

Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 9-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

**Математическое моделирование процессов, связанных с
полётом ракеты**

Романов Никита Сергеевич,

11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,
Анфёрова Ольга Константиновна,

учитель физики.

Пермь. 2014.

Оглавление

Введение.....	Ошибка! Закладка не определена.
Цель работы.....	Ошибка! Закладка не определена.
Задачи.....	Ошибка! Закладка не определена.
Актуальность.....	Ошибка! Закладка не определена.
Постановка задачи	Ошибка! Закладка не определена.
Содержательная постановка	Ошибка! Закладка не определена.
Концептуальная постановка задачи	Ошибка! Закладка не определена.
Математическая постановка задачи	Ошибка! Закладка не определена.
Решение задач.....	Ошибка! Закладка не определена.
Выбор метода решения.....	Ошибка! Закладка не определена.
Нахождение параметров.....	Ошибка! Закладка не определена.
Коэффициент аэродинамического сопротивления	Ошибка! Закладка не определена.
Массы.....	Ошибка! Закладка не определена.
Расстояния	Ошибка! Закладка не определена.
Линейная скорость горения топлива	2
Математическая модель	11
Практическая часть	18
Правила безопасности	19
Вывод.....	19
Список литературы	20

Введение

Ракеты стали неотъемлемой частью современного человечества. Ракеты заняли свою нишу в вооружении многих стран: от гранатомётов и неуправляемых ракет до систем противовоздушной/противоракетной обороны и межконтинентальных баллистических ракет, несмотря на то, что раньше развитие ракетных технологий шло исключительно для военных нужд, они нашли применение и в мирных целях, таких как доставка грузов на Международную Космическую Станцию, спутников на орбиты и даже для возможной колонизации Луны и Марса в будущем.



Рисунок 1 Ракета-носитель "Союз" перед запуском

Цель работы

Целью этой работы является создание математической модели процессов, связанных с полётом одноступенчатой твердотопливной ракеты, и проверка её на опыте.

Задачи

Для достижения поставленной цели было необходимо решить ряд сопутствующих задач:

1. Расчёт коэффициента аэродинамического сопротивления;
2. Расчёт расхода топлива;

3. Придумать способ регистрации высоты ракеты над стартовой площадкой в определённые моменты времени.

Актуальность

Решение поставленных задач полезно для закрепления изученного на уроках материала а также для общего развития.

Постановка задачи

Содержательная постановка

Ракету приводят в движение, активировав запал, от чего в камере сгорания вспыхивает топливо и начинает, сгорая, переходить в газ, который, выходя под давлением из сопла, толкает ракету. Через 2-3 секунды запас топлива истощается и ракета находится в свободном полёте, продолжая по инерции набирать высоту. Вскоре ракета достигает наивысшей точки своей траектории и начинает падать.

Полёт ракеты рассматривается только от взлёта до наивысшей точки её траектории.

Концептуальная постановка задачи

Декомпозиция задачи

Здесь следует рассмотреть составные части ракеты, а также внешние факторы, влияющие на полёт. Начнём с состава ракеты:

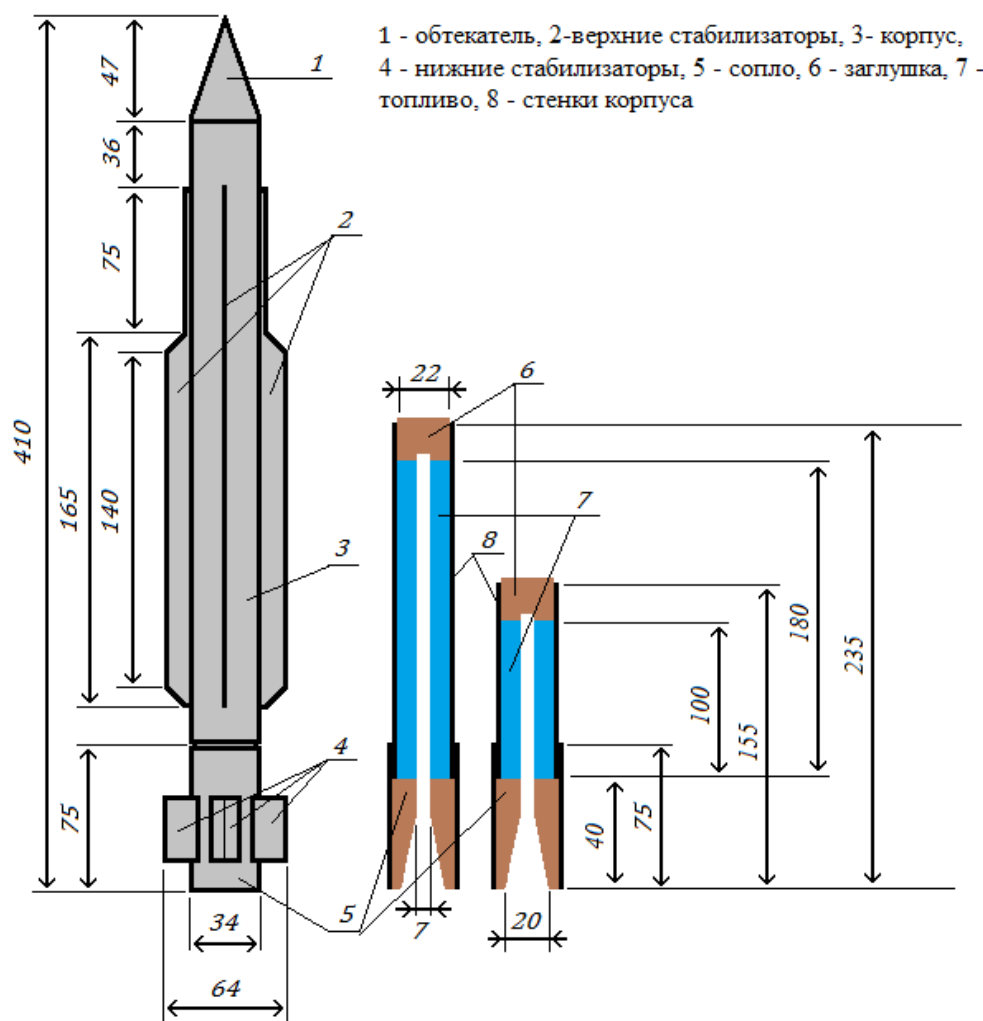


Рисунок 2 Схема ракеты

Такая конструкция была выбрана для ракеты, потому что в этом случае она удобна для запуска из пусковой установки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда. Также считаю важным отметить, что данная конструкция внешне очень напоминает американские ракеты серии Standard (ЗУР СЕМЕЙСТВА "STANDARD").

В конструкции предусмотрена возможность вынимать из корпуса ракеты её двигатель, т.к. корпус предназначен для многократного использования, в то время как двигатель повторному использованию не подлежит в силу его выгорания изнутри.



Рисунок 3 Внешний вид готовой ракеты и вынятый ракетный двигатель

Если обратить внимание на внешние факторы, то их можно заметить только два: аэродинамическое сопротивление воздуха и притяжение Земли.

Математическая постановка задачи

Параметры задачи:

- 1) Атмосфера: т.к. высота подъёма ракеты небольшая, будем считать атмосферу однородной, $P_{\text{атм}} = \text{const} = 10^5 \text{Па}$, $\rho_{\text{атм}} = \text{const} = 1,2041 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $T_{\text{атм}} = \text{const}$ (не была найдена)
- 2) Ускорение свободного падения: по той же причине что и в первом пункте, ускорение свободного падения можно считать константой: $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$;
- 3) Стартовая масса ракеты: M = (не была найдена);
- 4) Масса топлива: m = (не была найдена);
- 5) Линейная скорость горения топлива: $U_{\text{лин.гор.топ.}} = \text{const}$ = (не была найдена);
- 6) Площадь поперечного сечения ракеты: $S = 0,001 \text{м}^2$;
- 7) Внутренний объём пустой камеры сгорания:
 - а) $V = 0,000037994 \text{м}^3$;
 - б) $V = 0,0000683892 \text{м}^3$;
- 8) Коэффициент аэродинамического сопротивления: $C = \text{const}$ = (не был найден);

То, как были найдены некоторые параметры, рассмотрено ниже, в пункте «нахождение параметров» в следующей главе.

Также для составления математической модели необходимо было обратиться к следующим формулам и законам:

1. Формула силы аэродинамического сопротивления: $F_{\text{сопр.возд.}} = \frac{C\rho U^2 S}{2}$, где C – коэффициент аэродинамического сопротивления, ρ – плотность воздуха, U – скорость движения, S – площадь поперечного сечения движущегося тела, эта формула нужна, чтобы найти силу сопротивления воздуха движению ракеты;
2. Уравнение Менделеева-Клайперона: $PV = \nu RT$, где P – давление газа, V – объём, занимаемый газом, ν – молярное количество газа, R – универсальная газовая постоянная, T – температура газа, эта формула будет нужна, чтобы найти давление газов сгорающего топлива в камере сгорания;
3. Формула, связывающая давление и силу: $F = P \times S$, где F – сила, P – давление, S – площадь, эта формула понадобится для нахождения силы, действующей на молекулы газа, вылетающего через сопло из двигателя ракеты;
4. Второй закон Ньютона: $F = ma$ (1), $F = \frac{P}{t}$ (2), где m – масса, a – ускорение, P – импульс, t – время, первая формулировка нужна для нахождения ускорения самой ракеты, а вторая формулировка понадобится для нахождения импульса истекающего из сопла газа и, собственно, импульса сообщаемого этим газом ракете;
5. Закон сохранения импульса.

Решение задач

Выбор метода решения

Математическая модель была составлена методом Эйлера в среде Microsoft Excel. Также для проведения опыта с запуском ракеты и опыта запуском двигателя и произведения необходимых вычислений понадобилось следующее оборудование:

1. Самодельная аэродинамическая труба и уменьшенный макет ракеты
2. Самодельные весы
3. 2 смартфона для видеозаписи
4. Ракета и её сменные двигатели

5. Пусковая установка
6. Самодельный бикфордов шнур
7. Самодельный дальномер

Кроме того был использован видеоредактор MPEG Video Wizard DVD 5.0 и PhotoShop.

Нахождение параметров

Коэффициент аэродинамического сопротивления

После того как определился с внешними очертаниями корпуса ракеты, рассчитал коэффициент аэродинамического сопротивления. Для этого использовал самодельную аэродинамическую трубу и копию ракеты, т.к. коэффициент аэродинамического сопротивления зависит только от формы, то копию можно было брать для удобства в меньшем масштабе. Для нахождения коэффициента требовалось найти силу сопротивления воздуха, из которой далее можно было выразить сам коэффициент. Для нахождения этой силы было необходимо подвесить уменьшенный макет корпуса так, как это указано на рисунке 6, это было нужно для того, чтобы, несмотря на силу сопротивления потока воздуха, копия ракеты оставалась в горизонтальном положении, и чтобы воздух действовал лишь на фронтальную часть ракеты.



Рисунок 4 Аэродинамическая труба



Рисунок 5 Соотношение уменьшенной копии и оригинала

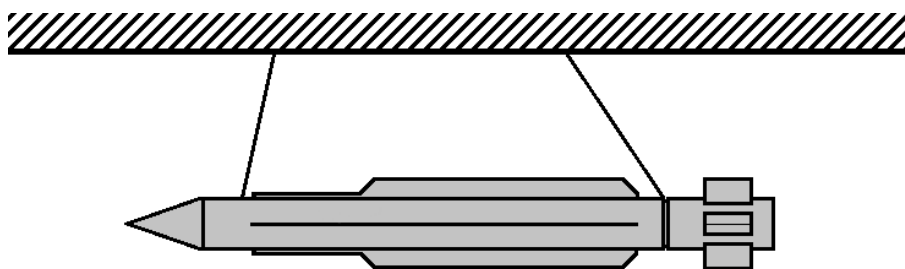
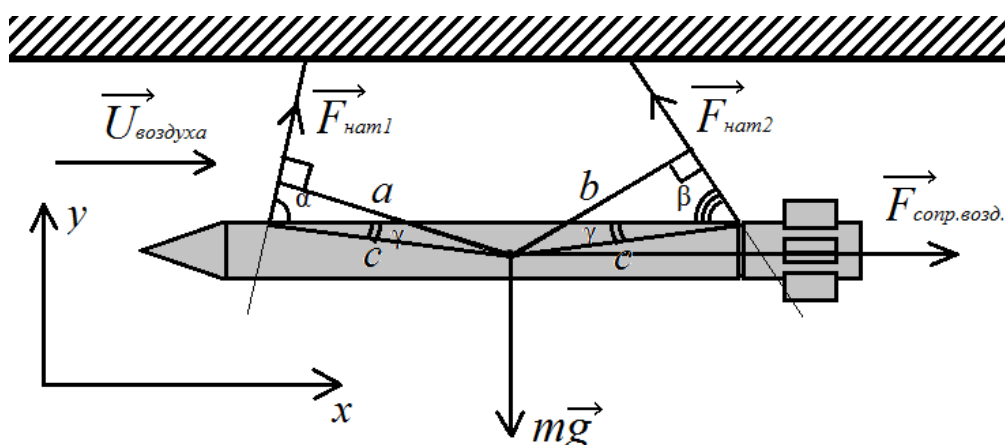


Рисунок 6

Само решение задачи по нахождению коэффициента аэродинамического сопротивления выглядит следующим образом:



$$1) a = c \times \cos(\alpha + \gamma) \quad b = c \times \cos(\beta + \gamma)$$

$$M_{F_{\text{нат1}}} + M_{F_{\text{нат2}}} = 0 \quad F_{\text{нат1}} \times a = F_{\text{нат2}} \times b \quad F_{\text{нат2}} = F_{\text{нат1}} \times \frac{a}{b}$$

$$2) \vec{F}_{\text{нат1}} + \vec{F}_{\text{нат2}} + \vec{F}_{\text{сопр.возд.}} + a\vec{g} = 0$$

$$x: F_{\text{нат1}} \cos \alpha - F_{\text{нат2}} \cos \beta + F_{\text{сопр.возд.}} = 0$$

$$F_{\text{нат1}} - F_{\text{нат1}} \frac{a}{b} \cos \beta + F_{\text{сопр.возд.}} = 0 \quad F_{\text{нат1}} = \frac{F_{\text{сопр.возд.}}}{\frac{a}{b} \cos \beta - \cos \alpha}$$

$$y: F_{\text{нат1}} \sin \alpha + F_{\text{нат2}} \sin \beta - mg = 0$$

$$F_{\text{нат1}} \sin \alpha + F_{\text{нат1}} \frac{a}{b} \sin \beta = mg \quad F_{\text{нат1}} = \frac{mg}{\sin \alpha + \frac{a}{b} \sin \beta}$$

$$\frac{F_{\text{сопр.возд.}}}{\frac{c \times \sin(\alpha + \gamma)}{c \times \sin(\beta + \gamma)} \cos \beta - \cos \alpha} = \frac{mg}{\sin \alpha + \frac{c \times \sin(\alpha + \gamma)}{c \times \sin(\beta + \gamma)} \sin \beta}$$

$$F_{\text{сопр.возд.}} = \frac{mg \left(\frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} \cos\beta - \cos\alpha \right)}{\sin\alpha + \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} \sin\beta}$$

$$\frac{C\rho U^2 S}{2} = \frac{mg \left(\frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} \cos\beta - \cos\alpha \right)}{\sin\alpha + \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} \sin\beta}$$

$$C = \frac{2mg \left(\frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} \cos\beta - \cos\alpha \right)}{\left(\sin\alpha + \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} \sin\beta \right)}$$

Массы

Массы корпуса ракеты, её двигателя и топлива были найдены с помощью самодельных весов. В качестве грузов использовались емкости с водой. Зная её плотность и объём можно было найти её массу и, соответственно, массу взвешиваемого объекта.

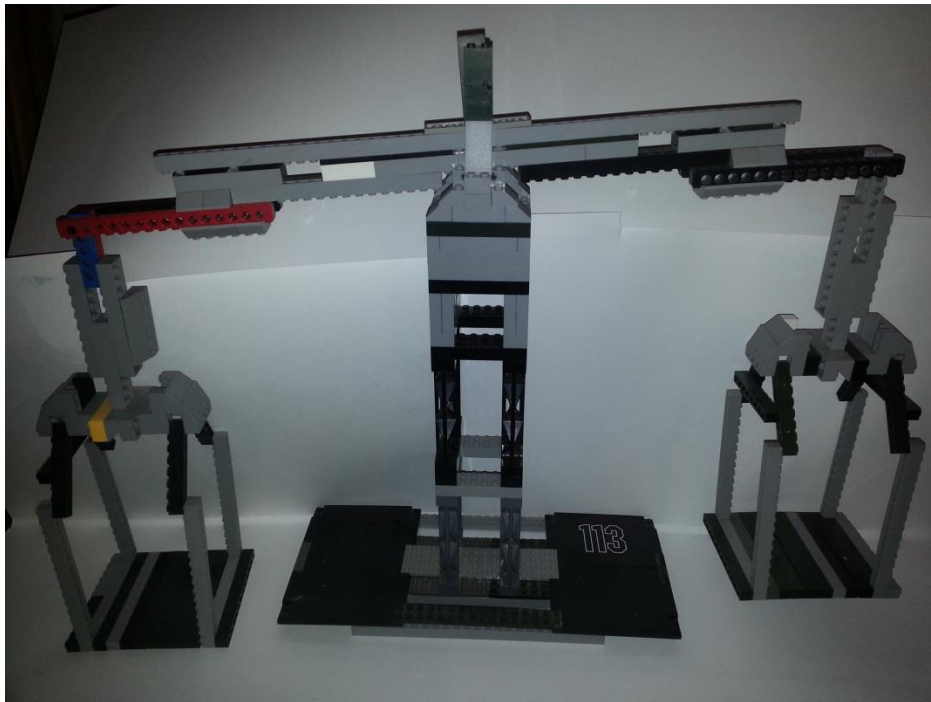


Рисунок 7 Самодельные весы

Расстояния

Для проведения опыта было необходимо разработать способ, с помощью которого можно было бы достаточно точно определять высоту, на которую поднялась ракета, в определённых интервалах времени, эта задача была решена, а разработанный способ успешно применён на практике.

Для нахождения высоты подъёма ракеты в момент времени понадобились две камеры, самодельный дальномер и специальный прибор позволяющий определить угол между прямой, проходящей через точку наблюдения и наивысшую точку траектории полёта, к горизонту.

Дальномер представляет из себя подвижную основу с двумя степенями свободы, на которую установлены два прицела, один из которых неподвижен и направлен перпендикулярно расстоянию между ними, а второй может двигаться в одной степени свободы, также эти прицелы расположены на расстоянии одного метра друг от друга на подвижной основе. Для каждой степени свободы есть своя градусная шкала. Для нахождения расстояния до объекта нужно направить неподвижный прицел на данный объект, потом, не сбивая с цели неподвижный прицел, нацелить подвижный на объект. Потом надо замерить угол у подвижного прицела, теперь зная расстояние между прицелами и угол у подвижного прицела можно найти расстояние до цели. Подробнее этот пункт будет рассмотрен в главе «Опыт».

Линейная скорость горения топлива

В данном вопросе у меня возникло 2 предположения:

1. Линейная скорость горения топлива является константой и не зависит от формы топлива;
2. Линейная скорость горения топлива не является постоянной и зависит от формы топлива.

Очевидно, что выполнение первого варианта значительно облегчило бы расчёты, связанные с построением мат. модели и избавило бы нас от необходимости искать закономерности, влияющие на скорость горения топлива. Для того, чтобы проверить первое предположение и опровергнуть второе, достаточно было провести два несложных опыта: в первом опыте требуется взять корпус ручки, заполнить его топливом и замерить линейную скорость горения топлива, при этом стоит отметить, что внутренний радиус корпуса ручки должен быть постоянный; во втором опыте производится то же самое, только вместо корпуса ручки была использована воронка, т.к. у неё

внутренний радиус переменный. Если в первом и во втором опыте линейная скорость горения топлива окажется одинаковой, это будет значить, что и во втором опыте линейная скорость горения тоже является константой, а это значит, что на линейную скорость горения не влияет форма топливной шашки, и горение направлено перпендикулярно сгорающей поверхности.

На первом опыте (с ручкой) была найдена сама скорость горения.

Математическая модель

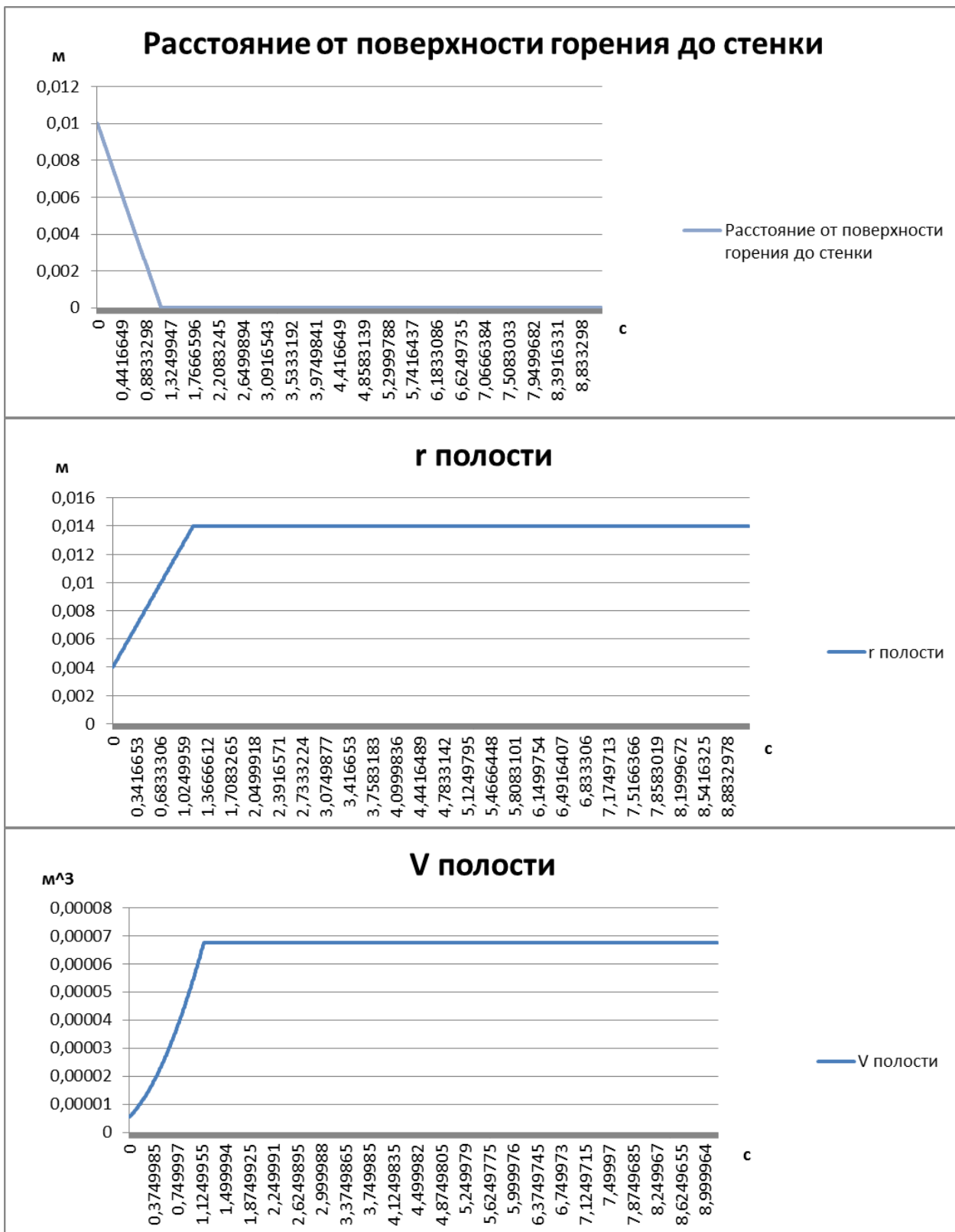
Так как вычисления в данной математической модели, ввиду того что она выполнена методом Эйлера, происходят пошагово с интервалом Δt , обозначим номер шага как n ($n \in N$).

В математической модели были задействованы следующие формулы:

1. Формула расстояния от горячей поверхности топлива до стенки камеры сгорания: $r_n = r_0 - nU_{\text{гор.топл.}}\Delta t$, где r_n – расстояние на n шаге, r_0 – расстояние начальное, $U_{\text{гор.топл.}}$ – линейная скорость горения топлива;
2. Формула радиуса внутренней цилиндрической полости: $R_n = R_0 + nU_{\text{гор.топл.}}\Delta t$, где R_0 – радиус внутренний начальный. На этот и предыдущий пункты действует условие, что R_n не может быть больше r_0 , и r_n тоже не может превышать R_0 , в противном случае они соответственно равны, также эти переменные не могут быть отрицательными;
3. Формула объёма внутренней цилиндрической полости: $V_{\text{внут. } n} = \pi R_n^2 L$, где L – длина камеры сгорания. Здесь следует заметить, что, благодаря вышеупомянутому условию, наложенному на предыдущие 2 пункта, объём полости не сможет превысить объём самой камеры сгорания;
4. Формула объёма неизрасходованного топлива: $V_{\text{топл. } n} = V - V_{\text{внут. } n}$, где V – это объём камеры сгорания;
5. Формула массы неизрасходованного топлива: $m_{\text{топл. } n} = V_{\text{топл. } n} \times \rho_{\text{топл.}}$, где $\rho_{\text{топл.}}$ – плотность топлива;
6. Формула изменения массы топлива на 1 шаге: $\Delta m_n = m_n - m_{n-1}$;

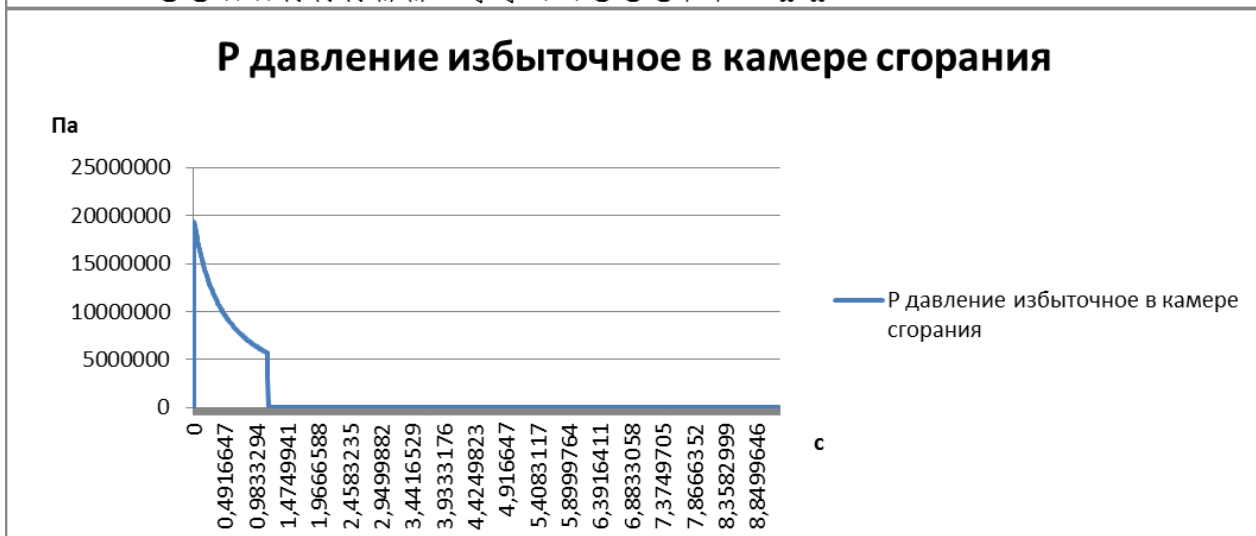
7. Формула массы всей ракеты: $m_{\text{ракеты } n} = m_{\text{ракеты бт}} + m_{\text{топл. } n}$, где $m_{\text{ракеты бт}}$ – масса ракеты без топлива;
8. Формула количества выделившегося газа за 1 шаг: $\nu_n = \Delta m_n / \mu_{\text{средн.газа}}$, где $\mu_{\text{средн.газа}}$ – это средняя молярная масса газа;
9. Формула избыточного давления в камере сгорания на энном шаге: $p_n = \nu_n RT / V_{\text{внут. } n}$, где R – универсальная газовая постоянная, а T – температура горения.
10. Формула силы выталкивания газов через сопло (сила тяги): $F_{\text{тяги } n} = p_n \times S_{\text{поп.сеч.сопла}}$;
11. Формула импульса, сообщаемого ракете двигателем на энном шаге: $P_n = F_{\text{тяги } n} \times \Delta t$;
12. Формула силы аэродинамического сопротивления: $F_{\text{аэродин.сопр. } n} = C \rho S U_n^2 / 2$, где C – коэффициент аэродинамического сопротивления, ρ – плотность воздуха, S – площадь поперечного сечения ракеты, U_n – скорость движения ракеты;
13. Формула равнодействующей силы: $F_{\text{равнод. } n} = F_{\text{тяги } n} - F_{\text{аэродин.сопр. } n} - m_{\text{ракеты } n} \times g$, где g – ускорение свободного падения;
14. Формула ускорения ракеты: $a_n = F_{\text{равнод. } n} / m_{\text{ракеты } n}$;
15. Формула скорости ракеты: $U_n = U_{n-1} + a_n \Delta t$;
16. Формула высоты ракеты над стартовой площадкой: $h_n = h_{n-1} + U_n \Delta t$

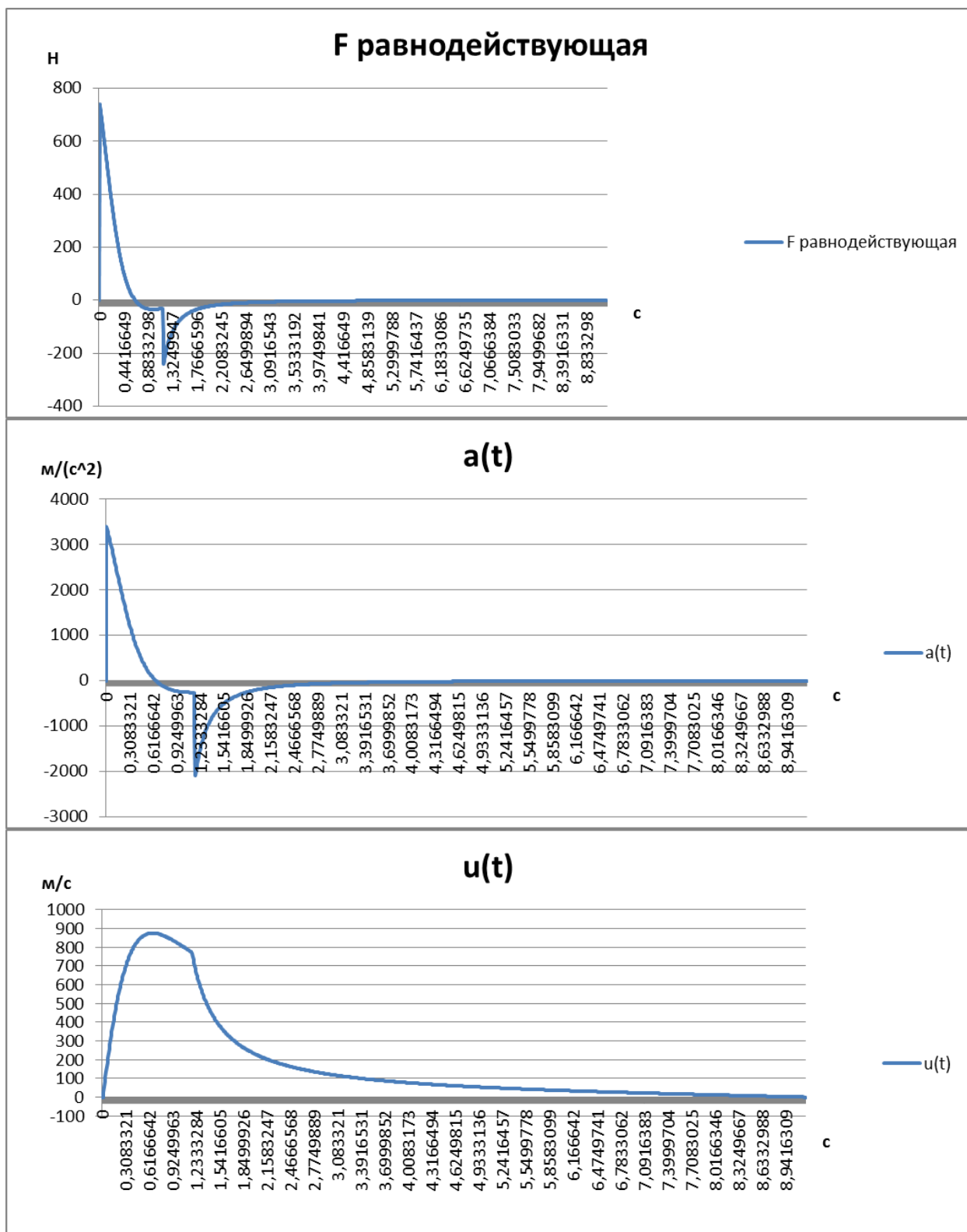
Также, используя приведённые в математической постановке параметры, можно было получить следующие графики:

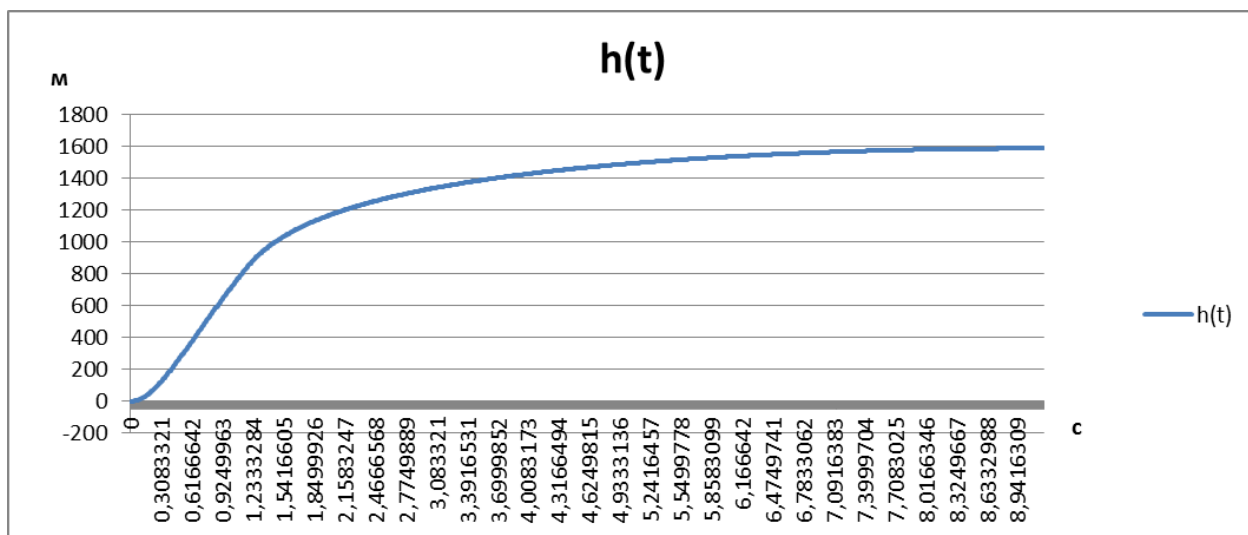












Практическая часть



Рисунок 8 Тестовый запуск.

Ввиду недостатка времени, практическая часть не была выполнена в полной мере, т.е. удалось произвести лишь пробный запуск, в процессе которого не производилась регистрация положения ракеты в пространстве в момент времени, а также в результате того, что пусковая установка была критически повреждена реактивной струей и не подлежала восстановлению, дальнейшие пуски ракет были невозможны. В данный момент ведётся работа над более совершенной и прочной пусковой установкой, а также над электрозапалом для дистанционного запуска.

Правила безопасности

При работе с такими пожароопасными веществами как карамельное топливо необходимо соблюдать следующие правила (Правила техники безопасности):

1. При работе надо быть готовым к вспышке в любой момент, рекомендуется работать в защитных очках и рукавицах из хлопка или брезента;
2. Любое нагревание проводить только с контролем температуры, никогда не использовать открытый огонь;
3. Никогда не наклоняться над составом при его изготовлении, особенно нагревании;
4. Все испытания двигателей и запуски ракет необходимо производить с учётом высокой вероятности взрыва и непредвиденного направления полета;
5. Никогда не подходить к несработавшему двигателю раньше 5 минут.

Вывод

Качественная оценка: ещё пока рано говорить о точности и достоверности данной математической модели, т.к. она так и не была проверена на опыте, но тестовый запуск обнадеживает в правильности выбранного пути. Работа в данный момент продолжается.

Перспективы развития: можно дополнить математическую модель для моделирования полёта двухступенчатой ракеты.

Список литературы

ЗУР СЕМЕЙСТВА "STANDARD". (б.д.). Получено из Вестник ПВО:
<http://pvo.guns.ru/other/usa/standard/index.htm#2>

Правила техники безопасности. (б.д.). Получено из Ракетная мастерская:
<http://www.airbase.ru/modelling/rockets/safety/safety.html>

Сорбитовая карамель. (б.д.). Получено из Serge77 - Моя ракетная мастерская: <http://serge77.rocketworkshop.net/cansorb/cansorb.htm>