Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 9-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Треугольник. Фигура знакомая и незнакомая

Семёнов Никита Владимирович,
9 кл., МАОУ «Лицей №1», г. Кунгур,
Изергина Галина Семёновна,
учитель математики высшей категории.

Пермь. 2014.

Оглавление

Введение

Математики называют треугольник двумерным симплексом. «Симплекс» - по латыни означает простейший. Трёхмерным симплексом называют треугольную пирамиду. Именно в силу своей простоты треугольник является основой многих измерений.

Треугольник всегда имел широкое применение в практической жизни. Так, в строительном искусстве испокон веков используется свойство жесткости треугольника для укрепления различных строений и их деталей. Изображение треугольников и задачи на треугольники встречаются в папирусах, в старинных индийских книгах и других древних документах. В древней Греции учение о треугольнике развивалось в ионийской школе, основанной в VII веке до нашей эры Фалесом, в школе Пифагора и других; оно было затем полностью изложено в первой книге «Начал» Евклида. В знаменитых «Началах» Евклида доказывается, что центром окружности, описанном около треугольника, является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам, излагается материал о центрах вписанной и описанной окружностей, точек пересечения медиан, высот и биссектрис.

Есть основания полагать, что греки до Евклида обладали этими знаниями, а Евклид их просто систематизировал и включил в «Начала» для полноты изложения материала. Среди «определений», которыми начинается эта книга, имеются и следующие «Из трехсторонних фигур равносторонний треугольник есть фигура, имеющая три равные стороны, равнобедренный же – имеющая только две равные стороны, равносторонний – имеющая три неравные стороны».

Понятие о треугольнике исторически развивалось, по-видимому, так: сначала рассматривались лишь правильные, затем равнобедренные и, наконец, разносторонние треугольники.

Начало открытий замечательных точек треугольника, не изучаемых в школе, положил в 17 веке Джованни Чева (Ceva) (1648 - 1734) – итальянский математик. Основной заслугой Чевы является построение учения о секущих, которое положило начало новой – синтетической геометрии; оно изложено в сочинении "О взаимнопересекающихся прямых". Его теорема позволила открыть свойства замечательных точек треугольника, известных как точки Нагеля и Жергонна.

Тема «Треугольник» изучается в школьном курсе геометрии, но это малая часть тех сведений, которые известны про треугольник.

Цель работы – изучение и обобщение знаний о треугольнике.

Методы исследования:

1.Сбор материала;

2. Анализ;

3. Обобщение.

В ходе работы были поставлены следующие з**адачи**:

1.Собрать материал по теме «Треугольник», который не входит в школьную программу по геометрии;

2. Проанализировать и обобщить собранный материал.

Практическая значимость:

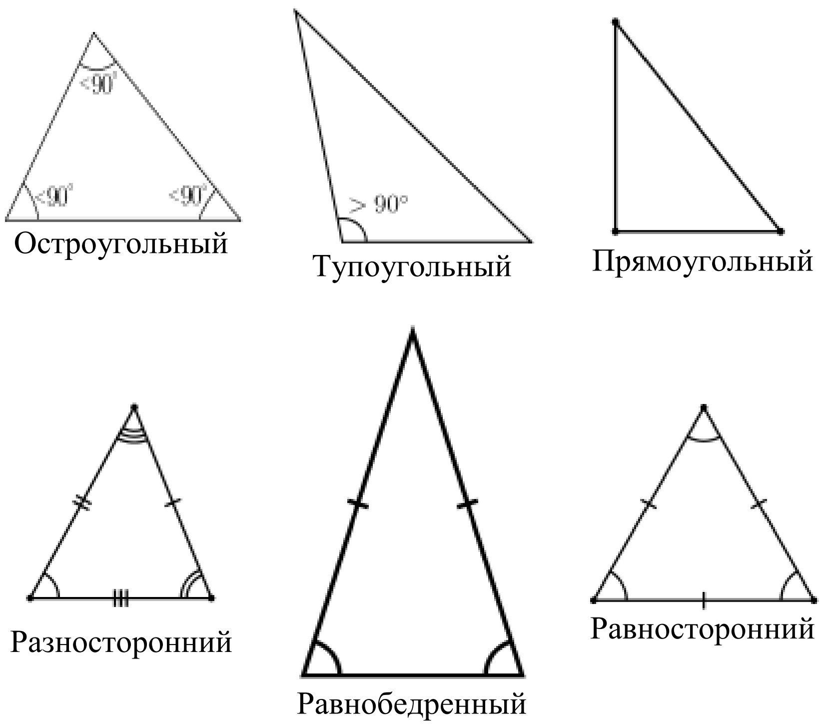
При решении олимпиадных задач мне не хватает знаний по геометрии. Я хочу расширить свои знания, особенно про свойства треугольника.

Дополнительные знания помогут при подготовке к математическим олимпиадам, при подготовке к ГИА, на уроках математики и геометрии.

1. Треугольник. Фигура знакомая и незнакомая.

1.1. Виды треугольников

Виды треугольников различают по углам и сторонам.



Виды треугольников по величине углов:

Поскольку в евклидовой геометрии сумма углов треугольника равна 180°, то не менее двух углов в треугольнике должны быть острыми (меньшими 90°). Выделяют следующие виды треугольников:

Если все углы треугольника острые, то треугольник называется **остроугольным;**

Если один из углов треугольника тупой (больше 90°), то треугольник называется **тупоугольным**;

Если один из углов треугольника прямой (равен 90°), то треугольник называется **прямоугольным**.

Две стороны, образующие прямой угол, называются катетами, а сторона, противолежащая прямому углу, называется гипотенузой.

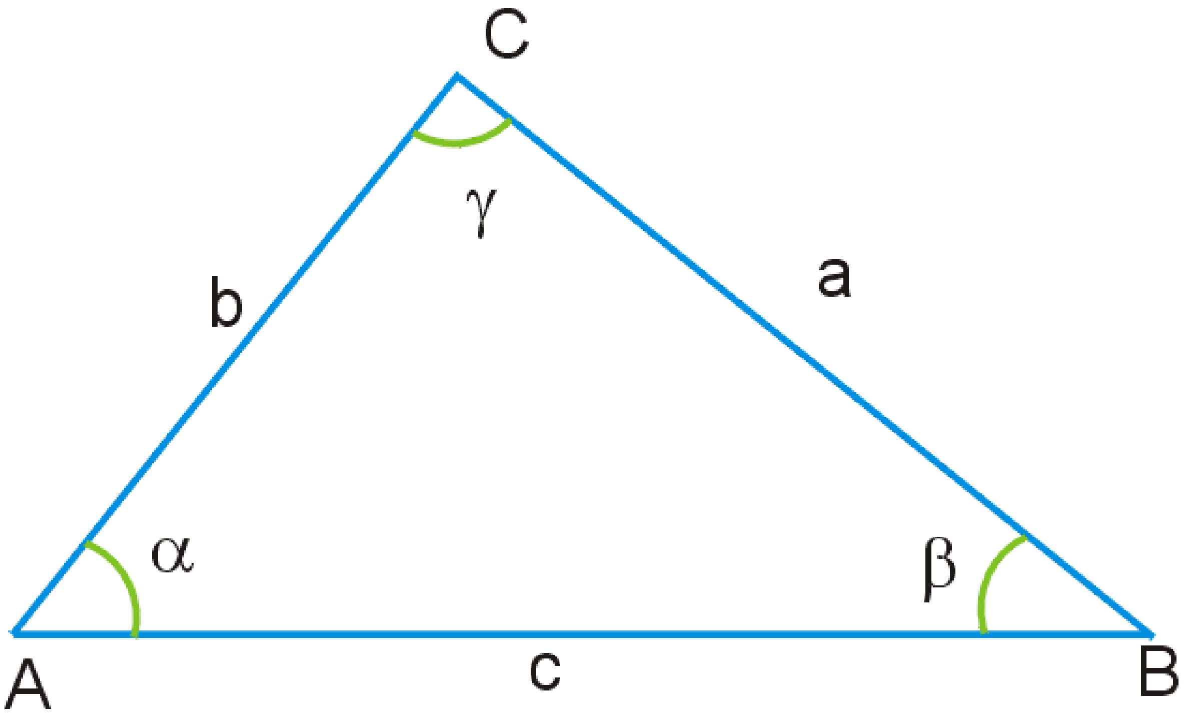
Виды треугольников по числу равных сторон:

Разносторонним называется треугольник, у которого длины трёх сторон попарно различны.

Равнобедренным называется треугольник, у которого две стороны равны. Эти стороны называются боковыми, третья сторона называется основанием. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Высота, медиана и биссектриса равнобедренного треугольника, опущенные на основание, совпадают.

Равносторонним называется треугольник, у которого все три стороны равны. В равностороннем треугольнике все углы равны 60°, а центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

1.2. Основные свойства треугольников



ΔABC:

Вершины – точки A, B и C;

Стороны – отрезки BC, AC и AB, равные a, b и c соответственно, соединяющие вершины;

Углы:

∠A = ∠BAC = ∠α — угол, образованный сторонами AB, AC и BC;

∠B = ∠ABC = ∠β — угол, образованный сторонами AB, BC и AC;

∠C = ∠ACB = ∠γ— угол, образованный сторонами BC, AC и AB.

Любой треугольник обладает данными свойствами:

- Сумма углов треугольника равна 180°;
- Против равных сторон лежат равные углы, и против равных углов лежат равные стороны. Из этого следует, что все углы в равностороннем треугольнике равны;
- Против большей стороны лежит больший угол, и против большего угла лежит большая сторона;

- Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним;
- Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше их разности.

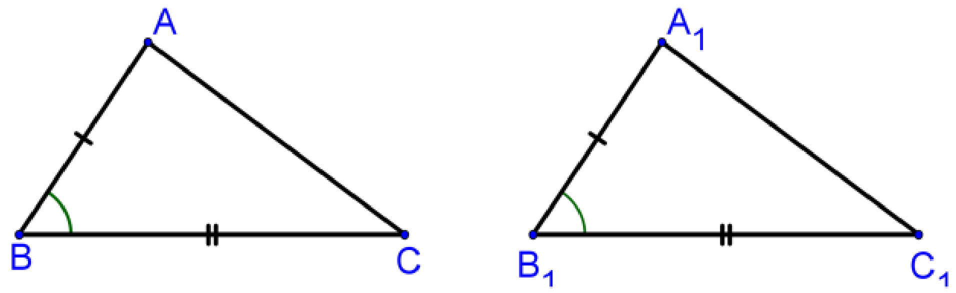
Внутренний угол – угол, образованный сторонами треугольника и лежащий в его внутренней области.

Внешний угол – угол, смежный к внутреннему углу треугольника.

Признаки равенства произвольных треугольников:

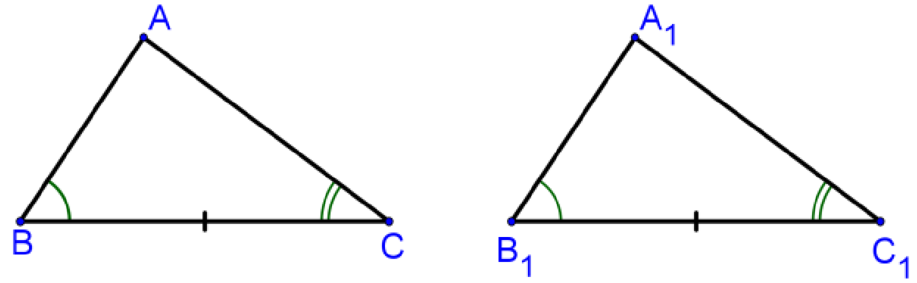
1) **Равенство по двум сторонам и углу между ними.**

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



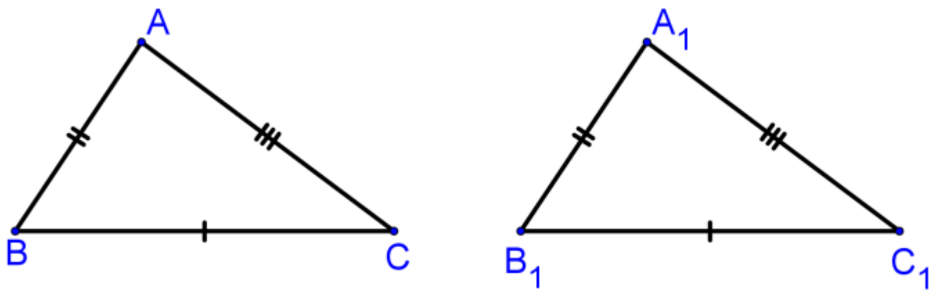
2) **Равенство по стороне и двум прилежащим к ней углам.**

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



3) **Равенство по трем сторонам.**

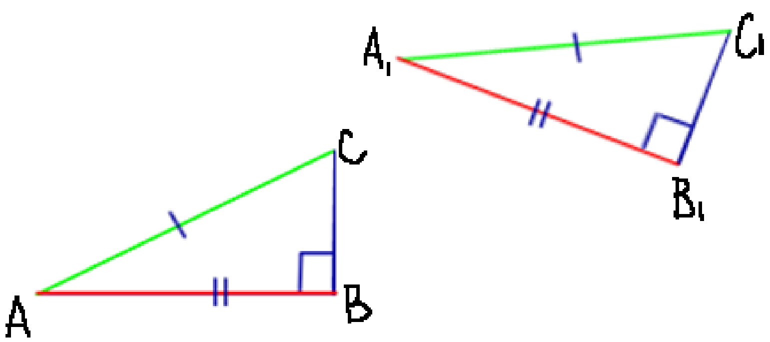
Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.



Признаки равенства прямоугольных треугольников:

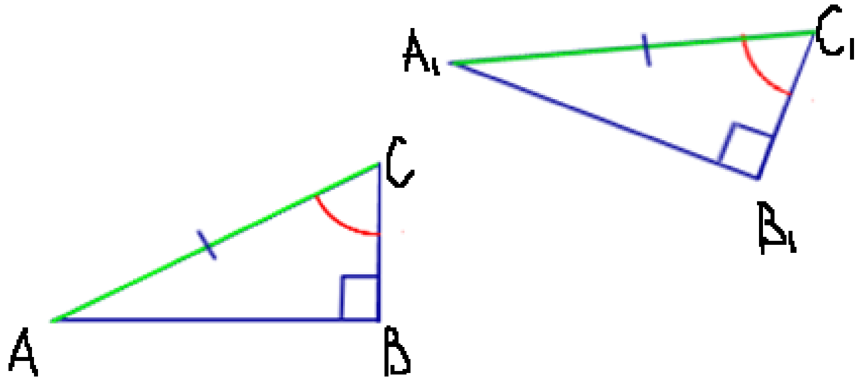
1) **По катету и гипотенузе.**

Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.



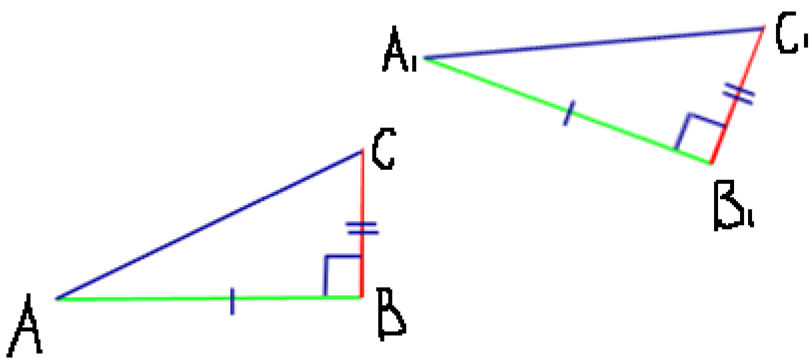
2) **По гипотенузе и острому углу.**

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.



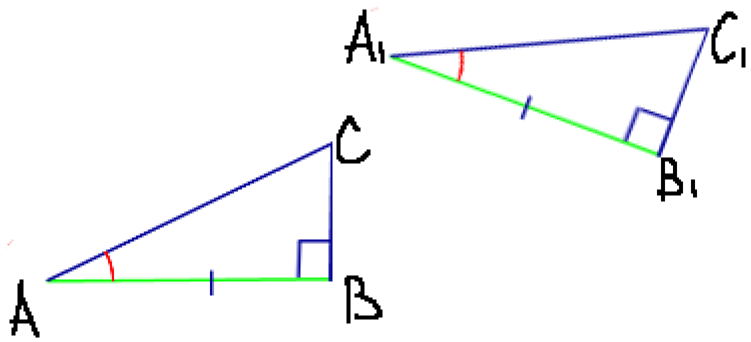
3) По двум катетам.

Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.



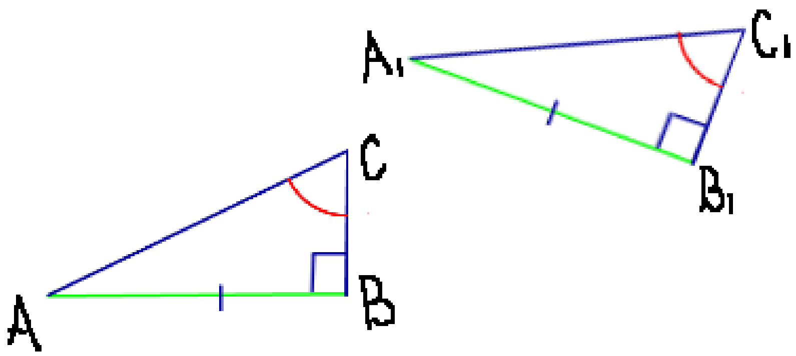
4) По катету и прилежащему острому углу.

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.



5) По катету и противолежащему острому углу.

Если катет и противолежащий острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.



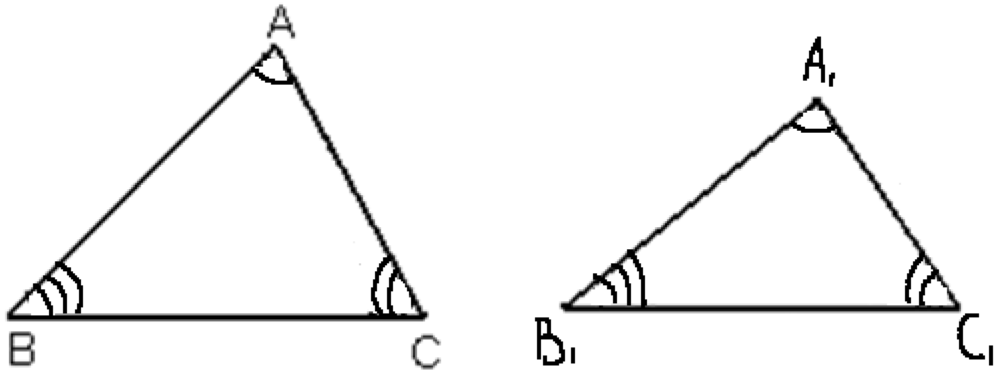
Подобие треугольников.

Два треугольника называются **подобными**, если их углы попарно равны, а сходственные стороны пропорциональны сходственным сторонам другого.

То есть, два треугольника подобны, если их можно обозначить буквами ABC и $A_1B_1C_1$ так, что

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

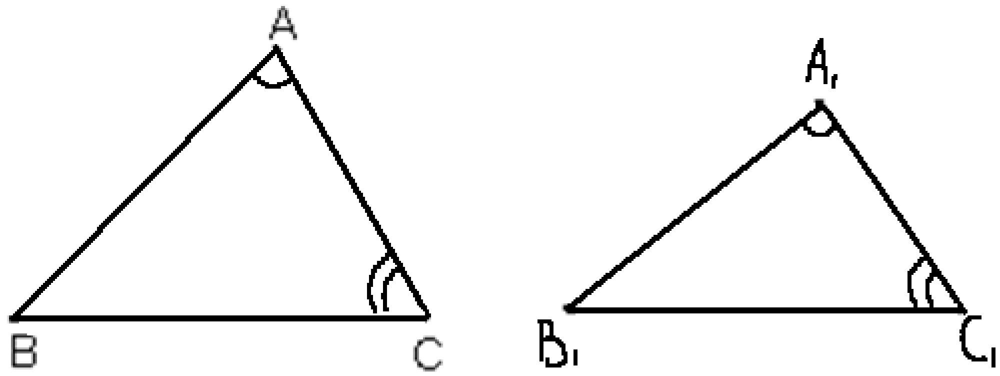
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$



Число k, равное отношению сходственных сторон треугольников, называется коэффициентом подобия.

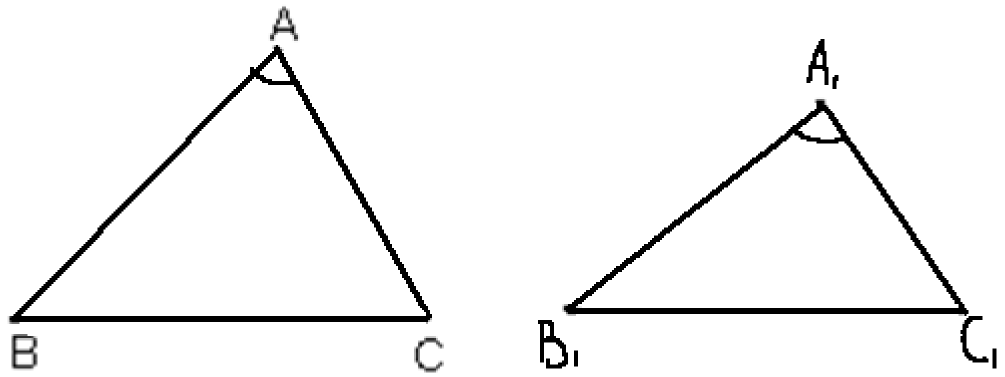
Признаки подобия треугольников:

1) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



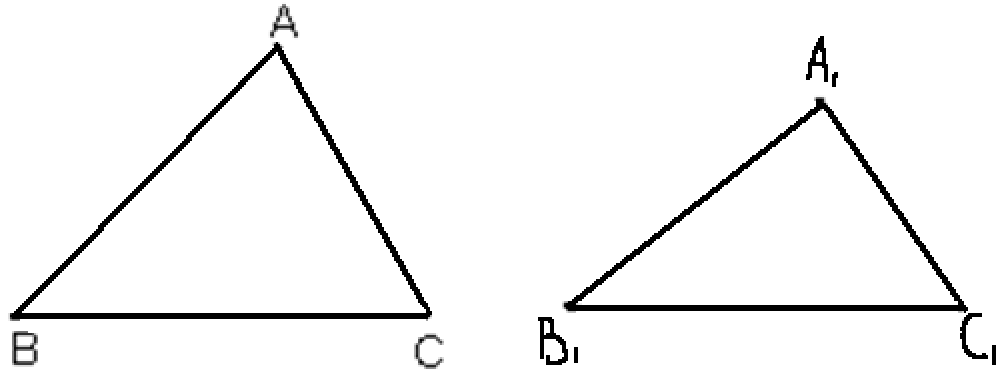
$\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$.

2) Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$, $\angle A = \angle A_1$

3) Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

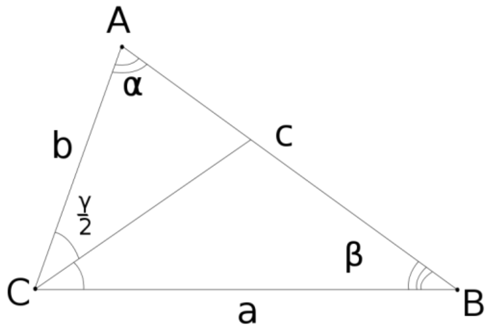


$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

2. Замечательные точки треугольника

2.1. Точка пересечения биссектрис

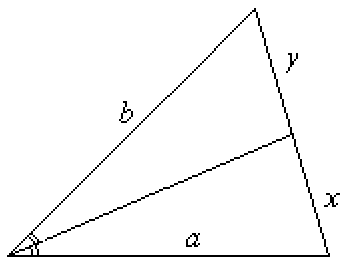
Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противолежащей стороне этого треугольника.



Свойства биссектрис треугольника:

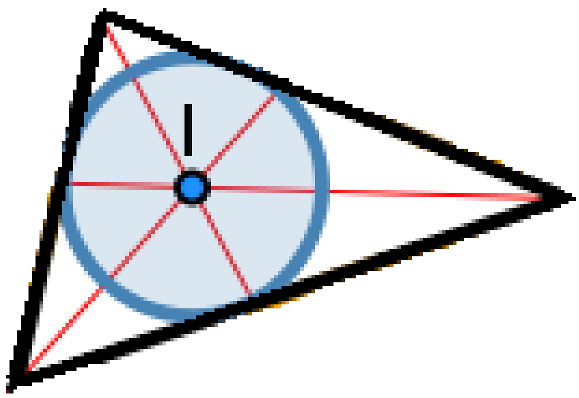
1) Биссектриса угла — это геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла.

2) Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилегажащим сторонам: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$



3) Точка пересечения биссектрис треугольника является центром окружности, вписанной в этот треугольник.

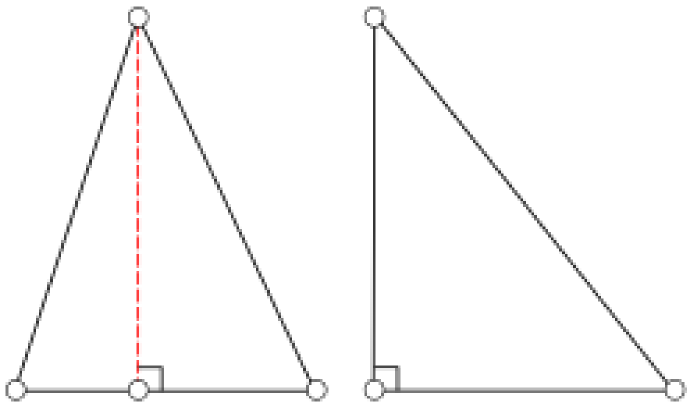
Инцентр – точка пересечения биссектрис треугольника. Традиционно обозначается латинской буквой I.



Инцентр находится на одинаковом расстоянии от всех сторон треугольника. Инцентр делит биссектрису угла А в отношении (b+c):a, где a, b, c – стороны треугольника (аналогично и для двух других биссектрис).

2.2. Точка пересечения высот

Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону этого треугольника.



Свойства высот треугольника:

1) В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному.

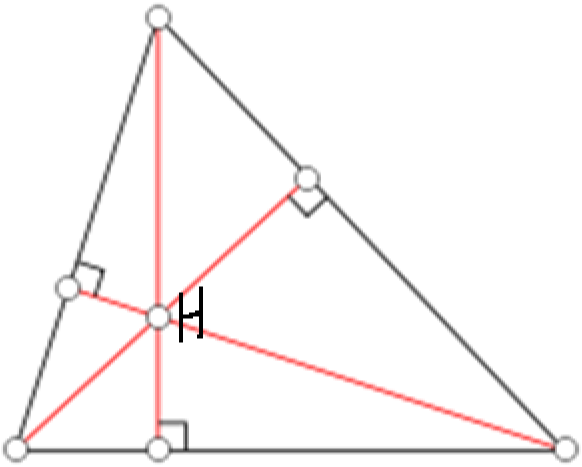
2) В остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники.

3) Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром.

4) В остроугольном треугольнике ортоцентр лежит внутри треугольника; в тупоугольном — вне треугольника; в прямоугольном — в вершине прямого угла.

5) Основания высот образуют так называемый ортотреугольник, обладающий собственными свойствами.

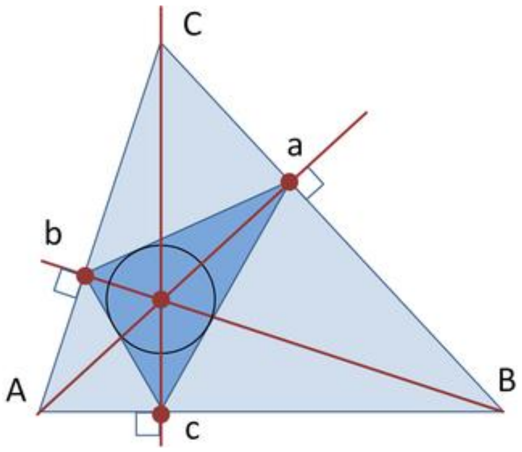
Ортоцентр — точка пересечения высот треугольника или их продолжений. Традиционно обозначается латинской буквой *H*.



Несмотря на то, что пересечение трех высот треугольника в одной точке казалось очевидным, строгое доказательство этого факта дал **Карл Фридрих Гаусс** только в XVIII веке.

Ортотреугольник.

Ортотреугольник (ортоцентрический треугольник) — это треугольник Δabc, вершины которого являются основаниями высот треугольника ΔABC.



Свойства ортотреугольника:

1) Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами углов его ортотреугольника.

2) Точки касания вписанной в данный треугольник окружности соединены отрезками, и в полученном треугольнике проведены высоты. Тогда прямые, соединяющие основания этих высот, параллельны сторонам исходного треугольника.

3) Задача Фаньяно. Ортоцентрический треугольник остроугольного треугольника ABC обладает наименьшим периметром из всех вписанных треугольников.

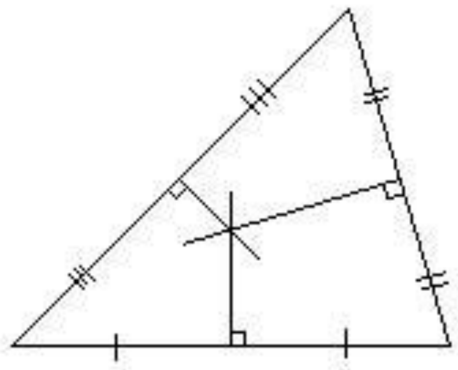
Если точки A_1, B_1 и C_1 на сторонах соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC таковы, что

$\angle BA_1C_1 = \angle CA_1B_1$, $\angle CB_1A_1 = \angle AB_1C_1$ и $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$,

то $A_1B_1C_1$ — ортотреугольник треугольника ABC.

2.3. Точка пересечения серединных перпендикуляров

Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему и делящую его на 2 равные части, называют **серединным перпендикуляром.**



Свойства серединных перпендикуляров треугольника:

1) Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке — центре описанной окружности. У остроугольного треугольника эта точка лежит внутри, у тупоугольного — вне треугольника, у прямоугольного — на середине гипотенузы.

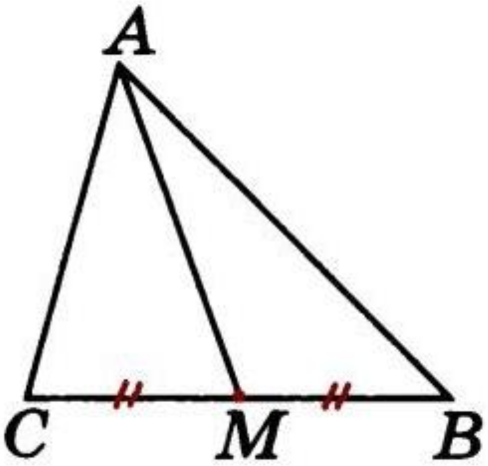
2) Любая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Верно и обратное утверждение: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

3) Точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, является центром окружности, описанной около этого треугольника.

Точка пересечения серединных перпендикуляров – **центр описанной окружности.**

2.4. Точка пересечения медиан

Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны этого треугольника.



Свойства медиан треугольника:

1) Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая называется **центроидом или центром тяжести треугольника**, и делятся этой точкой на две части в отношении 2:1, считая от вершины.

2) Медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.

3) Треугольник делится тремя медианами на шесть равновеликих треугольников.

Два треугольника называются ***равновеликими****, если они имеют равную площадь.*

4) Большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана.

5) Из векторов, образующих медианы, можно составить треугольник.

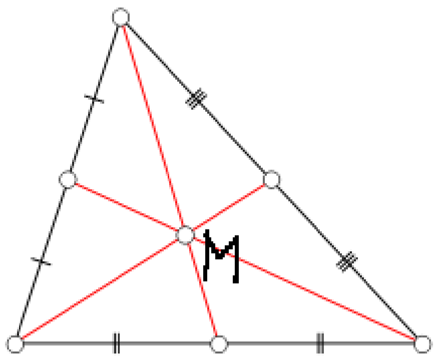
6) Сумма квадратов медиан произвольного треугольника в 4/3 раза меньше суммы квадратов его сторон:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Центроид — точка пересечения медиан в треугольнике. Центроид традиционно обозначается латинской буквой M.

Свойства центроида:

1) Центроид делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

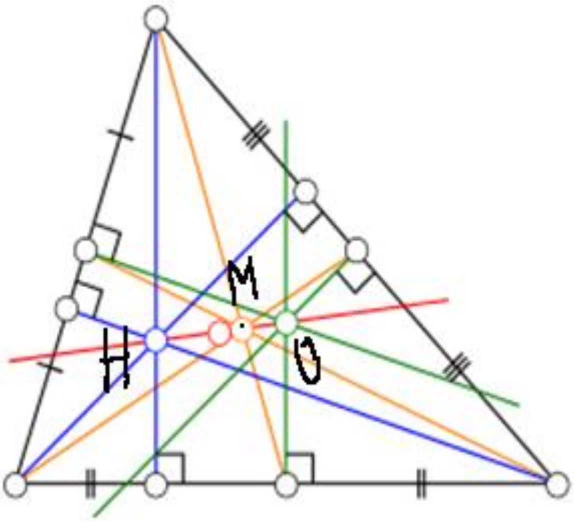


2) Центроид лежит на отрезке, соединяющем ортоцентр и центр описанной окружности, и делит его в отношении 2:1.

3) Если в вершины треугольника поместить равные массы, то центр масс (барицентр) полученной системы будет совпадать с центроидом. Более того, центр масс треугольника с равномерно распределённой массой также находится в центроиде.

2.5. Прямая Эйлера

Прямая Эйлера может быть определена как прямая, проходящая через центр описанной окружности и ортоцентр треугольника.



Прямая Эйлера (красная) проходит через центр описанной окружности треугольника, его ортоцентр, центр тяжести и центр окружности девяти точек

Свойства прямой Эйлера:

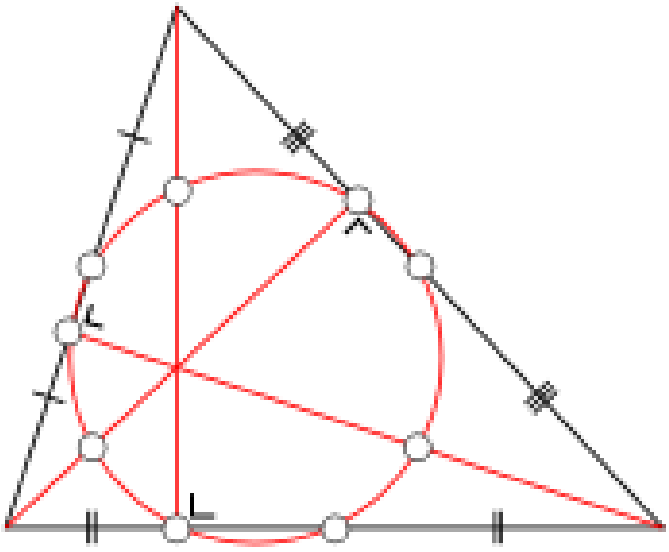
1) Прямая Эйлера проходит через: центроид треугольника, ортоцентр треугольника, точку пересечения серединных перпендикуляров, центр окружности девяти точек.

2) **Теорема Эйлера.** Точка пересечения медиан M делит отрезок между центром описанной окружности O и ортоцентром H в отношении 1:2 ($OM : MH = 1 : 2$).

Теорема Эйлера была доказана в **1765 году Леонардом Эйлером.** Тогда же он обнаружил и тот факт, что середины сторон треугольника и основания его высот лежат на одной окружности.

2.6. Окружность девяти точек

Окружность девяти точек — это окружность, проходящая через середины всех трёх сторон треугольника. Она также называется **окружностью Эйлера**, **окружностью Фейербаха**, **окружностью шести точек**.



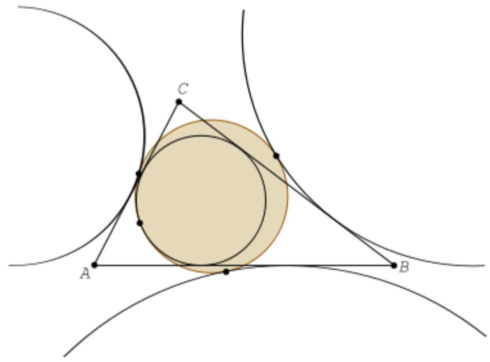
Окружность девяти точек получила такое название из-за следующей теоремы:

Основания трёх высот произвольного треугольника, середины трёх его сторон и середины трёх отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром, лежат все на одной окружности.

Свойства окружности 9 точек:

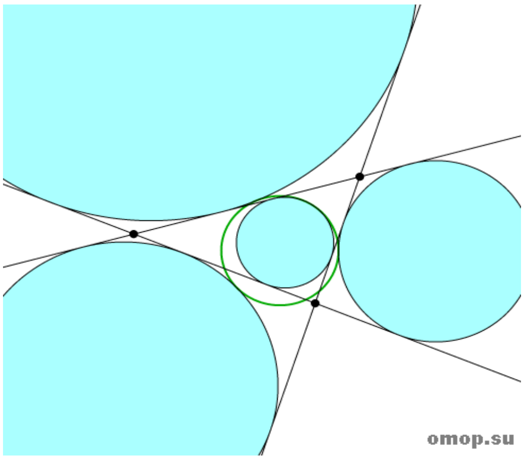
1) Центр окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера, точно в середине отрезка между ортоцентром и центром описанной окружности.

2) Радиус окружности девяти точек равен половине радиуса описанной окружности. Более того, описанная окружность есть образ окружности девяти точек относительно гомотетии с центром в ортоцентре и коэффициентом 2.



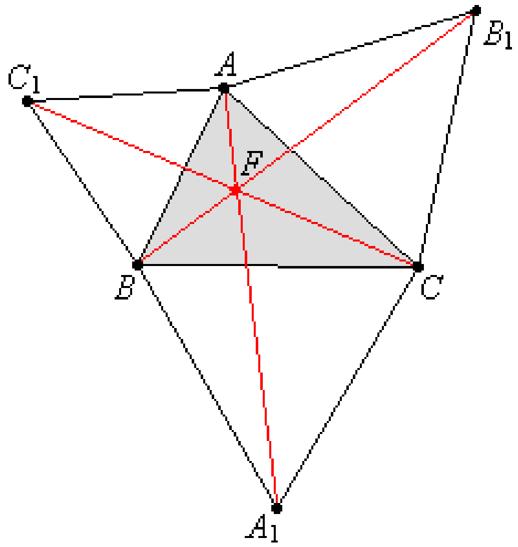
3) Теорема Фейербаха: окружность девяти точек произвольного треугольника касается вписанной и всех трёх вневписанных окружностей этого треугольника.

К.Фейербах открыл еще одно, самое удивительное свойство этой окружности: она касается четырёх окружностей треугольника – вписанной и трех вневписанных.



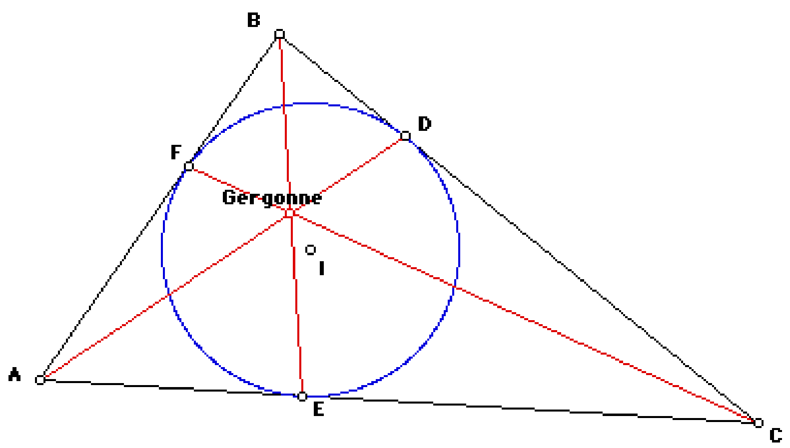
2.7. Другие известные точки треугольника

1) Точка Ферма



Точка *F* внутри остроугольного треугольника *ABC*, для которой минимальна сумма *AF*+*BF*+*CF* расстояний до его вершин, называется **точкой Ферма** треугольника.

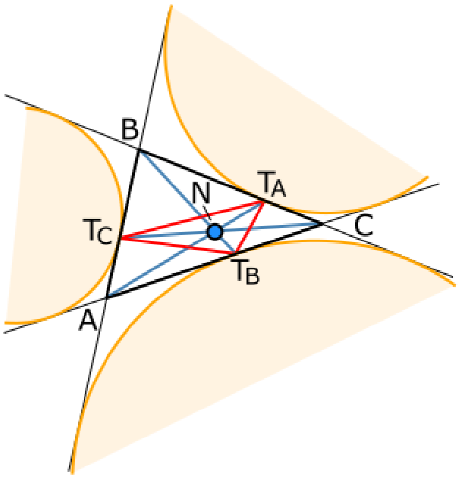
2) Точка Жергонна



Точкой Жергонна называется точка пересечения отрезков, которые соединяют вершины треугольника с точками касания сторон, противоположных этим вершинам, и вписанной в треугольник окружности.

Пусть точка *I* — центр вписанной окружности треугольника ABC. Пусть вписанная окружность касается сторон треугольника BC, AC и AB в точках D, E и F соответственно. Точка Жергонна — это точка пересечения отрезков AD, BE и CF.

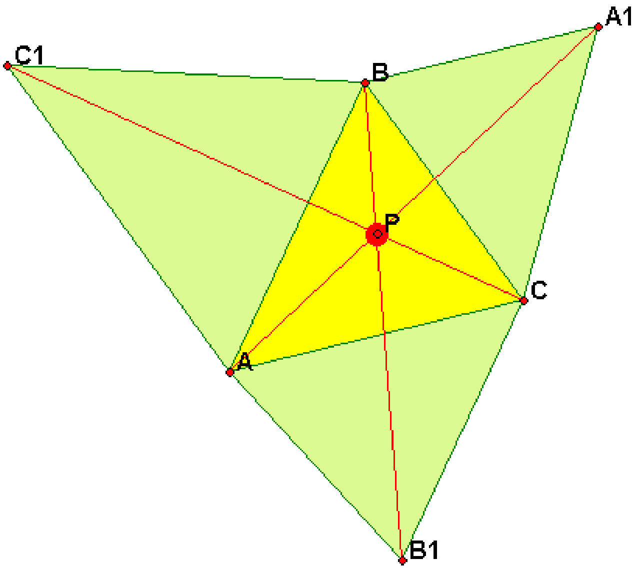
3) Точка Нагеля



Точка Нагеля — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с соответствующими вневписанными окружностями.

4) Точка Брокара

Если на сторонах треугольника ABC внешним образом построить подобные ему треугольники CA_1B, CAB_1 и C_1AB (углы при первых вершинах всех четырех треугольников равны и т.д.), то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекутся в точке P, которую называют точкой Брокара. Одна из особенностей этой точки состоит в том, что $\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$.

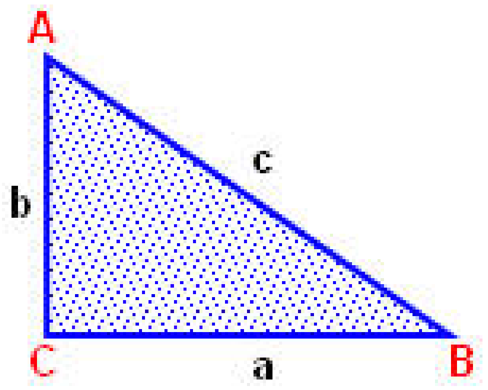


3. Именные треугольники

3.1. Треугольник Пифагора

Как известно, Теорема Пифагора является почти самой знаменитой теоремой геометрии и имеет наибольшее количество доказательств. На данный момент зарегистрировано 367 доказательств данной теоремы! Ее суть заключается в том, что в прямоугольном треугольнике катеты a и b связаны с гипотенузой следующим простым соотношением:

$$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$$



Несмотря на простоту данной теоремы, ее, по мнению многих математиков, относят к разряду наиболее выдающихся математических теорем за всю историю математики. Гениальный астроном Иоганн Кеплер выразил свое восхищение теоремой Пифагора в следующих словах:

«В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».

Один из примеров доказательства теоремы Пифагора:

Это вариант древнеиндийского доказательства математика Бхаскари.

Построим прямоугольный треугольник со сторонами **a, b и c** (рис.1). Затем построим два квадрата со сторонами, равными сумме длин двух катетов, – **(a+b)**. В каждом из квадратов выполним построения, как на рисунках 2 и 3.

В первом квадрате построим четыре таких же треугольника, как на рисунке 1. В результате получатся два квадрата: один со стороной **a**, второй со стороной **b**.

Во втором квадрате четыре построенных аналогичных треугольника образуют квадрат со стороной, равной гипотенузе **c**.

Сумма площадей построенных квадратов на рис.2 равна площади построенного нами квадрата со стороной c на рис.3. Это легко проверить, высчитав площади квадратов на рис. 2 по формуле. А площадь вписанного квадрата на рисунке 3. путем вычитания площадей четырех равных между собой вписанных в квадрат прямоугольных треугольников из площади большого квадрата со стороной **(a+b)**.

Записав все это, имеем: $\mathbf{a^2+b^2=(a+b)^2 - 4*1/2*a*b}$. Раскроем скобки, проведем все необходимые алгебраические вычисления и получим, что $\mathbf{a^2+b^2= a^2+b^2}$. При этом площадь вписанного на рис.3. квадрата можно вычислить и по традиционной формуле $\mathbf{S=c^2}$. Т.е. $\mathbf{a^2+b^2=c^2}$ – мы доказали теорему Пифагора.

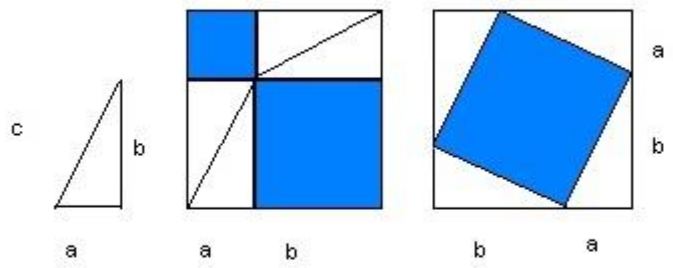
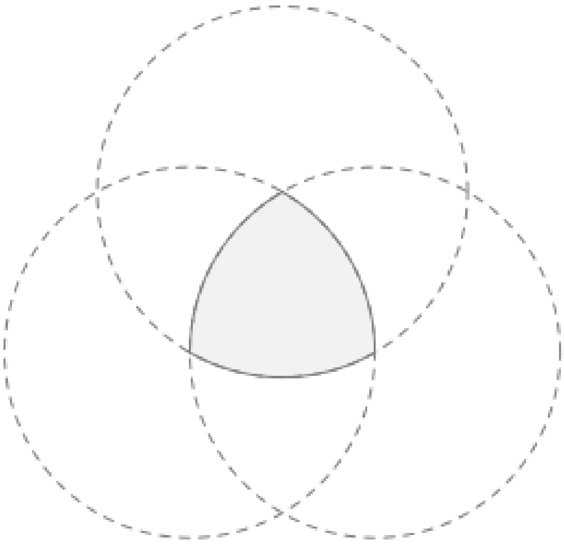


рис.1 рис.2 рис.3

3.2. Треугольник Рёло

Треугольник Рёло представляет собой область пересечения трёх равных кругов с центрами в вершинах правильного треугольника и радиусами, равными его стороне. Негладкая замкнутая кривая, ограничивающая эту фигуру, также называется треугольником Рёло.



Треугольник Рёло является простейшей после круга фигурой постоянной ширины. То есть если к треугольнику Рёло провести пару параллельных опорных прямых, то независимо от выбранного направления расстояние между ними будет постоянным. Это расстояние называется *шириной* треугольника Рёло.

Треугольник Рёло обладает осевой симметрией. Он имеет три оси симметрии второго порядка, каждая из которых проходит через вершину треугольника и середину противоположной дуги, а также одну ось симметрии третьего порядка, перпендикулярную плоскости треугольника и проходящую через его центр.

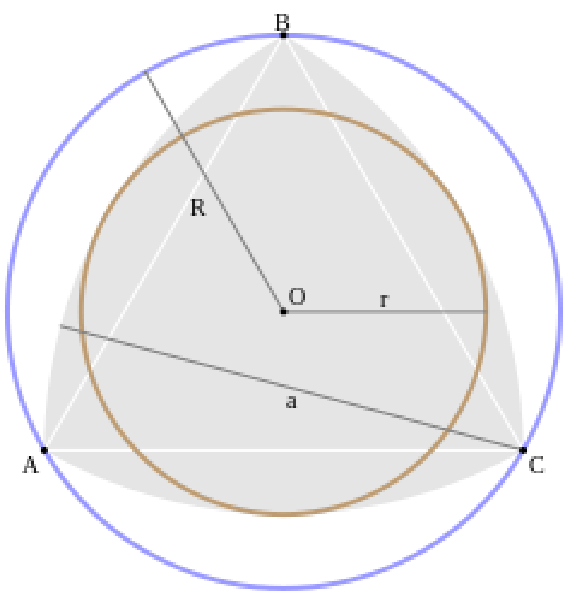
Основные геометрические характеристики:

1) Если ширина треугольника Рёло равна a, то его площадь равна:

$$S = \frac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right) \cdot a^2,$$

2) Периметр:

$$p = \pi a,$$



3) Радиус вписанной окружности:

$$r = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot a,$$

4) Радиус описанной окружности:

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Построение:

Треугольник Рёло можно построить с помощью одного только циркуля, не прибегая к линейке. Это построение сводится к последовательному проведению трёх равных окружностей. Центр первой выбирется произвольно, центром второй может быть любая точка первой окружности, а центром третьей — любая из двух точек пересечения первых двух окружностей.

3. 3. Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

0:	1
1:	1 1
2:	1 2 1
3:	1 3 3 1
4:	1 4 6 4 1
5:	1 5 10 10 5 1
6:	1 6 15 20 15 6 1
7:	1 7 21 35 35 21 7 1
8:	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9:	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10:	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
11:	1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
12:	1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
13:	1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
14:	1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

Напомним одно из свойств биноминальных коэффициентов:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Данное равенство показывает, что биноминальные коэффициенты можно последовательно выписывать в виде треугольной таблицы, которая называется треугольником Паскаля.

В n-ой строке треугольника Паскаля стоят коэффициенты, разложенные на $(a+b)^n$, причем каждый коэффициент, кроме крайних двух, которые равны 1, равен сумме соответствующих коэффициентов из предыдущей строки.

Треугольник Паскаля — бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел.

Свойства треугольника Паскаля:

1) Числа треугольника симметричны (равны) относительно вертикальной оси.
2) В строке с номером *n*:
   a. Первое и последнее числа равны 1.
   b. Второе и предпоследнее числа равны *n*.
   c. Третье число равно треугольному числу $T_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$, что также равно сумме номеров предшествующих строк.
   d. Четвёртое число является тетраэдрическим.
   e. *M*-е число (при нумерации с 0) равно биномиальному коэффициенту. $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
3) Сумма чисел *n*-й строки треугольника Паскаля равна 2^n.
4) Все числа в *n*-й строке, кроме единиц, делятся на число *n*, если и только если *n* является простым числом.
5) Каждое число в треугольнике равно количеству способов добраться до него из вершины, перемещаясь либо вправо-вниз, либо влево-вниз.

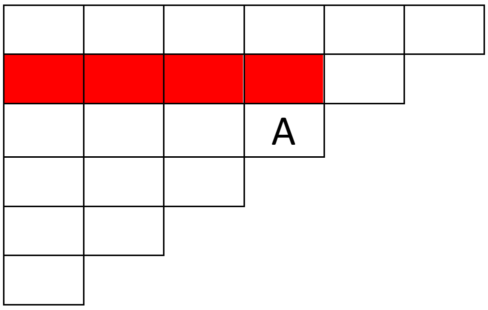
Представим треугольник Паскаля в следующем виде:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						

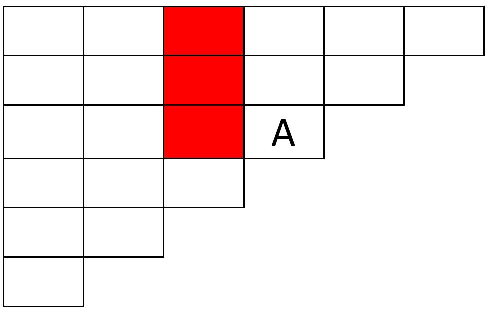
1	8	36
1	9	
1		

И теперь рассмотрим несколько свойств, обнаруженных самим Блезом Паскалем:

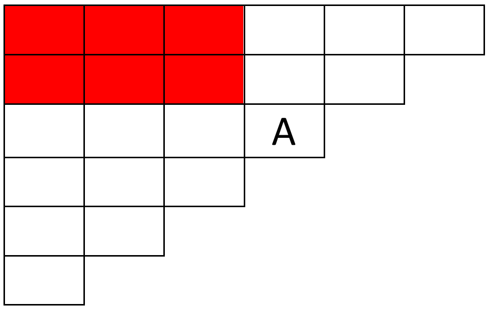
1) Каждое число А в таблице равно сумме числе предшествующего горизонтального ряда, начиная с самого левого вплоть до стоящего непосредственно над числом А (в котором клетки, содержащие слагаемые, дающие в сумме А, заштрихованы).



2) Каждое число А в таблице равно сумме числе предшествующего вертикального ряда, начиная с самого верхнего вплоть до стоящего непосредственно левее числа А.

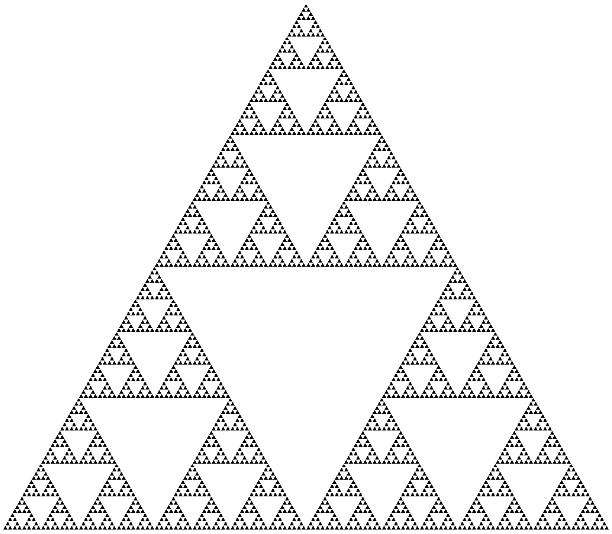


3) Каждое число в таблице, будучи уменьшенным на единицу, равно сумме всех чисел, заполняющих прямоугольник, ограниченный теми вертикальными и горизонтальными рядами, на пересечении которых стоит число А (сами эти ряды в рассматриваемый прямоугольник не включаются).



«Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике» - так говорил известный математик Мартин Гарднер о треугольнике Паскаля.

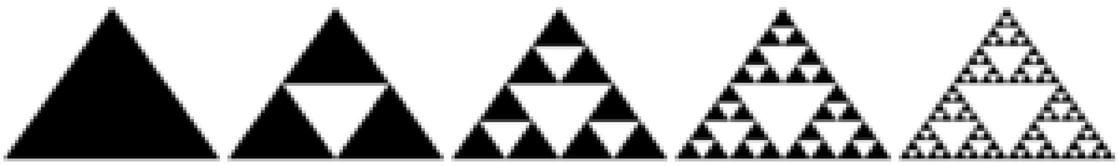
3.4. Треугольник Серпинского



Треугольник Серпинского — фрактал, предложенный польским математиком Вацлавом Серпинским в 1915 году. Также известен как «решётка» или «салфетка» Серпинского.

Построение:

Равносторонний треугольник M_0делится прямыми, параллельными его сторонам, на 4 равных равносторонних треугольника. Из треугольника удаляется центральный треугольник. Получается множество M_1, состоящее из 3 оставшихся треугольников «первого ранга». Поступая точно так же с каждым из треугольников первого ранга, получим множество M_2, состоящее из 9 равносторонних треугольников второго ранга. Продолжая этот процесс бесконечно, получим бесконечную последовательность $M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_n \supset \ldots$, пересечение членов которой есть треугольник Серпинского.



Свойства данного треугольника:

1) Треугольник Серпинского замкнут.

2) Важным свойством треугольника Серпинского является его самоподобие — ведь он состоит из трёх своих копий, уменьшенных в два раза (это части треугольника Серпинского, содержащиеся в маленьких треугольниках, примыкающих к углам).

Интересным фактом данного треугольника является то, что если в треугольнике Паскаля все нечётные числа окрасить в чёрный цвет, а чётные — в белый, то образуется треугольник Серпинского.

Заключение

Для написания своей работы я рассмотрел много теоретического материала про треугольник.

Реферат и презентация могут быть использованы учителями математики для ознакомления учеников с интересными сведениями о треугольнике на уроках математики или факультативных занятиях.

Данная работа может быть использована:

- при подготовке к ГИА
- на уроках математики
- при подготовке к математическим олимпиадам

Работая над темой, я понял, что, несмотря на то, что треугольник называют простейшей фигурой, он скрывает в себе еще много тайн, которые только предстоит разгадать ученым.

Список литературы

1. За страницами учебника алгебры: Кн. Для учащихся 7-9 кл. сред. Шк. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.: ил.
2. Энциклопедия элементарной геометрии (Книга 2) Вебер И., Вайштейн И.
3. Энциклопедия. Мудрость тысячелетий. – М.: ОЛМА-ПРЕСС, 2004.
4. Возникновение и развитие математической науки: Кн. Для учителя. – М.: Просвещение, 1987. – 159 с.: ил.
5. Большая школьная энциклопедия 1 том.
6. Большая математическая энциклопедия / Якушева Г. М. и др. – М.: Филол.
7. Атанасян Л. С. Геометрия: Учеб. Для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2002.
8. Сайт http://ru.wikipedia.org/wiki.