

Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 9-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

**Изучение просачивания жидкости в сыпучем веществе на примере
ячейки Хеле-Шоу**

Стирина Анастасия Евгеньевна,
11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,
Любимова Нина Юрьевна,
старший преподаватель ПНИПУ.

Пермь. 2014.

Оглавление

Введение.....	4
Глава 1. Фрактальная геометрия.....	5
Глава 2 Исследование просачивания.....	7
Заключение.....	12
Список использованной литературы.....	13
Приложение.....	14

Введение

В наше время проблема просачивания вязких жидкостей в сыпучих веществах имеет немаловажное значение для нефтедобывающей и калийной промышленности. Самым распространенным является загрязнение нефтью и различными нефтехимическими продуктами. Экологическая опасность нефти, попавшей на поверхность почвы, состоит в том, что в дальнейшем она просачивается в более глубокие слои. В калийной промышленности просачивание жидкостей используют, закачивая воду в соляной пласт для выдавливания газов из пласта породы. Исходя из актуальности этой проблемы, в данной работе мы решили исследовать просачивание жидкостей в сыпучих веществах, используя в качестве модели ячейку Хеле-Шоу.

По этой теме были проведены различные исследования, как с точки зрения физики, так и с точки зрения химии. Объектом исследования являются структуры, получаемые при просачивании жидкости в сыпучем веществе. Например, в ходе просачивания в веществе жидкости, обладающей высокой вязкостью образуются «вязкие пальцы». Проблема образования так называемых «вязких пальцев» в пористых средах имеет первостепенное значение в процессе добычи нефти. Она представляет интерес и для гидродинамики, и для физики пористых сред. Исследование данной темы может быть полезно в перечисленных областях.

Многие объекты окружающей нас природы имеют форму близкую к фрактальной. В работе предполагается подтвердить то, что изучаемые структуры являются фракталами.

Целью работы является исследование объектов, образующиеся при просачивании жидкости в сыпучее вещество.

Для достижения цели в работе были поставлены следующие **задачи**:

1. Ознакомиться с другими работами в данной области
2. Провести опыт по просачиванию, с помощью ячейки Хеле Шоу
3. Определить геометрию объекта, вычислить его фрактальную размерность
4. Проследить изменение объекта и его геометрии с течением времени
5. Повторить опыт, изменяя различные параметры
6. Спрогнозировать область применения результатов данного исследования

Методы исследования: аналитический (изучение специальной литературы, определение геометрии объекта), экспериментальный (проведение опыта, обработка результатов)

Глава I. Фрактальная геометрия

Традиционная геометрия и топология далеко не полно описывают природные формы. Природа демонстрирует совершенно иной уровень сложности форм, отличный от прямых линий, эллипсов и других известных форм. Естественные формы зачастую оказываются неправильными, сильно фрагментированными и имеют фрактальную структуру. Исторически получилось так, что многие математики откладывали в сторону трудные формы, которые портили красоту их выкладок. В результате созданные ими идеализированные объекты весьма редко встречаются в природе в чистом виде. В природе нет прямых линий, идеальных окружностей, плоскостей и тд.. Всевозможные возмущения, которыми пренебрегают, постоянно вносят свой вклад и портят иллюзию простоты.

Фракталы – геометрические объекты (линии, поверхности, тела), имеющие сильно изрезанную форму и обладающие самоподобием. Изрезанность означает, что, уменьшая масштаб рассмотрения, мы будем видеть все более и более мелкие детали. Самоподобие означает, что фрактал одинаково устроен в широком диапазоне масштабов: мелкие детали, видимые на малых масштабах подобны более крупным, видимым на больших масштабах. Примеры применения фракталов: изменение русла рек, форма антенн в телефонах, форма графиков сердцебиения, упорядоченность здоровых сосудов, фрактальная структура леса.

Саффмэн и Тейлор и Чуоке не только разработали теорию образования вязких пальцев в канале Хеле-Шоу, но и исследовали это явление экспериментально. Существуют так же другие научные работы на данную тему, например: «Особенности неустойчивого вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу при больших числах Пекле» автор – Логвинов, Олег Анатольевич.

Учёными было доказано, что вязкие пальцы имеют фрактальную природу. Всеобщий интерес к фрактальной геометрии пробудил Б. Мандельброт и поведал миру о об объектах, названных фракталами. Фракталы используются при моделировании пористых материалов, например, в нефтехимии.

Фракталы характеризуются такой величиной, как фрактальная размерность. Размерность есть у каждого предмета. Она позволяет связать меру и размер. Размер – характеристика объекта, которую можно измерить линейкой. Мера служит для измерения объектов, но она измеряется не линейкой как размер, её главное свойство — аддитивность (свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям при любом разбиении объекта на части).

Пусть размерность — D , мера — M , размер — L . Тогда формула, связывающая три эти величины, будет иметь вид:

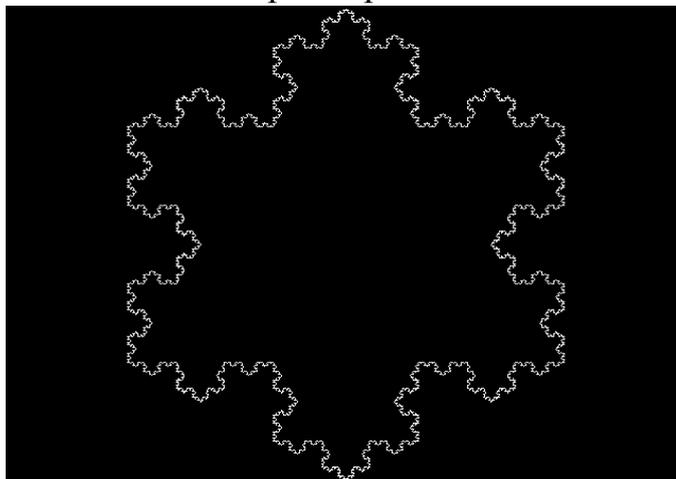
$$M = L^D$$

Для привычных мер эта формула приобретает всем знакомые облики. Для двумерных тел ($D=2$) мерой (M) является площадь (S), для трёхмерных тел ($D=3$) — объём (V):

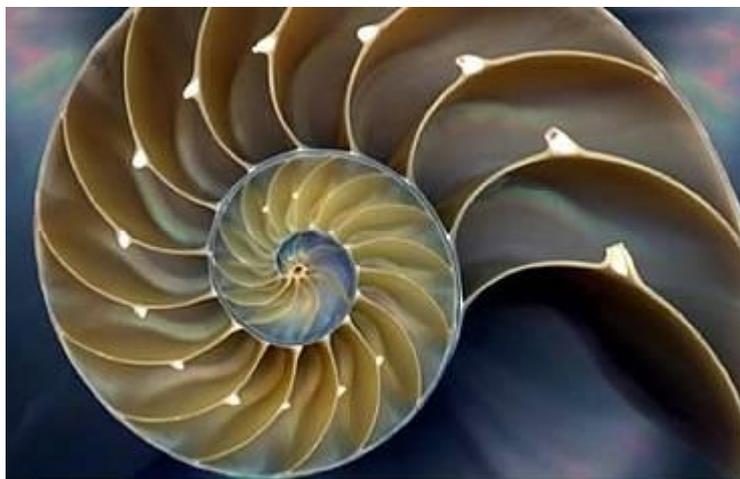
$$S = L^2, V = L^3.$$

При попытке вычислить размерность фрактальных объектов она окажется дробным числом. Так как фрактал состоит из бесконечного числа повторяющихся элементов, невозможно точно измерить его длину.

С геометрических фракталов начиналась история всех фракталов. Этот тип фракталов получается путем простых геометрических построений. Снежинка Коха является примером геометрического фрактала, она, интересна тем, что имеет конечную площадь и бесконечный периметр



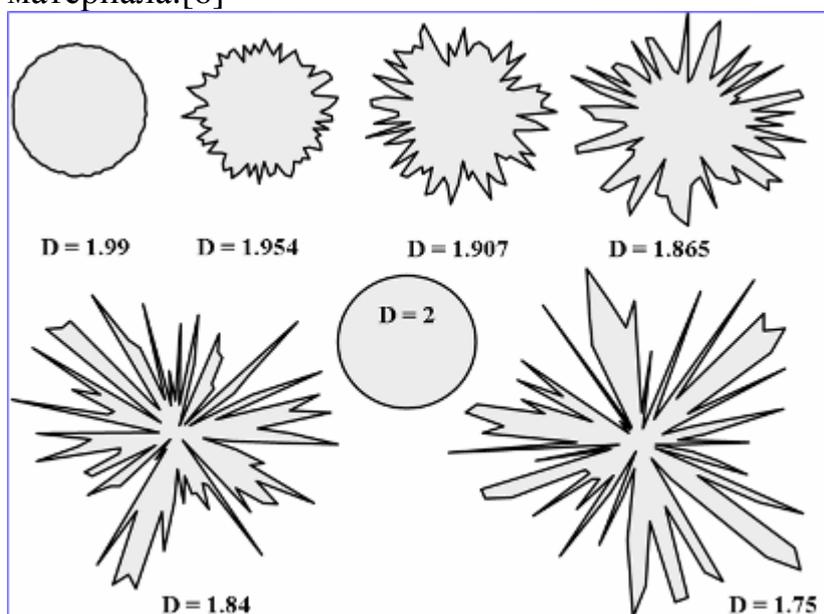
Морские раковины Nautilus являются одним из наиболее известных примеров фрактала в природе



Глава II. Исследование просачивания

Исследование данного объекта проведено с помощью ячейки Хеле Шоу. Ячейка Хеле-Шоу представляет собой две параллельные пластины, разделенные малым зазором, существенно меньшим, чем ширина пластин. [3]

В результате проведения опыта, предполагается получение объекта, имеющего фрактальную природу. Чем «сложнее» (извилистее, шероховатее) линия дислокации, тем меньше величина её фрактальной размерности. Чем меньше фрактальная размерность, тем больше радиус, протяжённость, периметр объекта, тем больше энергия образования дислокации, тем меньше плотность объекта. Геометрическая форма объектов является функцией термодинамических условий. Это даёт возможность управления структурными характеристиками материала.[6]



Структуры подобные полученным в ходе эксперимента, могут послужить моделями для прогнозирования организации работ в калийной промышленности, а так же прогнозирования разливов нефти, в нефтедобывающей промышленности.

Опыт с маслом – модель отражающая разлив нефти, распространение её в почве. Опыт с чернилами – модель отражающая закачивание воды в соляной пласт.

План Эксперимента:

1) Приборы и принадлежности:

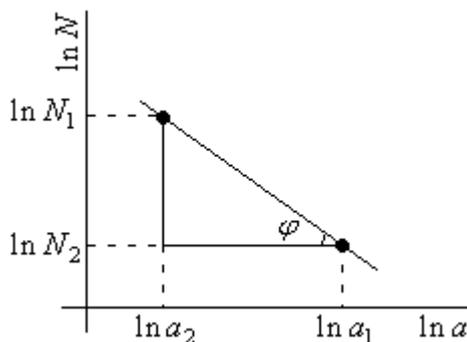
- Две пластинки оргстекла размерами 5,9x5,3см, в одной из пластинок отверстие диаметром $D=0,3$ см
- Одноразовый пластиковый шприц с ценой деления 0,1мл и диаметром наконечника $D=0,3$ см
- Скотч для соединения пластинок

Ход эксперимента:

1. Собрать ячейку Хеле-Шоу из 2-х пластинок оргстекла (в одной их которых отверстие), зажимов и скотча
2. Между пластинками поместить сыпучее вещество (песок/соль) и зажать пластинки
3. Через отверстие, с помощью шприца впрыснуть жидкость (чернила/масло, и т. д.)
4. Наблюдение за образованием «кляксы» (вязких пальцев) с течением времени
5. Определить фрактальную размерность объекта

Для определения фрактальной размерности объектов были проделаны следующие пункты:

1. Покрывать объект сеткой с ячейками фиксированного размера
2. Подсчитать число клеток понадобившихся для покрытия
3. Уменьшить размер клеток и повторить пункты 1 и 2. На каждом шаге количество клеток будет нарастать по двум причинам: уменьшается размер клеток, приходится покрывать всё новые «изломанности» фрактала.
4. Построить график зависимости натурального логарифма от длины ячейки от натурального логарифма от количества ячеек ($\ln a$, $\ln N$)
5. Вычислить тангенс угла наклона полученной прямой



D – размерность объекта

$$D = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\ln N_1 - \ln N_2}{\ln a_1 - \ln a_2}$$

Для вычисления размерности объектов использовались графики (см. приложение)

При проведении опытов был вычислен примерный расход жидкости(Q):

$$Q = \frac{V}{t}$$

Где V – объём впрыскиваемой жидкости, t – время, за которое происходит впрыскивание.

$$Q = \frac{0,2}{4} = 0,05 \text{ мл/с}$$

При существенно большем или меньшем расходе жидкости получаемые объекты не соответствовали нашим предположениям.

Опыт №1 (используется масло и песок)

a – сторона квадрата сетки

N – количество квадратов покрывающих объект

1) $a = 2,5 \text{ мм}; N = 73$

$$\ln a = 0,9163; \ln N = 4,2904$$

2) $a = 2 \text{ мм}; N = 121$

$$\ln a = 0,6931; \ln N = 4,7958$$

3) $a = 1,1 \text{ мм}; N = 381$

$$\ln a = 0,0953; \ln N = 5,9428$$

4) $a = 0,7 \text{ мм}; N = 669$

$$\ln a = -0,3567; \ln N = 6,5058$$

$$D = \text{tg} \varphi = \frac{\ln N_1 - \ln N_2}{\ln a_1 - \ln a_2} = \frac{2,215 - 1,273}{1,273 - 0,9163} = 1,7399$$

При проведении опыта с маслом(жидкость) и песком(сыпучее вещество) была получена структура имеющая размерность $D = 1.7399$

Так как фракталы – это множества с дробной размерностью [5], а полученная размерность не целое число, это доказывает, что объект имеет фрактальную природу.

Опыт №2(используются чернила и песок)

1) $a=2,8\text{мм}; N=82$

$$\ln a = 1,0296; \ln N = 4,4067$$

2) $a=2\text{мм}; N=143$

$$\ln a = 0,6931; \ln N = 4,9628$$

3) $a=1,2\text{мм}; N=454$

$$\ln a = 0,1823; \ln N = 6,1181$$

4) $a=0,8\text{мм}; N=823$

$$\ln a = -0,2231; \ln N = 6,7129$$

$$D = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\ln N_1 - \ln N_2}{\ln a_1 - \ln a_2} = 2,306/1,2527 = 1,841$$

Опыт №3(объект полученный в опыте №2 через 20 минут)

1) $a=3,5\text{мм}; N=137$

$$\ln a = 1,2528; \ln N = 4,9199$$

2) $a=2\text{мм}; N=324$

$$\ln a = 0,6931; \ln N = 5,7807$$

3) $a=1,1\text{мм}; N=755$

$$\ln a = 0,0953; \ln N = 6,6267$$

4) $a=0,9\text{мм}; N=1395$

$$\ln a = -0,1054; \ln N = 7,2123$$

$$D = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\ln N_1 - \ln N_2}{\ln a_1 - \ln a_2} = 2,2924/1,3582 = 1,6878$$

При проведении опытов 2 и 3, установлено, так же, что с течением времени фрактальная размерность меняется: $D_1=1,841$; D_2 (по прошествии 20-ти минут)= $1,6878$. Фрактальная размерность во втором случае оказалась меньше, из

этого следует, что увеличилась разветвленность объекта и, так как фрактальная размерность является и показателем извилистости линий, можно говорить об увеличении извилистости объекта. Извилистость можно определить как среднее отношение пути действительно пройденного жидкостью к кажущемуся или прямому пути.[6]

Опыт №4(используется соль и песок)

$$1) a=5\text{мм}; N=33$$

$$\ln a = 1,6094; \ln N = 3,4965$$

$$2) a=4,5\text{мм}; N=40$$

$$\ln a = 1,5041; \ln N = 3,6889$$

$$3) a=3\text{мм}; N=61$$

$$\ln a = 1,0986; \ln N = 4,1109$$

$$4) a=2,5\text{мм}; N=91$$

$$\ln a = 0,9163; \ln N = 4,5109$$

$$D = \text{tg}\varphi = \frac{\ln N_1 - \ln N_2}{\ln a_1 - \ln a_2} = 1,0144/0,6931 = 1,4636$$

Сравнивая результаты всех опытов, мы сделали вывод о том, что при просачивании жидкости в различных сыпучих веществах образуются объекты с разными фрактальными размерностями.

Например, в опыте №4 и в опыте №2 используется одна жидкость – чернила, но разные сыпучие вещества: соль и песок, фрактальная размерность этих объектов отличается $D(\text{опыт}\#2)=1,841$ и $D(\text{опыт}\#4)=1,4636$. Размерность объекта получившегося в опыте №4 меньше, что означает, что объект имеет более извилистую форму. Так как опыт №4 – это модель отражающая закачивание воды в соляной пласт, то можно сделать вывод о том, что при просачивании чернил в соли, получают структуры большей извилистости.

Аналогично, сравнивая, например, опыт №1 и опыт №3 и №4 получим различие фрактальных размерностей. $D(\text{опыт}\#1)=1,7399$, $D(\text{опыт}\#3)=1,6878$, $D(\text{опыт}\#4)=1,4636$, фрактальная размерность объекта в опытах №3 и №4 меньше, следовательно, объекты имеет более извилистую форму. Таким образом, это сравнение показывает, что при просачивании вязкой жидкости, в нашем случае масла, получают структуры, имеющие меньшую извилистость.

Заключение

В ходе проделанной работы по изучению просачивания жидкостей на модели Хеле-шоу были получены структуры по виду напоминающие «кляксы», подтверждено предположение о том, что они имеют фрактальную природу. Примерно посчитана фрактальная размерность и прослежено изменение её во времени. Было также обнаружено, что фрактальная размерность структур существенно зависит от выбора сыпучего вещества и жидкости, размерность изменяется в зависимости от выбора различных сыпучих веществ и жидкостей промежутке от 1,4636 до 1,841. Сделан вывод о том, что по прошествии времени уменьшается фрактальная размерность, а следовательно увеличивается извилистость объекта.

По результатам работы можно дать рекомендации по использованию просачивания в калийной промышленности. В дальнейшем исследование может послужить моделью для прогнозирования просачивания в нефтедобывающей и калийной промышленности.

В продолжение исследования просачивания жидкостей в сыпучих веществах планируется определить скорость распространения жидкости в разных веществах, а так же другие параметры. При более подробном изучении фракталов и фрактальной размерности, возможно применить к объектам другие методы исследования, например рассмотреть фрактальную размерность как термодинамический параметр (Использование методов фрактальной геометрии позволяет расширить термодинамическое описание учетом геометрических характеристик структуры материала. [7])

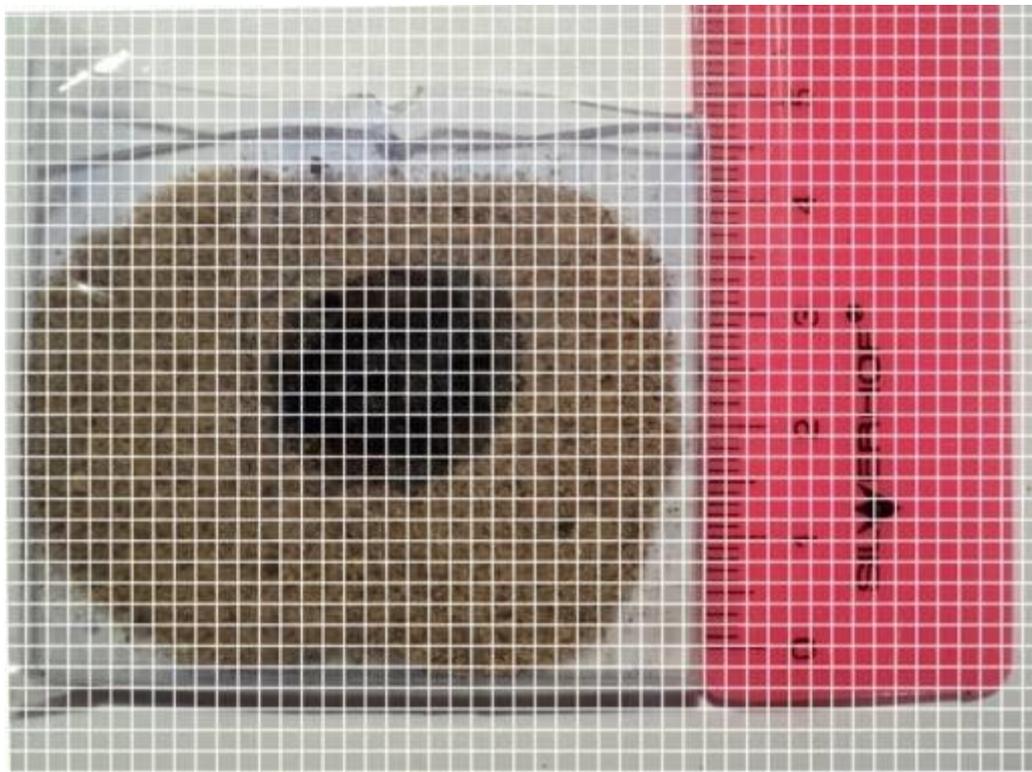
Список использованной литературы:

- 1) Бойко В., Доклад Размерность пространства и фракталы, доклад прочитан 3 февраля 2007г. на семинаре Мерность и фракталы
- 2) Воронин А.Д. Основы физики почв: издательство московского университета. 1986
- 3) Логвинов О.А. Особенности неустойчивого вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу при больших числах Пекле
- 4) Рыбаков Д.А. Реферат Фрактальная размерность
- 5) Федер Е. Фракталы, Перевод с английского Данилова Ю.А., Шукурова А.: Москва: Мир. 1991
- 6) Федосеев В.Б. Лекция Фракталы. Геометрические особенности строения материалов
- 7) Федосеев В.Б. Нелинейный Мир, 2009
- 8) Фильм – «Фракталы. В поисках новых размерностей»

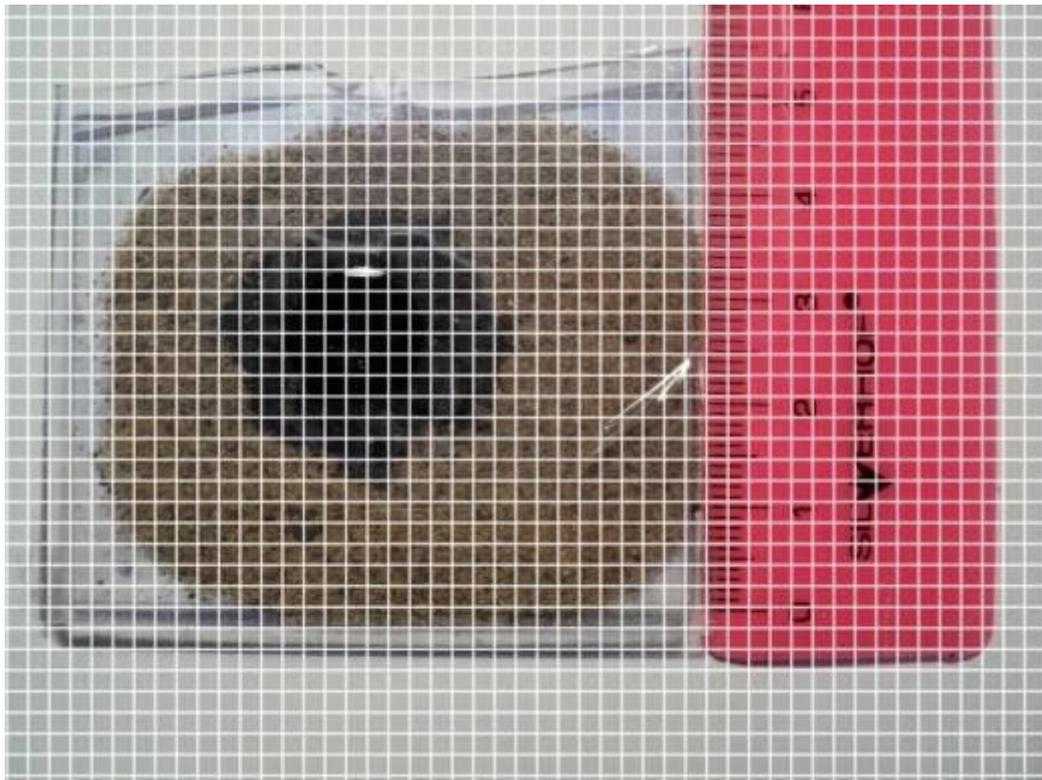
Приложение

Полученные структуры

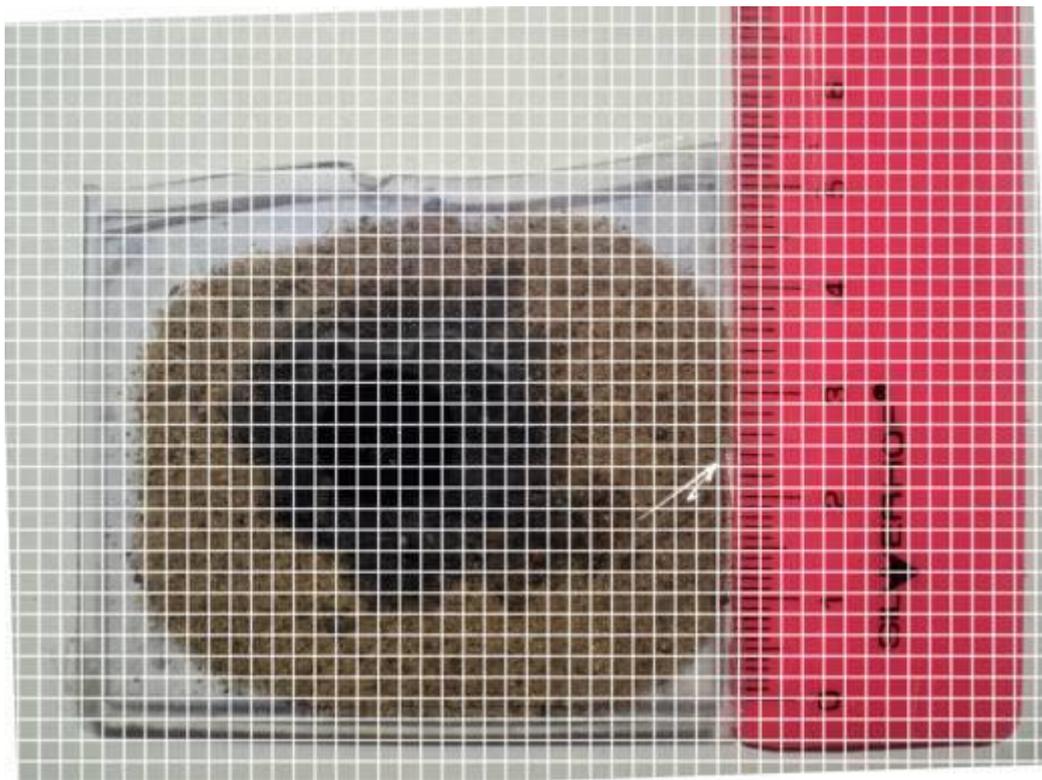
1. Опыт №1



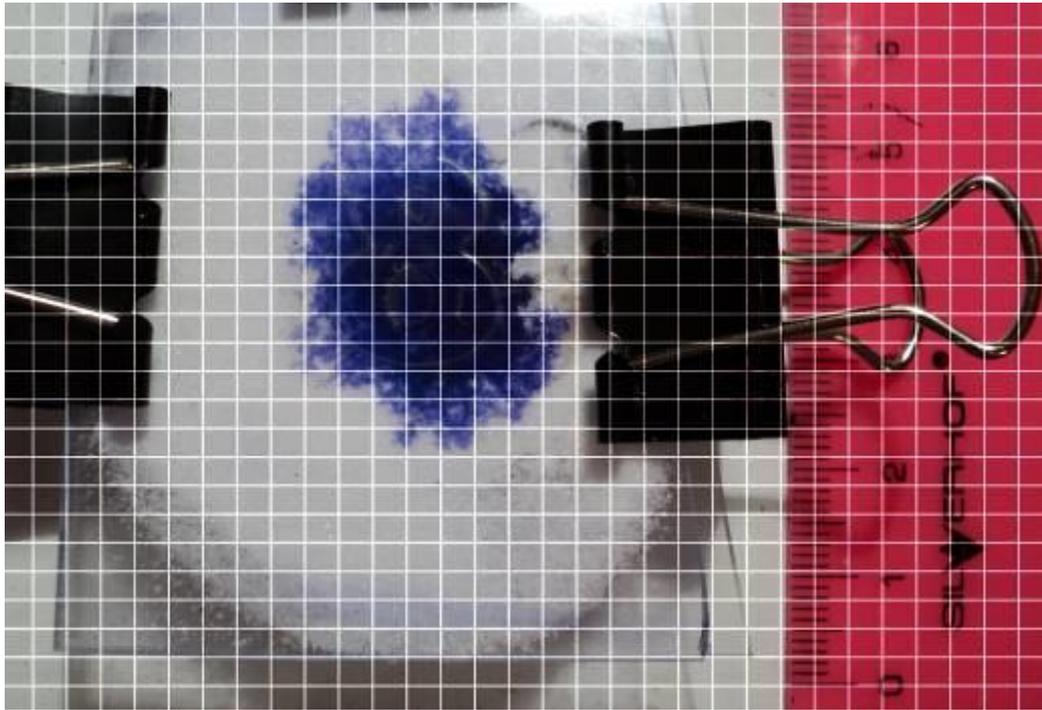
2. Опыт №2



3. ОПЫТ №3

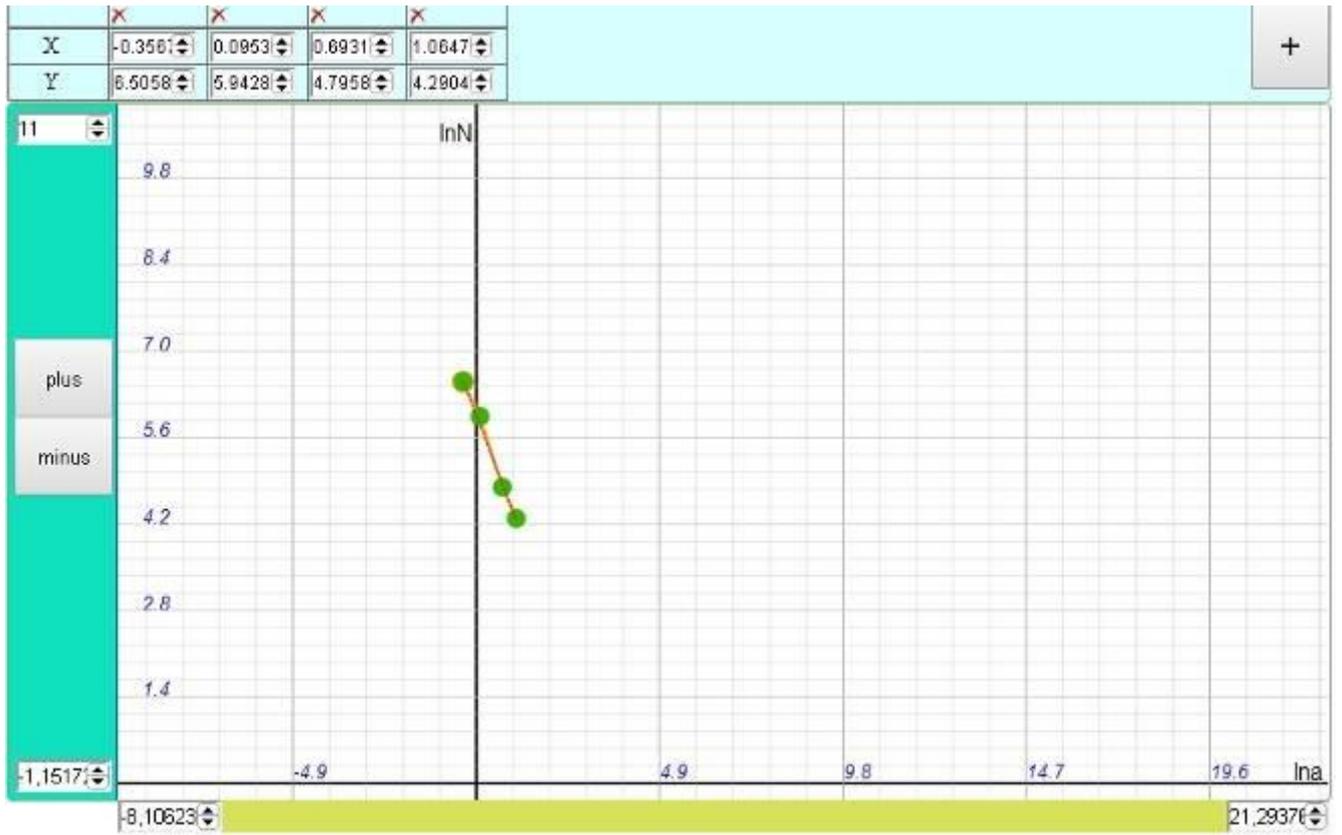


4. ОПЫТ №4

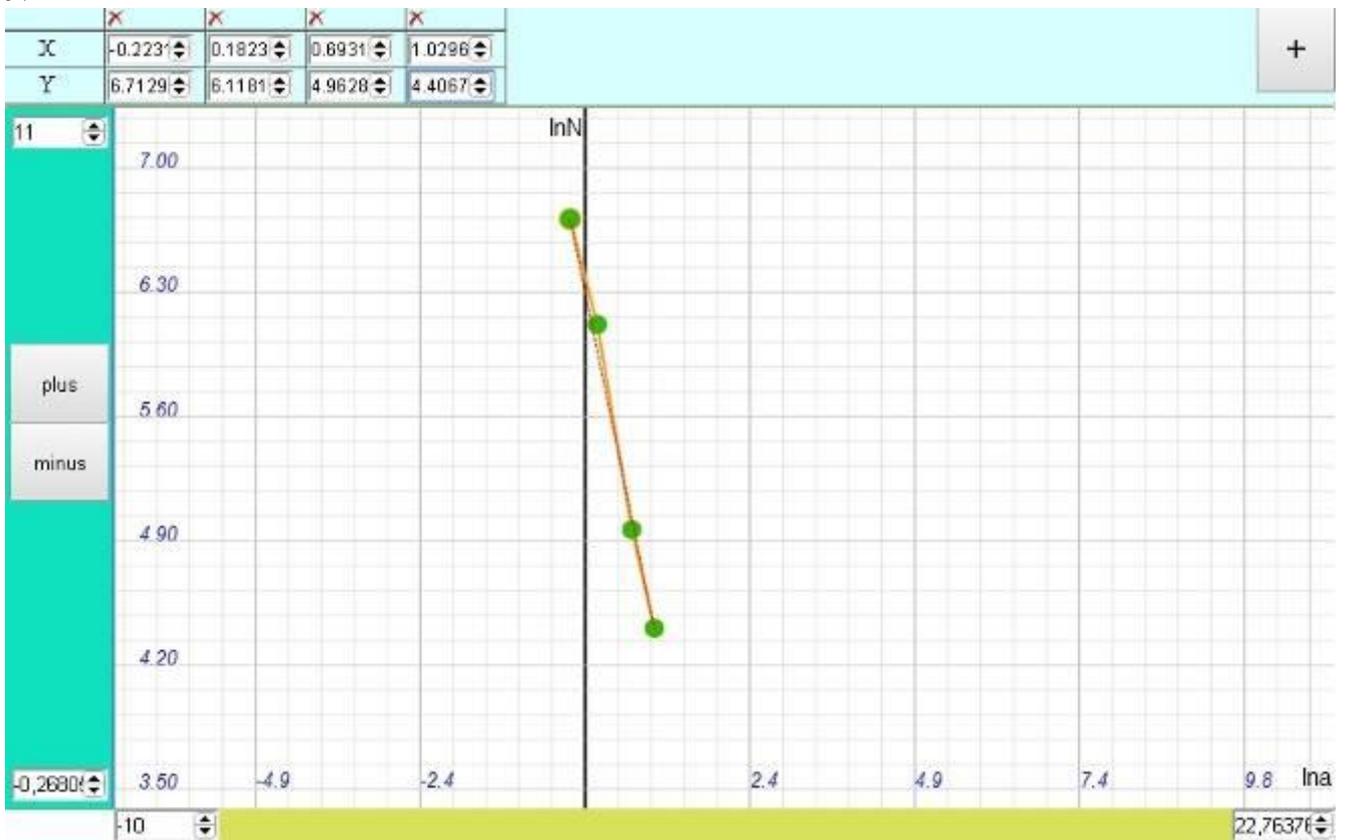


Графики для вычисления фрактальной размерности (красным пунктиром показано усреднение):

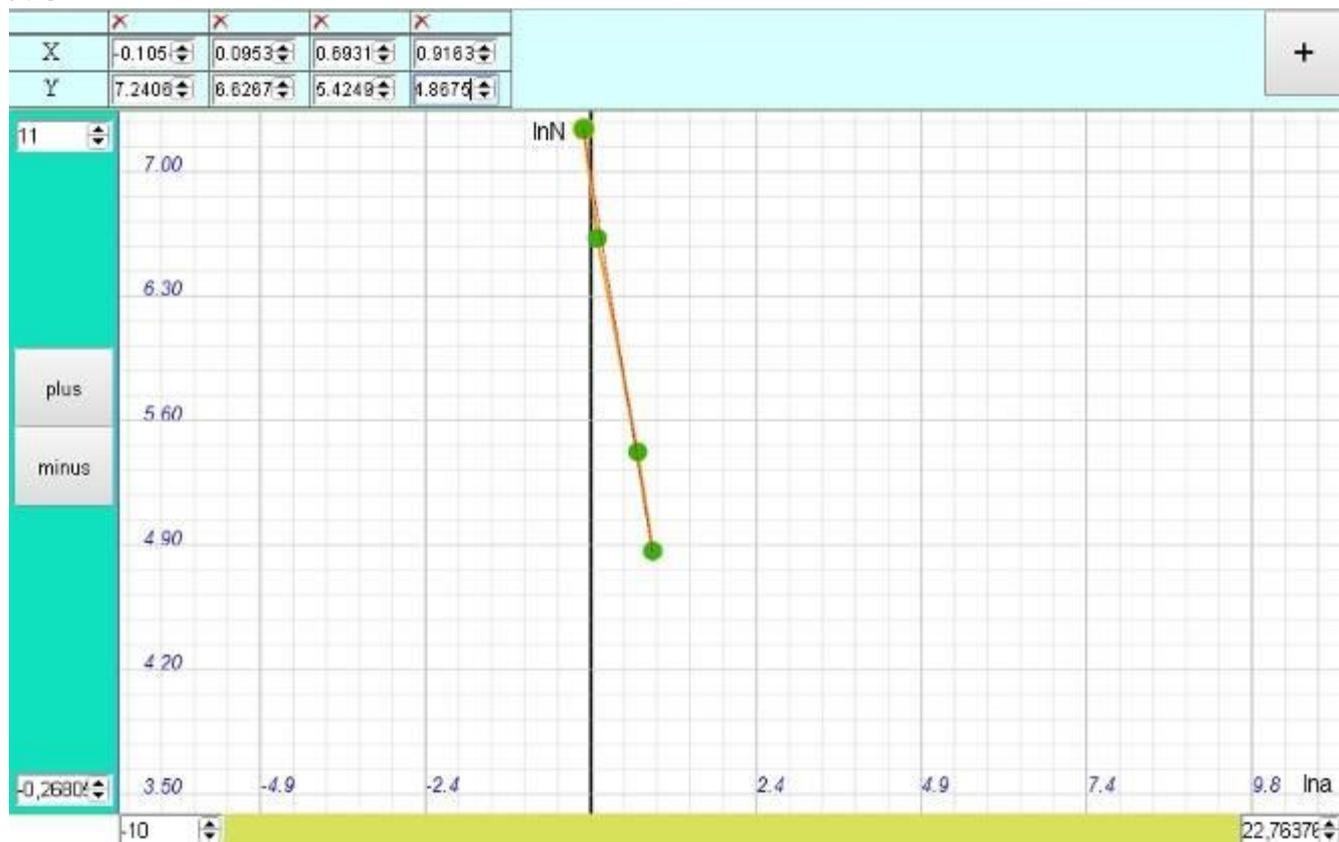
1. опыт №1



2. опыт №2



3. ОПЫТ №3



4. ОПЫТ
№4

