Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 9-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Геометрия треугольника в комплексных числах

Савельев Никита,
11 кл., МБОУ «Гимназия №3», г. Кудымкар,
Нечаева Татьяна Юрьевна,
учитель математики.

Пермь. 2014.

Содержание

Введение……………………………………………………………………..3
Глава I. Из истории комплексных чисел………………………………...........4
Глава II. Основы метода комплексных чисел………………………………6
Глава III. Геометрия треугольника в комплексных числах……………….....12
Глава IV. Решение задач ЕГЭ и различных олимпиад методом комплексных чисел…………………………………………………………………....20
Заключение……………………………………………………………………23
Библиографический список…………………………………………………..24

Введение

Большое значение комплексных чисел в математике и ее приложениях широко известно. Алгебру комплексных чисел можно успешно использовать в элементарной геометрии, тригонометрии, теории движений и подобий, а также в электротехнике, в различных механических и физических задачах. В планиметрии метод комплексных чисел позволяет решать задачи прямым вычислением по готовым формулам. В этом заключается простота данного метода, по сравнению с векторным и координатным методами, методом геометрических преобразований, требующих от учащихся немалой сообразительности и длительных поисков.

Актуальность. Описание данного метода в литературе практически не встречается. То немногое, что можно найти, показано на сложных геометрических задачах. Это обстоятельство делает метод комплексных чисел для большинства учащихся малодоступным, не позволяет увидеть его красоту, логику и простоту. Кроме того, изучая материалы по подготовке к единому государственному экзамену, я задумался над вопросом о возможности решения задач С-4 с помощью комплексных чисел.

Опираясь на вышесказанное, я определил **предмет исследования** – метод комплексных чисел.

На протяжении нескольких тысячелетий треугольник является символом геометрии. Даже можно сказать, что треугольник – это атом геометрии. Любой многоугольник может быть разбит на треугольники, а изучение его свойств сводится к изучению свойств треугольников его составляющих. Таким образом, определился **объект исследования** –треугольник.

Гипотеза. Метод комплексных чисел– универсальный метод для решения задач планиметрии.

Цель работы – исследование метода комплексных чисел для доказательства свойств треугольника из школьного курса планиметрии, а также для решения задач С-4 ЕГЭ.

Задачи:

1. провести теоретический анализ метода комплексных чисел;
2. изложить геометрию треугольника в комплексных числах;
3. доказать ряд теорем школьного курса планиметрии;
4. привести примеры использования теоретического материала для решения задач ЕГЭ;
5. сделать обобщение и анализ результатов;
6. познакомить с результатами исследования учащихся 10-х классов школы.

Работа состоит из введения, основной части, заключения и библиографического списка. Во введении кратко описывается значение выбранной темы, цель работы и структура работы. В основной части большое место занимают формулы, с помощью которых доказываются свойства треугольника, и приводятся решения задач ЕГЭ с помощью комплексных чисел. В заключении представлены выводы о применении комплексных чисел в планиметрии.

Глава I. Из истории комплексных чисел[3],[6],[7]

Впервые, по-видимому, мнимые величины были упомянуты в известном труде «Великое искусство, или об алгебраических правилах» Кардано (1545), в рамках формального решения задачи по вычислению двух чисел, которые в сумме дают 10, а при перемножении дают 40. Он получил для этой задачи квадратное уравнение для одного из слагаемых, и нашёл его корни: $5+\sqrt{-15}$ и $5-\sqrt{-15}$. В комментарии к решению он написал: «эти сложнейшие величины бесполезны, хотя и весьма хитроумны» и «Арифметические соображения становятся все более неуловимыми, достигая предела столь же утонченного, сколь и бесполезного». Возможность использования мнимых величин при решении кубического уравнения, в так называемом неприводимом случае (когда вещественные корни многочлена выражаются через кубические корни из мнимых величин), впервые описал Бомбелли (1572). Он же впервые описал правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел, однако всё равно считал их бесполезной и хитроумной «выдумкой».

Выражения, представимые в виде $a+b\sqrt{-1}$, появляющиеся при решении квадратных и кубических уравнений, стали называть «мнимыми» в XVI—XVII веках с подачи Декарта, который называл их так, отвергая их реальность, и для многих других крупных ученых XVII века природа и право на существование мнимых величин представлялись весьма сомнительными, так же как сомнительными в то время считали и иррациональные числа, и даже отрицательные величины. Несмотря на это, математики смело применяли формальные методы алгебры вещественных величин и к комплексным, получали корректные вещественные результаты даже из промежуточных комплексных, и это не могло не начать внушать доверие.

Долгое время было неясно, все ли операции над комплексными числами приводят к комплексным или вещественным результатам, или, например, извлечение корня может привести к открытию ещё какого-то нового типа чисел. Задача о выражении корней степени n из данного числа была решена в работах Муавра (1707) и Котса (1722).

Символ i для обозначения мнимой единицы предложил Эйлер (1777, опубл. 1794), взявший для этого первую букву слова лат. *imaginarius* — мнимый. Он же распространил все стандартные функции, включая логарифм, на комплексную область. Эйлер также высказал в 1751 году мысль об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел. К такому же выводу пришёл д’Аламбер (1747), но первое строгое доказательство этого факта принадлежит Гауссу (1799). Гаусс и ввёл в широкое употребление термин «комплексное число» в 1831 году, хотя этот термин ранее использовал в том же смысле французский математик Лазар Карно в 1803 году.

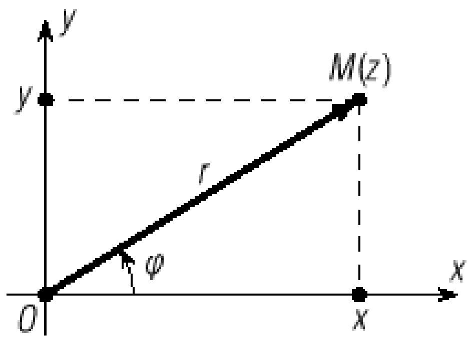
Арифметическая (стандартная) модель комплексных чисел как пар вещественных чисел была построена Гамильтоном (1837); это доказало непротиворечивость их свойств.

Существенно ранее, в 1685 году в работе «Алгебра» Валлис (Англия) показал, что комплексные корни квадратного уравнения с вещественными коэффициентами можно представить геометрически, точками на плоскости. Но это прошло незамеченным. Следующий раз геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними появилось в работе Весселя (1799). Современное геометрическое представление, иногда называемое «диаграммой Аргана», вошло в обиход после опубликования в 1806-м и 1814-м годах работы Ж. Р. Аргана, повторявшей независимо выводы Весселя. Термины «модуль», «аргумент» и «сопряжённое число» ввёл Коши. Таким образом было обнаружено, что комплексные числа пригодны и для выполнения чисто алгебраических операций сложения, вычитания, умножения и деления векторов на плоскости, что сильно изменило векторную алгебру.

Глава II. Основы метода комплексных чисел[1],[2], [3][4]

Геометрическая интерпретация комплексных чисел
Длина отрезка

При заданной прямоугольной декартовой системе координат на плоскости комплексному числу $z = x+iy$ ($i^2 = -1$) можно взаимно однозначно поставить в соответствие точку *M* плоскости с координатами *x, y* (рис.1):



$$z = x + iy \leftrightarrow M(x, y) \leftrightarrow M(z).$$

Число z тогда называют *комплексной координатой* точки *M.*

Поскольку множество точек евклидовой плоскости находится во взаимно однозначном соответствии с множеством комплексных чисел, то эту плоскость называют также *плоскостью комплексных чисел.* Начало *O* декартовой системы координат называют при этом *начальной* или *нулевой точкой* плоскости комплексных чисел.

При$y=0$ число z действительное. Действительные числа изображаются точками оси *x,* поэтому она называется действительной осью. При $x=0$ число zчисто мнимое: $z=iy$. Мнимые числа изображаются точками оси *y,* поэтому она называется *мнимой осью.* Нуль -одновременно действительное и чисто мнимое число.

Расстояние от начала *O* плоскости до точки *M(z)* называется *модулем* комплексного числа *z* и обозначается |z| или *r*:

$$|z| = r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Если φ — ориентированный угол, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с осью x, то по определению функции синуса и косинуса

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}, \cos\varphi = \frac{x}{r}$$

откуда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и поэтому $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$.

Такое представление комплексного числа z называется его ***тригонометри-ческой*** *формой.* Исходное представление $z=x+iy$ называют ***алгебраической*** *формой* этого числа. При тригонометрическом представлении угол φ называют *аргументом* комплексного числа и обозначают еще через *arg z:*

$$\varphi = \arg z$$

Если дано комплексное число $z = x + iy$, то число $\bar{z} = x - iy$ называется ***комплексно-сопряженным*** (или просто ***сопряженным)*** этому числу z. Тогда, очевидно, и число z сопряжено числу $\bar{z}$. Точки M(z) и $M_1(\bar{z})$ симметричны относительно оси x

Из равенства $z = \bar{z}$ следует $y = 0$ и обратно. Это значит, что ***число, равное своему сопряженному, является действительным и обратно.***

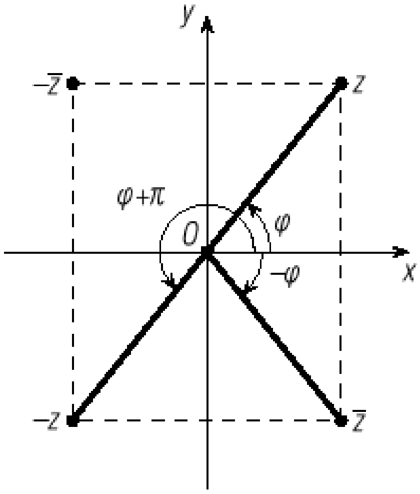


Рис. 2

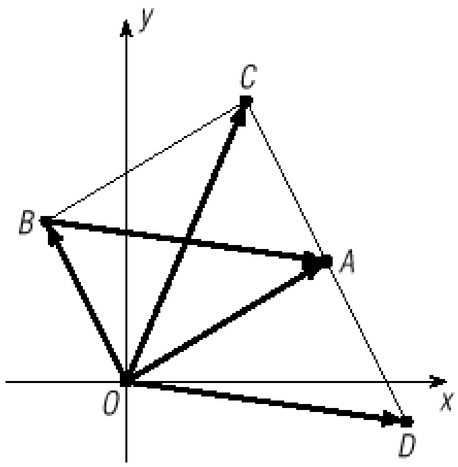


Рис. 3

Точки с комплексными координатами z и -z симметричны относительно начальной точки O. Точки с комплексными координатами z и $-\bar{z}$ симметричны относительно оси y.

Из равенства $z = \bar{z}$ вытекает $x = 0$ и обратно. Поэтому условие $z = -\bar{z}$ является критерием чисто мнимого числа.

Для любого числа z, очевидно, $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$.

Сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел являются действительными числами: $z + \bar{z} = 2z$, $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z^2|$.

Число, сопряженное с суммой, произведением или же частным комплексных чисел, есть соответственно сумма, произведение или же частное чисел, сопряженных данным комплексным числам:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2;\ \overline{z_1 : z_2} = \bar{z}_1 : \bar{z}_2$$

Эти равенства можно легко проверить, пользуясь формулами для операций над комплексными числами.

Если a и b - комплексные координаты точек A и B соответственно, то число $c = a + b$ является координатой точки C, такой, что $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$(рис.3). Комплексному числу $d = a - b$ соответствует такая точка D, что $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

Расстояние между точками A и B равно $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{OD}| = |a - b|$:

$$|AB| = |a - b| \qquad (1)$$

Так как $|z|^2 = z\bar{z}$, то

$$|AB|^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b}). \quad (2)$$

Уравнение $z\bar{z} = r^2$ ***определяет окружность с центром О радиуса r.*** Отношение $\frac{AC}{CB} = \lambda, (\lambda \neq -1)$, в котором точка C делит данный отрезок *AB,* выражается через комплексные координаты этих точек так:

$\lambda = \frac{c-a}{b-c}, \lambda = \bar{\lambda}$, откуда

$$c = \frac{a+\lambda b}{1+\lambda} \quad (3)$$

При $\lambda = 1$ точка C является серединой отрезка *AB*, и обратно.

Тогда:

$$c = \frac{1}{2}(a+b) \quad (4)$$

Умножение комплексных чисел

Умножение комплексных чисел выполняется по формуле

$$ab = |a|\cdot|b|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)),$$

То есть $|ab| = |a||b|$, и $\arg(ab) = \arg a + \arg b$.

Параллельность и перпендикулярность
Коллинеарность трех точек

Пусть на плоскости комплексных чисел даны точки A(a) и B(b). Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ сонаправлены тогда и только тогда, когда $arg\ a = arg\ b$, т. е. при $arg\ a - arg\ b = arg\ \frac{a}{b} = 0$ (при делении комплексных чисел, из аргумента делимого вычитается аргумент делителя).

Очевидно также, что эти векторы направлены противоположно в том и только в том случае, если arg a - arg b=arg $\frac{a}{b} = \pm\pi$.

Комплексные числа с аргументами 0, π, - π являются действительными.

***Критерий коллинеарности точек О, А, В*:** Для того чтобы точки *A(a) и B(b)* были коллинеарны с начальной точкой *O*, необходимо и достаточно, чтобы частное $\frac{a}{b}$ было действительным числом, т. е.

$$\frac{a}{b} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \text{ или } a\bar{b} = \bar{a}b \quad (6)$$

Возьмем теперь точки A(a), B(b), C(c), D(d).

Векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда точки, определяемые комплексными числами *a—b* и *c—d,* коллинеарны с началом О.

Замечание:

1. На основании (6) имеем:

$$\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD} \leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) = (\bar{a}-\bar{b})(c-d); \qquad (8)$$

2. Если точки A, B, C, D принадлежат единичной окружности $z\bar{z}=1$,то $\bar{a}=\frac{1}{a}; \bar{b}=\frac{1}{b}; \bar{c}=\frac{1}{c}; \bar{d}=\frac{1}{d}$и поэтому условие (8) принимает вид:

$$\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD} \leftrightarrow ab = cd; \qquad (9)$$

3. Коллинеарность точек A, B, C характеризуется коллинеарностью векторов $\overrightarrow{AB}$и $\overrightarrow{AC}$. Используя (8), получаем:

$$(a-b)(\bar{a}-\bar{c}) = (\bar{a}-\bar{b})(a-c) \qquad (10)$$

Это критерий принадлежности точекA, B, C одной прямой. Его можно представить в симметричном виде

$$a(\bar{b}-\bar{c}) + b(\bar{c}-\bar{a}) + c(\bar{a}-\bar{b}) = 0 \qquad (11)$$

Если точки A и B принадлежат единичной окружности $z\bar{z}=1$, то $\bar{a}=\frac{1}{a}; \bar{b}=\frac{1}{b}$ и поэтому каждое из соотношений (10) и (11) преобразуется (после сокращения на *(a-b)* в такое:

$$c + ab\bar{c} = a + b \qquad (12)$$

Точки A и B фиксируем, а точку C будем считать переменной, переобозначив ее координату через z. Тогда каждое из полученных соотношений (10), (11), (12) будет уравнением прямой *AB:*

$$(\bar{a}-\bar{b})z + (b-a)\bar{z} + a\bar{b} - b\bar{a} = 0, \qquad (10a)$$

$$z + ab\bar{z} = a + b. \qquad (12a)$$

В частности, прямая OA имеет уравнение $a\bar{z} = \bar{a}z$.

Комплексные числа с аргументами $\frac{\pi}{2}$ и$-\frac{\pi}{2}$являются чисто мнимыми.

Поэтому,

$$OA \perp OB \leftrightarrow \frac{a}{b} = -\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$$

или

$$OA \perp OB \leftrightarrow a\bar{b} + \bar{a}b = 0 \qquad (13)$$

Перпендикулярность отрезков AB и CD определяется равенством

$$(a-b)(\bar{c}-\bar{d}) + (\bar{a}-\bar{b})(c-d) = 0 \qquad (14)$$

В частности, когда точки A, B, C, D принадлежат единичной окружности $z\bar{z} = 1$, то зависимость (14) упрощается:

$$ab + cd = 0 \qquad (15)$$

<u>Скалярное произведение векторов.</u>

Выразим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ через комплексные

координаты a и b точек A и B. Пусть $a=x_1+iy_1$, $b=x_2+iy_2$. Тогда
$a\overline{b}+\overline{a}b=(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)+(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)=2(x_1x_2+y_1y_2)= 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.
Итак,

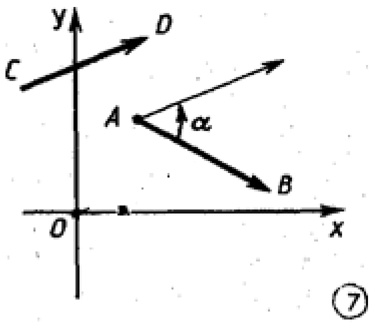
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(a\overline{b}+\overline{ab}) \qquad (16)$$

Пусть теперь даны четыре произвольные точки A(a), B(b), C(c), D(d) своими комплексными координатами. Тогда

$$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(a-b)(\overline{c}-\overline{d})+(\overline{a}-\overline{b})(c-d) \qquad (17)$$

Углы

Условимся обозначать символом $\angle(AB,CD)$положительно ориентированный угол, на который надо повернуть вектор $\overrightarrow{AB}$, чтобы он стал сонаправлен с вектором $\overrightarrow{CD}$.



$$\text{Тогда, } \cos\angle(AB,CD)=\frac{(d-c)(\bar{b}-\bar{a})+(\bar{d}-\bar{c})(b-a)}{2|d-c||b-a|} \qquad (18)$$

$$\sin\angle(AB,CD)=\frac{(d-c)(\bar{b}-\bar{a})+(\bar{d}-\bar{c})(b-a)}{2i|d-c||b-a|} \qquad (19)$$

Точка пересечения секущих к окружности

Если точки A, B, C и Dлежат на окружности $z\bar{z}=1$,то комплексная координата точки пересечения находится по формуле

$$\bar{z}=\frac{(a+b)-(c+d)}{ab-cd} \qquad (20)$$

Если же AB перпендикулярна CD, *то*

$$z=\frac{1}{2}(a+b+c+d) \qquad (21)$$

Точка пересечения касательных к окружности

Комплексная координата точки пересечения касательных к окружности $z\bar{z}=1$ в её точках $A(a)$и $B(b)$ находится по формуле

$$z=\frac{2ab}{a+b} \tag{22}$$

Ортогональная проекция точки на прямую

Ортогональная проекция точки $M(m)$ на прямую AB, где $A(a)$ а $B(b)$ находится по формуле

$$z=\frac{a(\overline{m}-\overline{b})-b(\overline{m}-\overline{a})}{2(\overline{a}-\overline{b})}+\frac{m}{2}$$

В случае, когда A и B принадлежат единичной окружности

$$z=\frac{1}{2}\left(a+b+m-\frac{cb}{m}\right).$$

Глава III.
Геометрия треугольника в комплексных числах

На плоскости комплексных чисел треугольник задается тремя комплексными числами, соответствующими его вершинам.

Центроид и ортоцентр треугольника.[2]

Известно, что для центроида G(точки пересечения медиан) треугольника ABC и любой точки O верно равенство $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.
Поэтому комплексная координата g центроида G вычисляется по формуле

$$g=\frac{1}{3}(a+b+c) \tag{23}$$

Выразим h комплексную координату ортоцентра H треугольника ABC через координаты a, b, c его вершин.

Пусть прямые AH, BH, CH пересекают описанную около треугольника окружность соответственно в точках A1, B1, C1. Пусть эта окружность имеет уравнение $z\bar{z}=1$, тогда согласно (15) имеем:

$$a_1=-\frac{bc}{a},\ b_1=-\frac{ca}{b},\ c_1=-\frac{ab}{c}$$

По формуле (20)

$$h=\frac{(a+a_1)-(b+b_1)}{aa_1-bb_1}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Откуда $h=a+b+c.$ (24)

В полученное выражение координаты вершин треугольника входят симметрично, поэтому третья высота треугольника проходит через точку пересечения первых двух

Подобные треугольники [2,1]

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и одинаково ориентированы (подобие первого рода), *если* $B_1=kAB$, $A_1B_1=kAC$ и углы $B_1A_1C_1$ *и* BAC *равны*(углы ориентированные).

С помощью комплексных чисел эти равенства можно записать так:

$$|a_1-b_1|=k|a-b|,\ |a_1-c_1|=k|a-c|, \arg\frac{c_1-a_1}{b_1-a_1}=\arg\frac{c-a}{b-a}.$$

Два равенства эквивалентны одному

$$\frac{c_1-a_1}{c-a}=\frac{b_1-a_1}{b-a}=\sigma, \qquad (25)$$

где σ - комплексное число, |σ|=k—коэффициент подобия. Если σ - действительное, то

$$\frac{c_1-a_1}{c-a}=\frac{\bar{c}_1-\bar{a}_1}{\bar{c}-\bar{a}}, \text{ где } AC \parallel A_1C_1.$$

Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$гомотетичны.

Соотношение (25)—необходимое и достаточное условие для того, чтобы треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ являлись подобными и одинаково ориентированными. Ему можно придать симметричный вид

$$ab_1+bc_1+ca_1=ba_1+cb_1+ac_1 \qquad (25a)$$

Равные треугольники

Если $|\sigma|=1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Тогда соотношение (25) – признак равенства одинаково ориентированных треугольников, а соотношение (26) – признак равенства противоположно ориентированных треугольников.

Правильные треугольники

Если потребовать, чтобы ориентированный треугольник ABC был подобен ориентированному треугольнику BCA, то треугольник ABC будет правильным. Поэтому из (25) получаем необходимое и достаточное условие для того, чтобы треугольник ABC был правильны

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \tag{27}$$

Площадь треугольника (доказана автором)

Выведем формулу для площади S положительно ориентированного треугольника *ABC:*

$$S=\frac{1}{2}|AB||AC|\sin\angle(AB,AC)=\frac{1}{4i}\Big((c-a)\big(\bar{b}-\bar{a}\big)-(b-a)(\bar{c}-\bar{a})\Big)$$
$$=-\frac{1}{4i}\big(a\big(\bar{b}-\bar{c}\big)+b(\bar{c}-\bar{a})+c\big(\bar{a}-\bar{b}\big)\big)$$

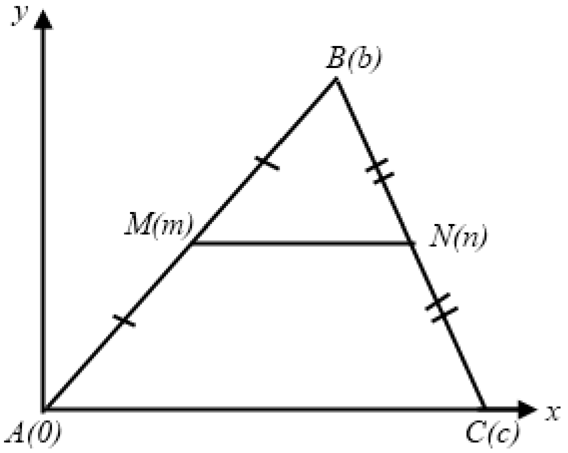
или

$$S=\frac{i}{4}\big(a\big(\bar{b}-\bar{c}\big)+b(\bar{c}-\bar{a})+c\big(\bar{a}-\bar{b}\big)\big) \tag{28}$$

Если треугольник ABC вписан в окружность$z\bar{z}=1$, то формула (28) преобразуется к виду: $S=\frac{i}{4}\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$ (29)

Теорема о средней линии треугольника (доказана автором)

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.



Доказательство. Пусть точки MиN – середины сторон AB и BC, тогда

$$m=\frac{b}{2};\, n=\frac{b+c}{2}.$$

Так как $z^2=z\bar{z}$, то

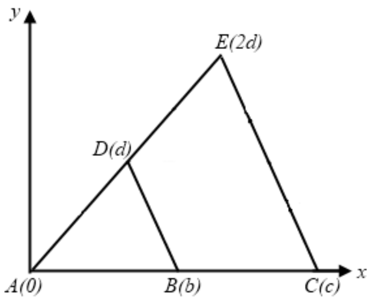
$MN^2=(m-n)(\bar{m}-\bar{n})=(\frac{b}{2}-\frac{b+c}{2})(\frac{\bar{b}}{2}-\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2})=\frac{b\bar{b}}{4}-\frac{b\bar{b}+b\bar{c}}{4}-\frac{b\bar{b}+\bar{b}c}{4}+\frac{b\bar{b}+b\bar{c}+\bar{b}c+c\bar{c}}{4}=\frac{c\bar{c}}{4}$

$4MN^2=c\bar{c}$, $AC^2=(c-0)(c-0)=c\bar{c}$, следовательно

$4MN^2=AC^2$или$2MN=AC$.Также выполняется условие (8) коллинеарности векторов *MN* и *AC*, а значит $MN\parallel AC$.

Теорема Фалеса (доказана автором)

Теорема. Если на одной стороне угла параллельные прямые отсекают равные отрезки, то и на другой стороне угла они отсекают равные отрезки.



Доказательство

Допустим, что $c=kb$. Тогда если $BD||CE$, то имеем

$$(b-d)(\bar{c}-2\bar{d})=(\bar{b}-\bar{d})(c-2d).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получаем уравнение

$$b\bar{c}-2b\bar{d}-\bar{c}d=\bar{b}c-2\bar{b}d-c\bar{d}$$

Заменив с на kb и $\bar{c}$ *на* $k\bar{b}$, получим

$$bk\bar{b}\text{-}2b\bar{d}\text{-}dk\bar{b}=\bar{b}kb\text{-}2\bar{b}d\text{-}kb\bar{d}.$$

Вновь приведя подобные слагаемые и перенеся все в одну сторону, получим

$$2b\bar{d}+dk\bar{b}-2\bar{b}d-kb\bar{d}=0.$$

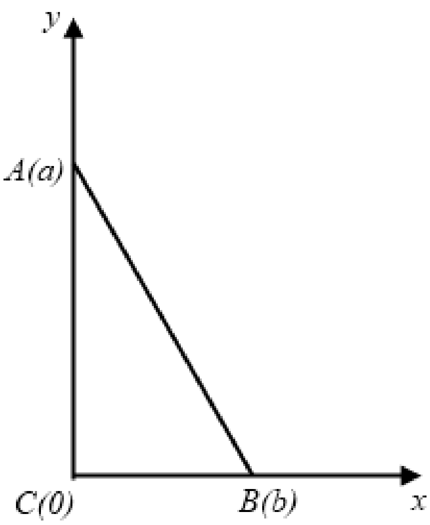
Вынесем общий множитель и получим

$$2(b\bar{d}-\bar{b}d)+k(\bar{b}d-b\bar{d})=0.$$

Отсюда *k=2, т.е.* $c=2b$. Аналогично доказывается, что $f=3b$и т.д.

Теорема Пифагора (доказана автором)

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов



Доказательство.

Расстояние между точками B и C равно $BC=|b-c|=b$, $BC^2=b\bar{b}$. Так как $|z|^2=z\bar{z}$, то

$$AC^2=(a-c)(\bar{a}-\bar{c})=(a-0)(\bar{a}-0)=a\bar{a}.$$

$$AB^2=(a-b)(\bar{a}-\bar{b})=a\bar{a}-a\bar{b}-\bar{a}b+b\bar{b}.$$

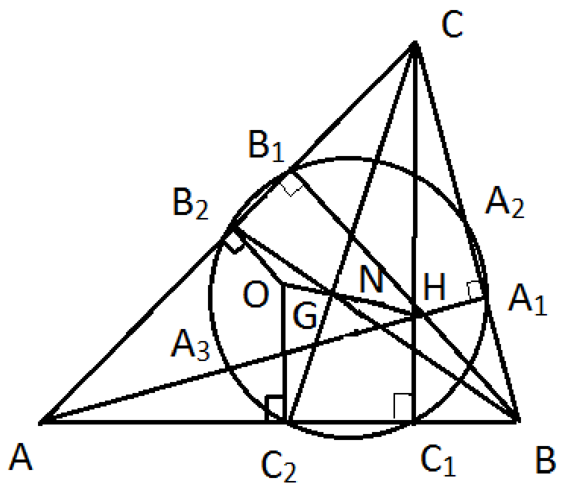
Т.к. b– действительное число, т.е. $b=\bar{b}$, то $-a\bar{b}=-ab$.Так как точка A лежит на оси Oy, то $a=-\bar{a}$,то есть $-\bar{a}b=ab$. Таким образом,

$$AB^2=a\bar{a}-a\bar{b}-\bar{a}b+b\bar{b}=a\bar{a}+b\bar{b}=AC^2+BC^2.$$

Теорема доказана.

Прямая Эйлера (доказана автором)

Докажем что ортоцентр, центроид и центр описанной окружности треугольника лежат на одной прямой (эта прямая получила название прямой Эйлера), причем OG=1/2GH.



Доказательство: Точка G(g) –центроид треугольника ABC, $H(h)$-ортоцентр, а O(o) – центр описанной около треугольника окружности.

Для того, чтобы данные точки были коллинеарны, должно выполнятся равенство (10):

$$(g-o)(\bar{g}-\bar{h})-(\bar{g}-\bar{o})(g-h)=0$$

Примем точку O за начало отсчета, тогда

$$g(\bar{g}\text{-}\bar{h})\text{-}\bar{g}(g-h)\text{=}g^2\text{-}g\bar{h}-(g^2\text{-}h\bar{g})\text{=-}g\bar{h}+h\bar{g} \qquad (30)$$

Комплексная координата ортоцентра вычисляется по формуле (24)

$$h=a+b+c, \qquad (30а)$$

а центроида по формуле (23)

$$g=\frac{1}{3}(a+b+c) \qquad (30в)$$

Подставим в (30), получим

$$\frac{1}{3}(a+b+c)(\overline{a+b+c})\text{-}(a+b+c)(\frac{1}{3}(\overline{a+b+c}))=0.$$

Равенство (10) выполняется, следовательно, центроид, ортоцентр и центр описанной около треугольника окружности лежат на одной прямой.

$$OG=\mathrm{g}=\frac{1}{3}(a+b+c)$$

$$GH=h\text{-}g=a+b+c\text{-}\frac{1}{3}(a+b+c)=\frac{2}{3}(a+b+c)$$

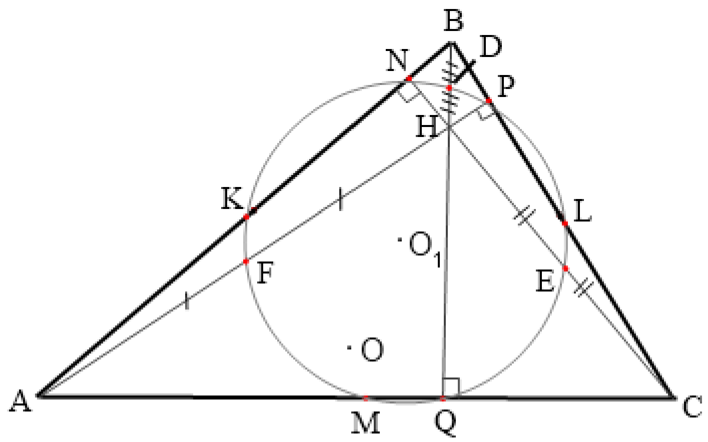
Получили, что $OG=\frac{1}{2}GH$.

Теорема доказана.

<u>Окружность Эйлера (окружность девяти точек). Доказано автором</u>

Рассмотрим треугольник *ABC*. Условимся, что $|OA|=|OB|=|OC|$=1, т.е. все вершины треугольника принадлежат единичной окружности $z\bar{z}=1$ (центр описанной окружности *O* - начало координат, а радиус - единица длины).

Докажем, что основания трёх высот произвольного треугольника, середины трёх его сторон и середины трёх отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности, причем ее центр является серединой отрезка *OH*, где *H*, напомним, ортоцентр треугольника *ABC.* Такая окружность называется ***окружностью Эйлера***.



Пусть точки K, L и M – середины сторон треугольника ABC, точки Q,N,P – основания его высот, точки F,E,D середины трёх отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром.

Докажем, что точки D, E, F, K, L, M, N, P, Q принадлежат одной окружности

Присвоим точкам соответствующие комплексные координаты:

$$k = \frac{a+b}{2},\ \ l = \frac{b+c}{2};\ \ m = \frac{a+c}{2},\qquad o_1 = \frac{h}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

$$d = \frac{2a+b+c}{2};\qquad e = \frac{2c+a+b}{2};\qquad f = \frac{2b+a+c}{2}$$

$$n = \frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{ab}{c}\right),\ q = \frac{1}{2}\left(a+c+b-\frac{ac}{b}\right), p = \frac{1}{2}\left(c+b+a-\frac{cb}{a}\right)$$

$$O_1K = |o_1 - k| = \left|\frac{c}{2}\right|, O_1L = |o_1 - l| = \left|\frac{a}{2}\right|, O_1M = |o_1 - m| = \left|\frac{b}{2}\right|$$

$$O_1D = |o_1 - d| = \left|\frac{a}{2}\right|, O_1E = |o_1 - e| = \left|\frac{c}{2}\right|, O_1F = |o_1 - f| = \left|\frac{b}{2}\right|$$

$$O_1N = |o_1 - n| = \frac{1}{2}\left|\frac{ab}{c}\right| = \frac{1}{2}\frac{|a||b|}{|c|},\qquad O_1Q = \frac{1}{2}\frac{|a||c|}{|b|},\qquad O_1F = \frac{1}{2}\frac{|b||c|}{|a|}.$$

Т.к. треугольник ABC вписан в окружность $z\bar{z} = 1$, то

$$|a| = |b| = |c| = 1, \rightarrow \left|\frac{a}{2}\right| = \left|\frac{b}{2}\right| = \left|\frac{c}{2}\right| = \frac{1}{2}\frac{|a||b|}{|c|} = \frac{1}{2}\frac{|a||c|}{|b|} = \frac{1}{2}\frac{|b||c|}{|a|} = \frac{1}{2}$$

Значит, точки D, E, F, K, L, M,N,Q,F принадлежат одной окружности

<u>Теорема Гаусса[2]</u>

Если прямая пересекает прямые, содержащие стороны BC, CA, AB треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1, то середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 коллинеарны

Доказательство. Используя (11), запишем условия коллинеарности троек точек $AB1C$, $CA1B$, $BC1A$, $A1B1C1$:

$$
\begin{aligned}
&a(\bar b_1-\bar c)+b_1(\bar c-\bar a)+c(\bar a-\bar b_1)=0,\\
&c(\bar a_1-\bar b)+a_1(\bar b-\bar c)+b(\bar c-\bar a_1)=0,\\
&b(\bar c_1-\bar a)+c_1(\bar a-\bar b)+a(\bar b-\bar c_1)=0,\\
&a_1(\bar b_1-\bar c_1)+b_1(\bar c_1-\bar a_1)+c_1(\bar a_1-\bar b_1)=0
\end{aligned}
\qquad (31)
$$

Если *M, N, P* — середины отрезков *AA1, BB1, CC1*, то предстоит показать, что

$$m(\bar n-\bar p)+n(\bar p-\bar m)+p(\bar m-\bar n)=0 \qquad (32)$$

Так как $m=\frac{1}{2}(a+a_1),\ n=\frac{1}{2}(b+b_1),\ p=\frac{1}{2}(c+c_1)$, то доказываемое равенство (31) эквивалентно такому:

$$(a+a_1)(\bar b+\bar b_1-\bar c-\bar c_1)+(b+b_1)(\bar c+\bar c_1-\bar a-\bar a_1)+(c+c_1)(\bar a+\bar a_1-\bar b-\bar b_1)=0$$

или после перемножения:

$$
\begin{aligned}
&a(\bar b-\bar c)+a(\bar b_1-\bar c_1)+a_1(\bar b-\bar c)+a_1(\bar b_1-\bar c_1)+\\
&+b(\bar c-\bar a)+b(\bar c_1-\bar a_1)+b_1(\bar c-\bar a)+b_1(\bar c_1-\bar a_1)+\\
&+c(\bar a-\bar b)+c(\bar a_1-\bar b_1)+c_1(\bar a-\bar b)+c_1(\bar a_1-\bar b_1)=0
\end{aligned}
\qquad (33)
$$

Теперь легко видеть то, что (33) получается почленным сложением равенств (31). Доказательство закончено.

Глава IV.
Решение задач ЕГЭ и различных олимпиад методом комплексных чисел.

Задача 1. *ЕГЭ -2012, С-4*

На прямой, содержащей медиану AD прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, взята точка E, удаленная от вершины A на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника BCE, если BC=6, AC=4.

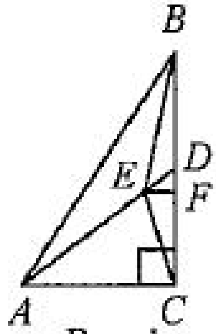


Рис. 1

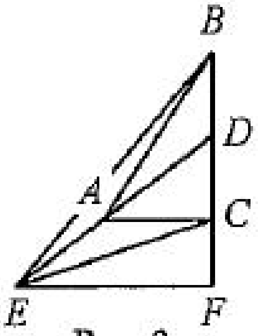


Рис. 2

Первый способ решения.[8]
По теореме Пифагора AD=5. Тогда ED=1
Пусть точка E лежит на луче AD. Медиана AD длиннее AE, и точка E лежит внутри треугольника ABC (рис. 1)

Опустим из точки E перпендикуляр EF на прямую BC и рассмотрим подобные прямоугольные треугольники DEF и DAC. Из подобия этих треугольников находим:

$$\mathrm{EF} = \frac{\mathrm{AC{\cdot}ED}}{\mathrm{AD}} = \frac{4}{5}$$

Следовательно, $\mathrm{S_{BCE}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 2{,}4.$
Пусть теперь точка A лежит между E и D (рис. 2). В этом случае

ED=9 и $\mathrm{EF} = \frac{\mathrm{AC{\cdot}ED}}{\mathrm{AD}} = \frac{36}{5}.$

Тогда $\mathrm{S_{BCE}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{36}{5} = 21{,}6.$

Ответ: 2,4; 21,6.

Решение задачи с помощью комплексных чисел.
I случай: точка E лежит на луче AD. Т. к. D — середина CB, то CD=3.
А т. к. CA=4, то понятно, что AD=5, т. е. DE=1.
Примем точку C за начальную, а прямые CA и CB за действительную и мнимую оси. Тогда A(4), C(0), B(6i), D(3i), E(e).
Точки A, E и D коллинеарны, тогда $\frac{e-4}{3i-e} = 4$т. е. e=$\frac{12i+4}{5}$.
По формуле (25)
$\mathrm{S_{CBE}}$=$\left|\frac{\bar{i}}{4}(e6\bar{i}+6i(-\bar{e})\right|$=$\left|\frac{6i^2}{4}(e-\bar{e})\right|$=2,4

II случай: точка A лежит между точками D и E, тогда

$$\frac{4-e}{3i-4}=\frac{4}{5}, \text{ т. е. } e=\frac{36-12i}{5}$$

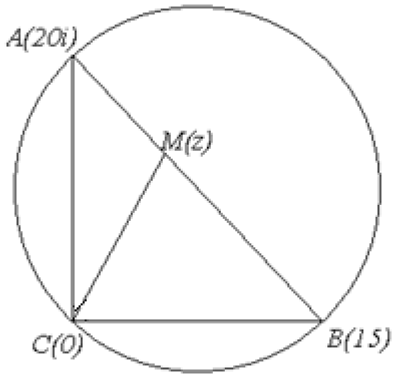
$$S_{CBE}=\left|\frac{3i^2}{2}\left(\frac{36-12i}{5}-\frac{-36-12i}{5}\right)\right|=21{,}6$$

Ответ: 2,4 и 21,6

Для решения задачи первым способом необходимо иметь ряд догадок, которые могут появиться не сразу, а после достаточно длительных рассуждений. Хотя, если ученик хорошо подготовлен, то само решение складывается мгновенно. При решении же задачи вторым способом мы используем готовые формулы, экономя время на поиске. Однако понимаем, что, не зная формул, задачи методом комплексных чисел не решить. Как видим, каждый способ имеет свои плюсы и минусы.

Задача 2 (МИОО, 2011):

«Точка *M* лежит на отрезке *AB*. На окружности с диаметром *AB* взята точка *C*, удаленная от точек *A*, *M* и *B* на расстояния 20, 14 и 15 соответственно. Найдите площадь треугольника *BMC*.»*[11]*



Решение:

Т. к. AB – диаметр окружности, то ΔABC– прямоугольный, $\angle C=90°$

Примем C за нулевую точку плоскости, тогда A(20i), B(15), M(z). Поскольку CM=14, то справедливо равенство $z\bar{z}=196$, т. е. точка M $\in$ окружности с центром в т. C и r=14. Найдем точки пересечения этой окружности с прямой AB:

Уравнение прямой AB (10a):

$$20i(15-\bar{z})+15(\bar{z}+20i)+z(-20i-15)=0$$

Заменив $\bar{z}$ на $\frac{196}{z}$ и домножив все уравнение на $(4i-3)$, получим квадратное уравнение относительно z:

$$25z^2+120i(4i-3)z+196(4i-3)^2=0$$

$$z_{1,2}=\frac{2(3-4i)(6i\pm\sqrt{13})}{5}$$

По формуле (28) находим площадь ΔMBC:

$$S=\frac{i}{4}\left(z\left(\bar{b}-\bar{c}\right)+b(\bar{c}-\bar{z})+c\left(\bar{z}-\bar{b}\right)\right)$$

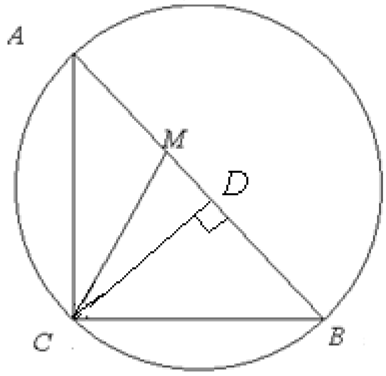
Где $c=0, \bar{c}=0, b=15, \bar{b}=15,\ \bar{z}=\frac{196*5}{2(3-4i)(6i\pm\sqrt{13})}$

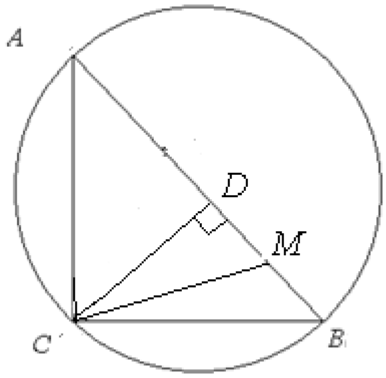
Выполнив равносильные преобразования, получим

$$S=54\pm12\sqrt{13}\ \text{кв. ед.}$$

<u>*Ответ.*</u> $54\pm12\sqrt{13}$ *кв. ед.*

Если решать задачу геометрическими методами, то необходимо рассматривать два различных случая: 1-ый - точка M лежит между A и B; 2-ой - между D и B.





Решая задачу методом комплексных чисел, двойственность решения получается за счет наличия двух точек пересечения окружности и прямой. Это обстоятельство позволяет нам избежать распространенной ошибки.

Задача 3

Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AB=6MC_1$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

<u>Решение:</u>

Пусть C – нулевая точка плоскости, точке A присвоим действительную единицу. Тогда задача сводится к доказательству того, что b – чисто мнимое число.

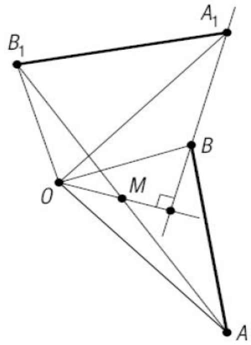
$AB^2=(b-1)(\bar{b}-1)$. M – центроид, его координата равна $\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}$

$$MC_1^2=\left(\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\bar{b}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\bar{b}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3b}(b+1)(\bar{b}+1)$$

Т. к. $AB=6MC_1$, то $(b-1)\left(\bar{b}-1\right)=(b+1)(\bar{b}+1)$. Выполнив преобразования, получим $b=-\bar{b}$, т. е. b – число чисто мнимое

Задача 4.

В результате поворота на $90°$ вокруг точки O отрезок AB перешёл в отрезок $A'B'$. Доказать, что медиана OM треугольника OAB' перпендикулярна прямой $A'B$.



Решение:

Пусть координаты O, A, B равны соответственно $0, 1, b$. Тогда точки A' и B' будут иметь координаты $a' = i$ и $b' = bi$, а середина M отрезка AB' - координату $m = \frac{1}{2}(1 + bi)$.

Находим:

$$\frac{a' - b}{m - 0} = \frac{i - b}{\frac{1}{2}(1 + bi)} = \frac{2i(i - b)}{i - b} = 2i$$

число – чисто мнимое. На основании критерия перпендикулярности (отрезки AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда число $\frac{a-b}{c-d}$является чисто мнимым), прямые OM и $A'B$ перпендикулярны.

Задача 5*(Московская олимпиада, 1992 год).*

Из основания высоты треугольника опущены перпендикуляры на две стороны, не соответственные этой высоте. Доказать, что расстояние между основаниями этих перпендикуляров не зависит от выбора высоты треугольника.

Решение:

Пусть дан треугольник ABC, причём описанная около него окружность имеет уравнение $z\bar{z} = 1$. Если CD - высота треугольника, то

$$d = \frac{1}{2}(a + b + c - \frac{ab}{c})$$

Комплексные координаты оснований M и N перпендикуляров, опущенных из точки D на AC и BC соответственно, равны

$$m = \frac{1}{2}\left(a + c + d - \frac{ac\bar{d}}{2}\right)$$
$$n = \frac{1}{2}(b + c + d - \frac{bc\bar{d}}{2})$$

Находим:

$$m - n = \frac{1}{2}\left(a - b + c\bar{d}(b - a)\right) = \frac{1}{2}(a - b)\left(1 - c\bar{d}\right) = \frac{(a - b)(a - c)(b - c)}{4ab}$$

Так как $|a| = |b| = 1,$то $|m - n| = \frac{|(a-b)\times(b-c)(c-a)|}{4}$. Это выражение симметрично относительно a, b, c, т.е. расстояние MN не зависит от выбора высоты треугольника.

Заключение

Мне удалось показать, как работает метод комплексных чисел на достаточно простых задачах и теоремах, которые понятны и доступны каждому ученику, овладевшему школьным курсом планиметрии. Мною доказаны теорема Пифагора, теорема Фалеса, теорема о средней линии треугольника, теоремы о прямой и окружности Эйлера. Также удалось решить с помощью этого метода задачи ЕГЭ.

«Конечно! Все задачи могут быть решены и без комплексных чисел. Но ведь в том-то и дело, что алгебра комплексных чисел представляет собой ещё один эффективный метод решения планиметрических задач. Речь может идти лишь о выборе метода, который более эффективен для данной задачи. Споры о преимуществах того или иного метода являются беспредметными, если рассматривать эти методы вообще, без применения к конкретной задаче»[2].

В работе большое место занимает свод формул для решения планиметрических задач с помощью комплексных чисел. Это является **основным недостатком** метода и в то же время его **достоинством**, так как позволяет решать достаточно сложные задачи по готовым формулам элементарными выкладками. Кроме того, считаю, что при решении задач планиметрии данный метод является универсальным.

Данная работа может быть использована, как пособие для решения задач планиметрии, с помощью приведенных здесь формул.

Библиографический список

1. Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. – 52 с.
2. Понарин Я. П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов – М.: МЦНМО, 2004. - 160 с.
3. Швецов Д. От прямой Симсона до теоремы Дроз-Фарни, Квант. - №6, 2009. – с. 44-48
4. Яглом И. М. Геометрические преобразования. Линейные и круговые преобразования. - Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 612 с.
5. Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии – М.: Физматгиз, 1963. – 192 с.
6. Моркович А.Г. и др., Алгебра и начала математического анализа.10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений(профильный уровень) – М.: Мнемозина, 2012. – 343 с.
7. Андронов И.К. Математика действительных и комплексных чисел – М.: Просвещение, 1975. – 158 с.

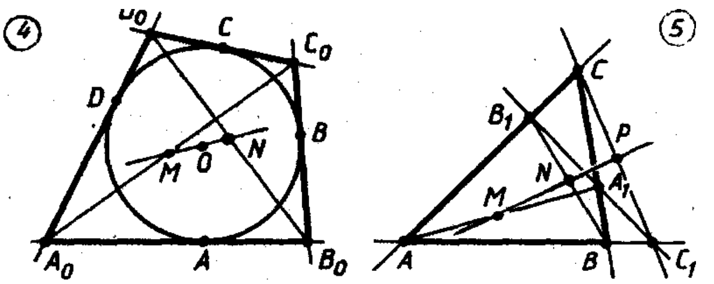
Интернет-ресурсы

8. http://probno.ru/kimy-2012-dosrochnye/
9. http://egeigia.ru/all-ege/materialy-ege
10. http://mathus.ru/math/
11. http://www.alexlarin.net/

Приложение

Классические теоремы элементарной геометрии

Теорема Ньютона. *В описанном около окружности четырехугольнике середины диагоналей коллинеарны с центром окружности.*



Доказательство. Примем центр окружности за начало, полагая ее радиус равным единице. Обозначим точки касания сторон данного четырехугольника *AoBoCoDo* через *A*, *B, C, D* (в круговом порядке) (рис.4). Пусть *M* и *N* — середины диагоналей А*o*С*o* и *BoDo* соответственно. Тогда согласно формуле точек пересечения касательных к окружности $z=\frac{2ab}{a+b}$ точки А*o*, В*o*, С*o*, Do будут иметь соответственно комплексные координаты:

$$a_0=\frac{2ad}{a+d},\quad b_0=\frac{2ab}{a+b},\quad c_0=\frac{2bc}{b+c},\quad d_0=\frac{2cd}{c+d}$$

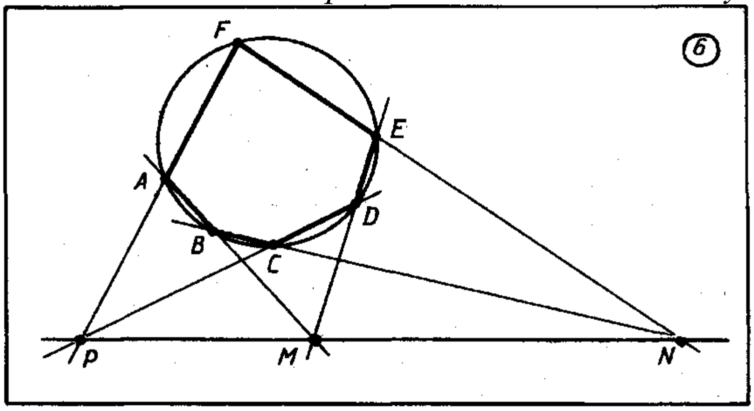
где a, b, c, d – комплексные координаты точек A, B, C, D.

Поэтому

$$m=\frac{1}{2}(a_0+c_0)=\frac{ad}{a+d}+\frac{bc}{b+c},\quad n=\frac{1}{2}(b_0+d_0)=\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}$$

Вычисляем $\frac{m}{n}=\frac{(a+b)(c+d)}{(b+c)(d+a)}$. Поскольку $\bar{a}=\frac{1}{a}, \bar{b}=\frac{1}{b}, \bar{c}=\frac{1}{c}, \bar{d}=\frac{1}{d}$, то непосредственно видно, что $\frac{m}{n}=\frac{\bar{m}}{\bar{n}}$. На основании (6) точки *O, M, N* коллинеарны.

Теорема Паскаля. *Точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны вписанного шестиугольника, лежат на одной прямой.*



Доказательство. Пусть в окружность вписан шестиугольник *ABCDEF* и [illegible] (рис.6). Примем центр окружности за нулевую точку плоскости, а ее радиус - за единицу длины. Тогда согласно (17) имеем:

$$m = [illegible], \quad n = [illegible], \quad p = [illegible]$$

Вычисляем

$$m - n = [illegible]$$

и аналогично

$$n - p = [illegible]$$

Далее находим:

$$\frac{m - n}{n - p} = \frac{(b - e)(c - f)[illegible]}{(f - e)(a - b)[illegible]}$$

Поскольку числа $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}$ равны соответственно $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}, \frac{1}{f}$, то устная проверка обнаруживает, что найденное выражение совпадает со своим сопряженным, т. е. является действительным числом. Это означает коллинеарность точек *M, N, P*.

Теорема Монжа. *Во вписанном в окружность четырехугольнике прямые, проходящие через середины сторон и. каждой диагонали перпендикулярно противоположным сторонам и соответственно другой диагонали, пересекаются в одной точке. Она называется точкой Монжа вписанного четырехугольника.*

Доказательство. Серединные перпендикуляры к сторонам четырёхугольника *ABCD* пересекаются в центре описанной окружности, который примем за начальную точку. Для каждой точки *M(z)* серединного перпендикуляра к [AB] число $\dfrac{z-\frac{1}{2}(a+b)}{a-b}$ чисто мнимое.

В частности, при z=0 оно равно $-\dfrac{(a+b)}{2(a-b)}$. Для каждой точки *N(z)* прямой, проходящей через середину стороны *CD* перпендикулярно (AB), число $\dfrac{z-\frac{1}{2}(c+d)}{a-b}$ необходимо будет чисто мнимым и обратно. Но для z=$\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ оно равно $\dfrac{a+b}{2(a-b)}$ т. е. чисто мнимое. Следовательно, точка *E* с комплексной координатой

$\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ лежит на указанной прямой. А это выражение симметрично относительно букв a, b, c, d. Поэтому и остальные пять аналогично построенных прямых содержат точку *E*.