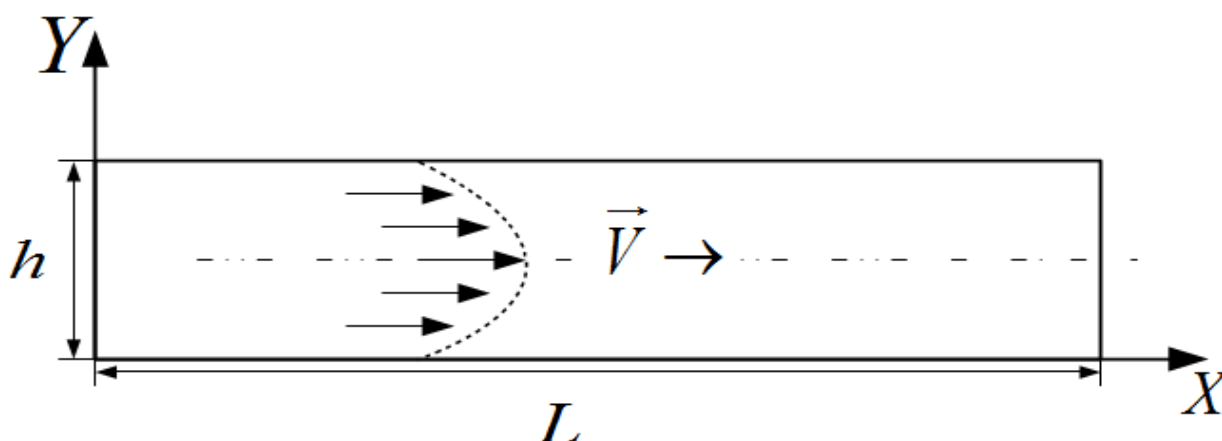


Рисунок 1 Схема модели в векторном виде

Введем некоторые обозначения:

Для решения данной задачи составим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \vec{V} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla P + \mu \Delta \vec{V} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x(0) = 0 \end{array} \right. \quad (3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x(h) = 0 \end{array} \right. \quad (3b),$$

Где (1) уравнение неразрывности в виде условия несжимаемости, (2) – уравнение Навье-Стокса, (3а,б) – граничные условия.
Из уравнения (2) получаем:

$$\begin{cases} \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} \\ \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

(4)

Ввиду того, что длина канала очень высока изменением скорости по его длине можно пренебречь

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

получаем

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (5)$$

Решая уравнение (5) находим зависимость скорости (v_x) от координаты (y):

$$v_x(y) = \frac{dP / dx (y^2 - hy)}{2\mu} \quad (6)$$

Зададим параметры задачи, необходимые для численных расчетов:

$$P = 10^5 \text{ Па}$$

$$h = 0,05 \text{ м}$$

$$\mu = P \cdot \exp\left(\frac{y}{h}\right)$$

Выводы

Представим в виде графика решения уравнения (5).

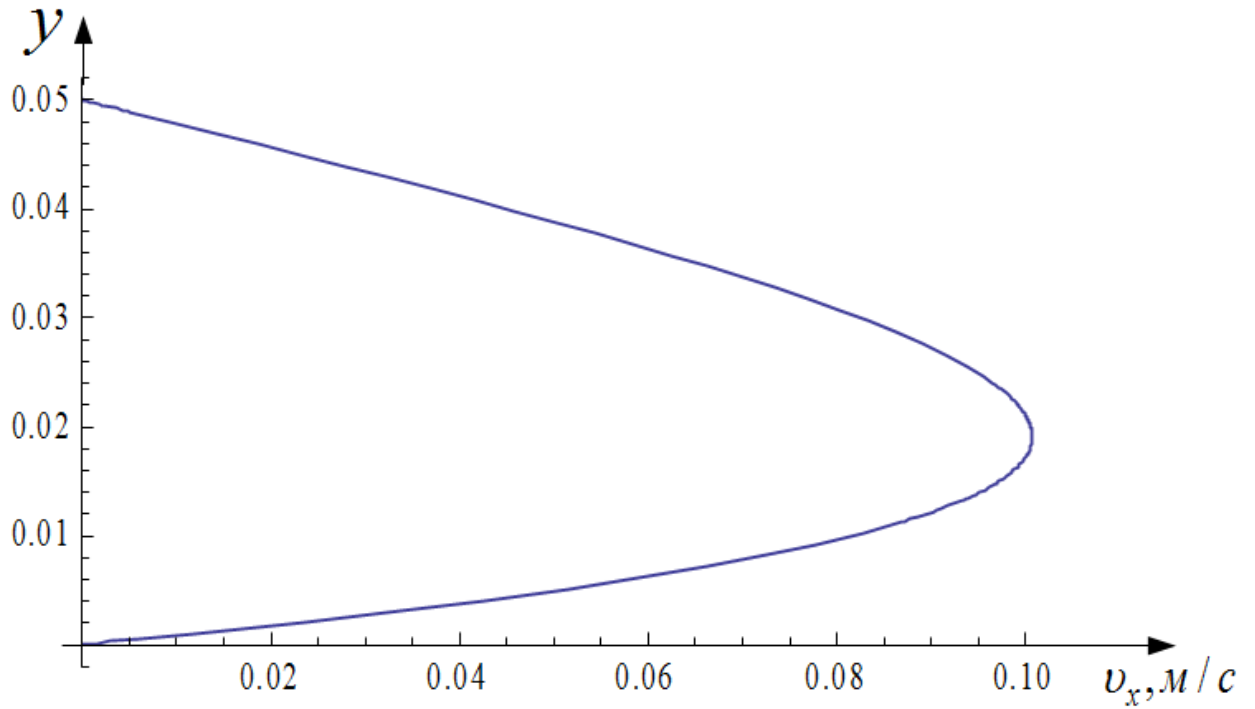


Рисунок 2 График зависимости скорости от координаты

Мы получили зависимость скорости от координаты (Рис. 2). Из графика следует, что скорость потока распределяется неравномерно.

Несимметричность распределения скорости происходит из-за изменяющейся вязкости.

Результаты

Построена модель движения вязкой жидкости в канале. Найдена зависимость скорости от координаты.

Для развития модели предполагается:

- Учесть влияние газов.
- Рассмотреть особые свойства магмы как вязкой жидкости и учесть их.
- Вычислить коэффициенты зависимости вязкости и плотности от давления.

Список литературы

1. *Controls on condition magma flow dynamics during lava dome building eruption.* Melnik, O. и Sparks. 2005 г.
2. Кочин, Н. Е., Кибель, И. А. и Розе, Н. В. *Теоретическая гидромеханика.* Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.
3. Темам , Р., Ландуа, Л. Д. и Кутепов, А. М. www.wikipedia.org/Уравнения_Навье_—_Стокса. www.wikipedia.org. [В Интернете] [Цитировано: 18 октябрь 2014 г.]