Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 9-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Квадратичная функция в задачах с параметром

Тарасов Даниил Юрьевич,
11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,
Боркова Ольга Владимировна,
учитель математики высшей категории.

Пермь. 2014.

Цель работы

Я выбрал эту тему, так как я считаю, что тема «Уравнения с параметром» очень интересная тема. К каждому примеру нужен какой-нибудь свой подход.
Также задания на «Уравнения с параметром» встречаются в ЕГЭ.

Теоретические сведения

1.Применение теоремы Виета к определению знаков корней квадратного трехчлена.

Между корнями x_1 и x_2 квадратного трехчлена ax^2+bx+c и его коэффициентами a, b, c справедливы следующие соотношения (теорема Виета):

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 * x_2 = \frac{c}{a}$$

С помощью этих соотношений можно исследовать знаки корней квадратного трехчлена.

Теорема 1. Чтобы корни квадратного уравнения (трехчлена) были действительными и имели одинаковые знаки, необходимо и достаточно выполнение соотношений:

$$D=b^2 - 4ac \geq 0; \quad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} > 0.$$

При этом оба корня будут положительными, если дополнительно выполняется условие

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0,$$

и оба корня будут отрицательными, если выполняется условие

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0.$$

Теорема 2. Чтобы корни квадратного уравнения (трехчлена) были действительными и имели различные знаки, необходимо и достаточно выполнение соотношений:

$$D=b^2 - 4ac > 0, \quad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} < 0.$$

При этом отрицательный корень будет иметь меньшую абсолютную величину, если $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$.

Если же $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$,то отрицательный корень будет иметь большую абсолютную величину.

2. Расположение корней квадратного трехчлена.

При решении многих задач требуется знание других важных теорем и их следствий о расположении корней квадратного трехчлена на координатной прямой.

Пусть квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1 и x_2 (где $x_1 < x_2$), а x_0 – какое-нибудь действительное число.

Теорема 1.Чтобы оба корня квадратного трехчлена были меньше, чем число x_0 (т.е. лежали на координатной прямой левее, чем точка x_0), необходимо и достаточно выполнение условий (рис. 1, а и б):

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} < x_0, \\ f(x_0) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} < x_0, \\ f(x_0) < 0. \end{cases}$$

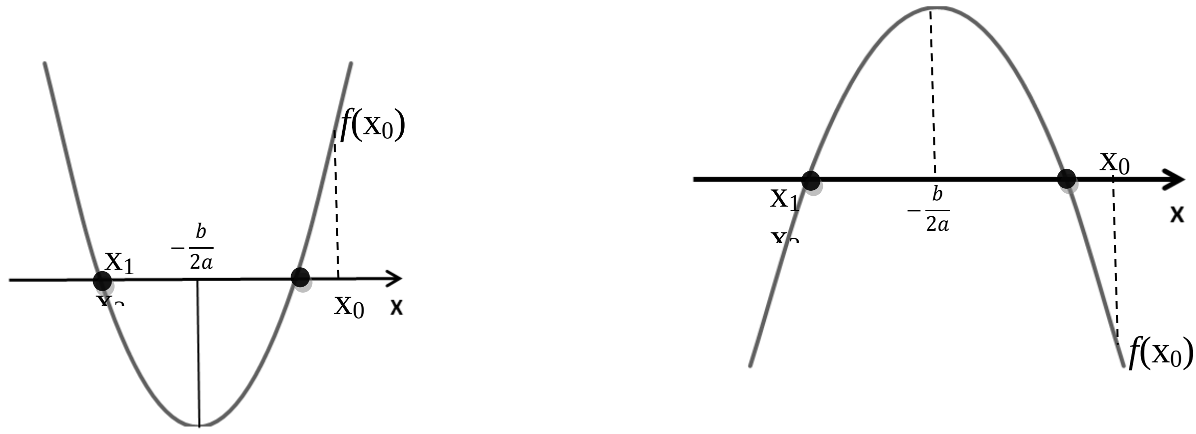


Рис .1

Теорема 2. Чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число x_0 (т.е. лежали на координатной прямой правее, чем точа x_0), необходимо и достаточно выполнение условий (рис.2,а и б):

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > x_0, \\ f(x_0) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > x_0, \\ f(x_0) < 0. \end{cases}$$

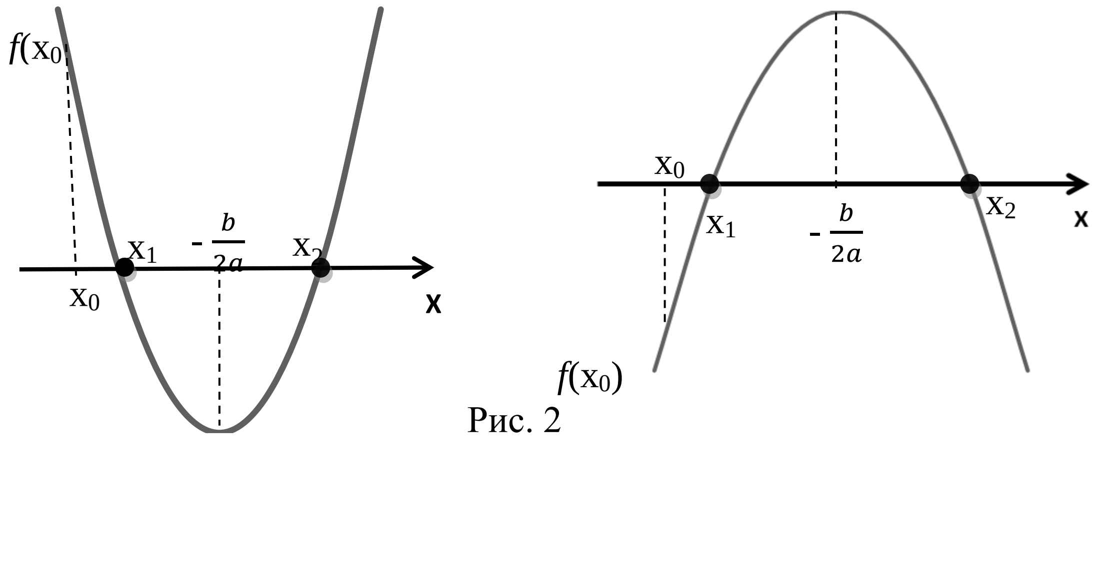


Рис. 2

Теорема 3. Чтобы один из корней квадратного трехчлена был меньше, чем число x_0, а другой больше, чем число x_0(т.е. точка x_0 лежала бы между корнями),
необходимо и достаточно выполнение условий (рис.3,а и б):

а) $\begin{cases} a > 0, \\ f(x_0) < 0 \end{cases}$ или б) $\begin{cases} a < 0, \\ f(x_0) > 0. \end{cases}$

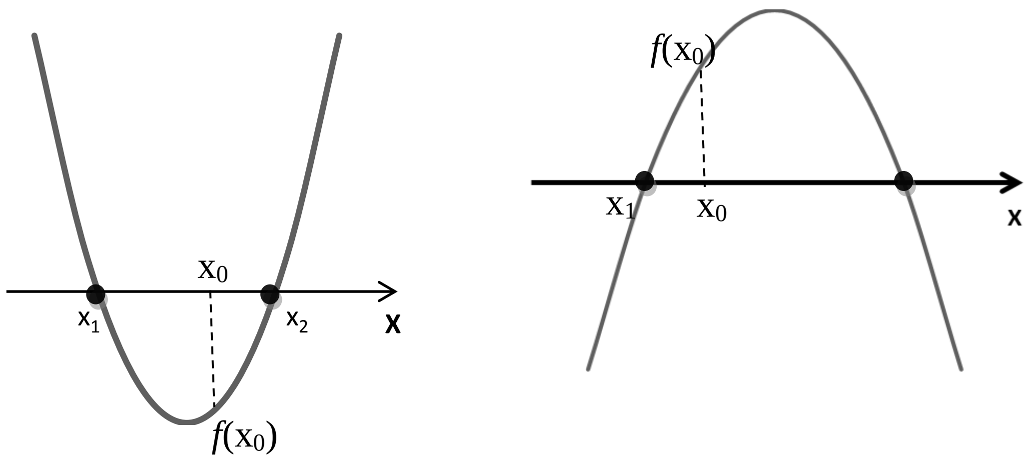


Рис. 3

Следствие 1.Чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число M,но меньше чем число N(M<N),т.е. лежали в интервале (M;N),необходимо и достаточно выполнение условий (рис.4,а и б):

а) $\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ M < -\frac{b}{2a} < N, \\ f(M) > 0, \\ f(N) > 0 \end{cases}$ или б) $\begin{cases} a < 0 \\ D \geq 0 \\ M < -\frac{b}{2a} < N, \\ f(M) < 0 \\ f(N) < 0 \end{cases}$

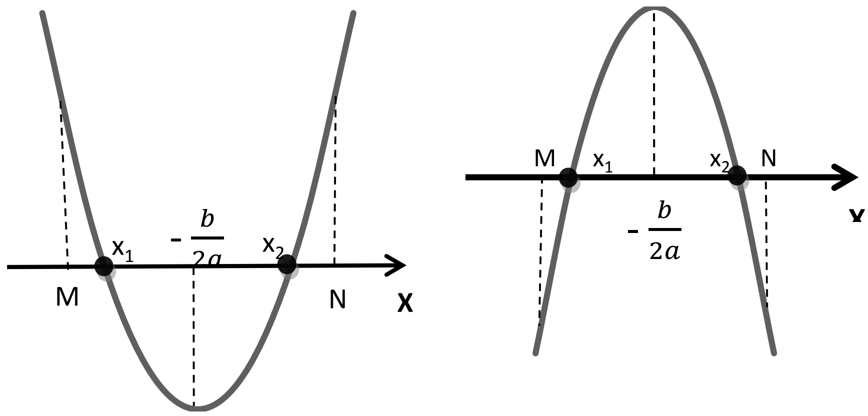


Рис.4

Следствие 2.Чтобы только больший корень квадратного трехчлена лежал в интервале (M;N),необходимо и достаточно выполнение условий (рис.5,а и б):

а) $\begin{cases} a>0 \\ f(M)<0 \\ f(N)>0 \end{cases}$ или б) $\begin{cases} a<0 \\ f(M)>0 \\ f(N)<0 \end{cases}$

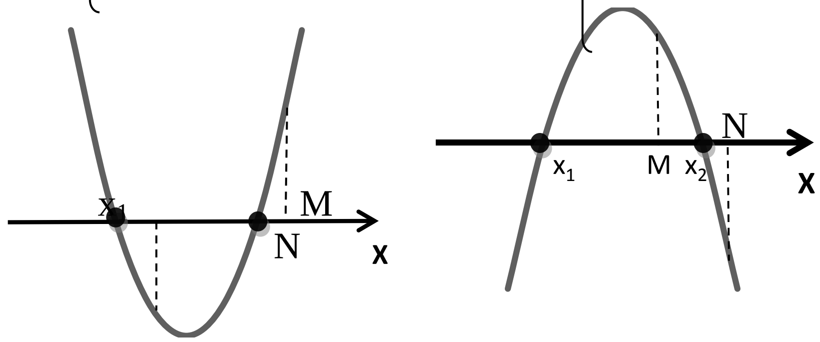
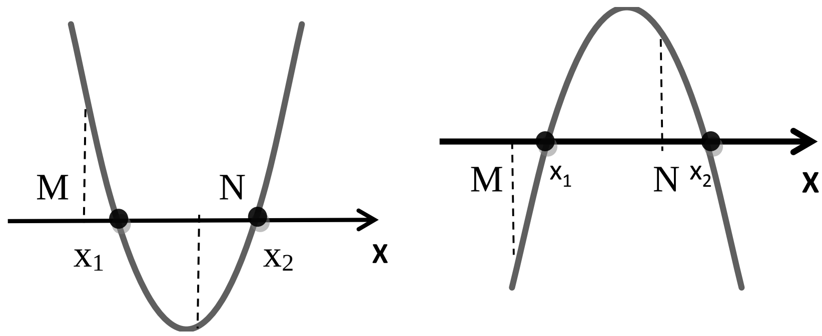


Рис.5

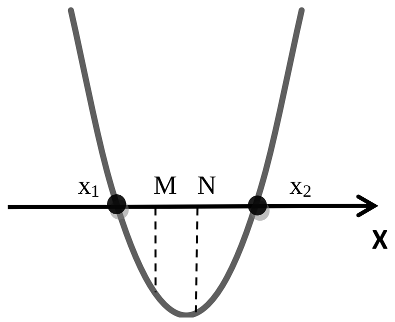
Следствие 3.Чтобы только меньший корень квадратного трехчлена лежал в интервале (M;N), необходимо и достаточно выполнения условий(рис.6,а и б):

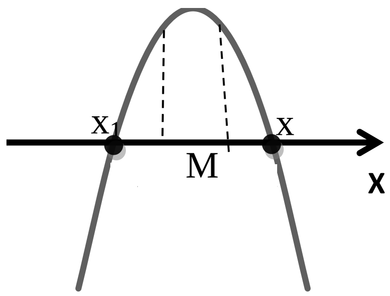
а) $\begin{cases} a > 0, \\ f(M) > 0, \\ f(N) < 0 \end{cases}$ или б) $\begin{cases} a < 0, \\ f(M) < 0, \\ f(N) > 0. \end{cases}$



Следствие 4.Чтобы один корень квадратного трехчлена был меньше, чем M, а другой больше, чем N(M<N), т.е. отрезок [M;N] целиком лежал внутри интервала между корнями, необходимо и достаточно выполнение условий (рис.6,а и б):

а) $\begin{cases} a > 0, \\ f(M) < 0, \\ f(N) < 0 \end{cases}$ или б) $\begin{cases} a < 0, \\ f(M) > 0, \\ f(N) > 0. \end{cases}$





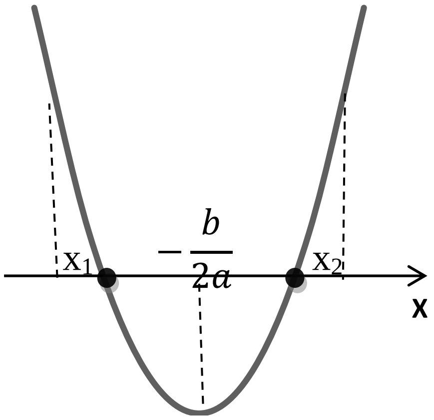
Эта группа теорем и следствий очень часто применяется при решении задач с параметрами и поэтому имеет такое значение.

Примеры

Пример 1

При каких значениях параметра a уравнение $4x^2$-2x+a=0 имеет 2 корня, заключенные между числами -1 и 1?

Рассмотрим функцию f(x)= $4x^2$-2x+a



$$\begin{cases} a > 0 \\ D_1 \geq 0 \\ -1 < -\frac{b}{2a} < 1 \\ f(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases}$$

D_1=1-4a;

f (-1)= 6+a;

f (1)= 2+a;

$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$;

$$\begin{cases} 1-4a \geq 0 \\ 6+a > 0 \\ 2+a > 0 \\ -1 < \frac{1}{4} < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ \\ \end{cases} \quad \begin{cases} 4a \leq 1 \\ a > -6 \\ a > -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} a \leq \frac{1}{4} \\ a > -6 \\ a > -2 \end{matrix}$$

Ответ: при a∈(-2; $\frac{1}{4}$]

Пример 2

Найдите все значения а, для которых при каждом х из промежутка [-2;-1) значение выражения x^4-2x^2 не равно значению выражения ax^2+5.

$x^4-2x^2=ax^2+5$

Найдем при каких значениях а это уравнение не имеет решений на промежутке [-2;-1)

$x^4-2x^2-ax^2-5=0$

$x^4-(2+a)x^2-5=0$

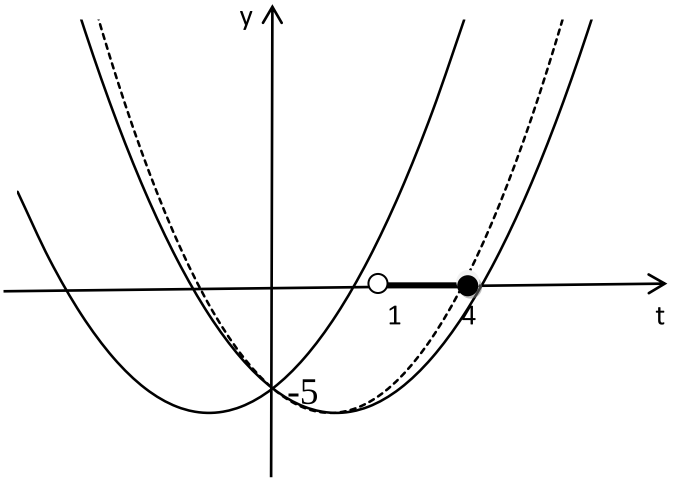
Пусть $x^2=t$

$-2\le x<-1$

$1<x^2\le 4 \Rightarrow 1<t\le 4$

$t^2-(2+a)t-5=0$

Рассмотрим функцию $f(t)=t^2-(2+a)t-5$



Уравнение не имеет корней на промежутке (1;4],если выполняется условие:

$f(1)\ge 0$ $\quad f(1)=1-2-a-5=-a-6$

$f(4)<0$ $\quad f(4)=16-8-4a-5=3-4a$

$-a-6\ge 0$ $\quad a\le -6$

$3-4a<0$ $\quad a>0{,}75$

Ответ: при $a\in(-\infty;-6]\cup(0{,}75;+\infty)$

Пример 3

Найдите все значения а, для которых при каждом х из промежутка (4;8] значения выражения $\log^2_2 x-8$ не равно значению выражения $(2a-1)\log_2 x$

$\log^2_2 x-8=(2a-1)\log_2 x$

$\log^2_2 x-(2a-1)\log_2 x-8=0$

Пусть $\log_2 x=t$,тогда

$t^2-(2a-1)t-8=0$

Рассмотрим функцию

$f(t)=t^2-(2a-1)t-8$

4<x≤8

$$\begin{cases} x>4 \\ x\le 8 \\ 2<t\le 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^{log_2 x}>2^2 \\ 2^{log_2 x}\le 2^3 \end{cases} \qquad log_2 x>2 \quad log_2 x\le 3$$

Пример 4.

При каких значениях а значение выражения $(1-x^2)^{\log_4(1-x^2)-a^4}$ больше значения выражения $0.25^{1-|a|-\log_2\sqrt{1-x^2}}$ при всех допустимых значениях x.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 1-x^2 > 0, \\ 1-x^2 > 0. \end{cases}$$

$1-x^2 > 0;$

$x^2 < 1;$

$|x| < 1;$

$(1-x^2)^{\log_4(1-x^2)-a^4}>0.25^{1-|a|-\log_2\sqrt{1-x^2}}$

$(1-x^2)^{\log_4(1-x^2)-a^4} = 4^{\log_4(1-x^2)^{\log_4(1-x^2)-a^4}} = 4^{(\log_4(1-x^2)-a^4)\log_4(1-x^2)}$

$0.25^{1-|a|-\log_2\sqrt{1-x^2}} = 4^{-1(1-|a|-\log_2\sqrt{1-x^2})} = 4^{|a|-1+\log_2\sqrt{1-x^2}} = 4^{\log_4(1-x^2)+|a|-1}$

$4^{(\log_4(1-x^2)-a^4)\log_4(1-x^2)} > 4^{\log_4(1-x^2)+|a|-1}$

функция $y=4^t$ возрастающая (4>1)

$(\log_4(1-x^2)-a^4)\log_4(1-x^2) > \log_4(1-x^2)+|a|-1$

${\log^2}_4(1-x^2) - a^4 * \log_4(1-x^2) - \log_4(1-x^2) - |a| + 1>0$

${\log^2}_4(1-x^2) - (a^4+1) * \log_4(1-x^2) - |a| + 1 > 0$

$\log_4(1-x^2) = t$

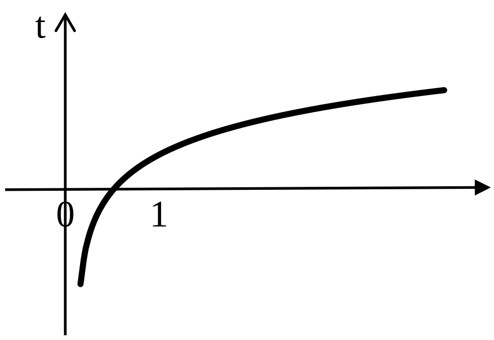
$1 * t^2 - (a^4+1) * t - |a| + 1 > 0$

Оценка:

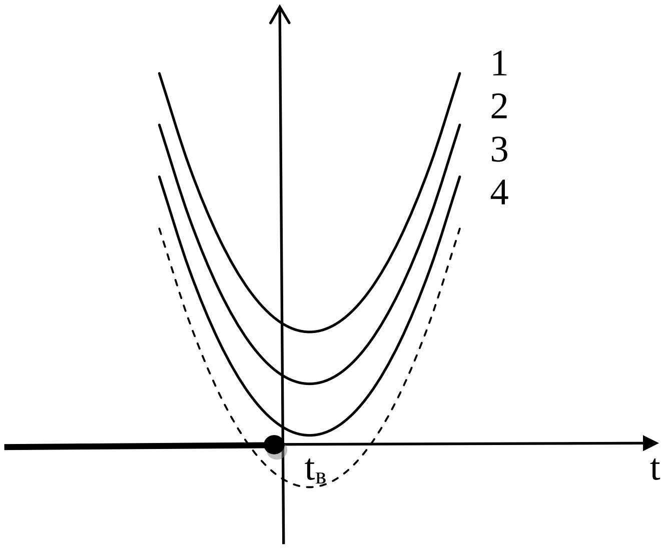
$x^2 \ge 0$

- $x^2 \le 0$

$0 < 1-x^2 \le 1$



z=cos x



Условие задачи выполняется если точка пересечения параболы расположена выше нуля.(в случая 1,2,3) то есть выполняются условия:

$$\begin{cases} t_в > 0, \\ c > 0. \end{cases}$$

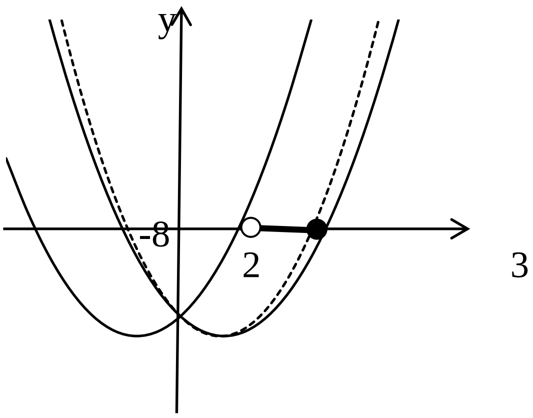
$t_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-(a^4+1))}{2} = \frac{a^4+1}{2} > 0$ при всех действительных значениях а.

$c = 1 - |a|;$

$1 - |a| > 0$

$|a| < 1$

Ответ: $a \in (-1; 1)$



Найдем при каких значениях а уравнение не имеет корней на промежутке (2;3]

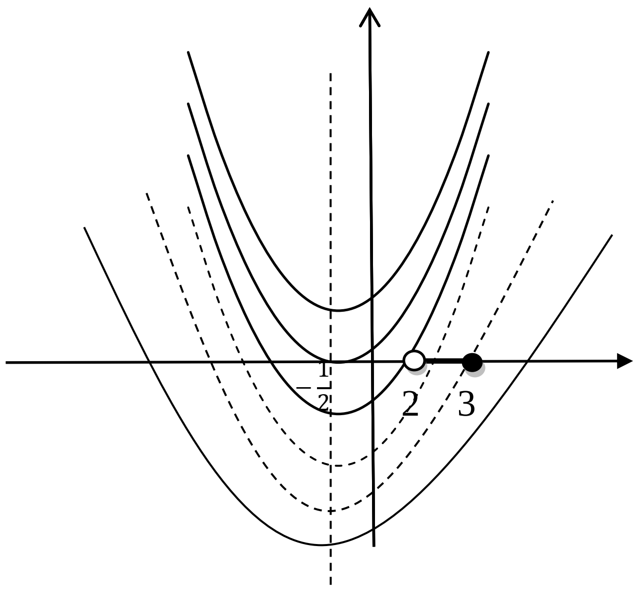
$$\begin{cases} f(2) < 0 \\ f(3) \geq 0 \end{cases}$$ $f(3)=9-6a+3-8=4-6a$ $f(2)=4-4a+2-8=-4a-2$

$$\begin{cases} -4a-2 < 0 \\ 4-6a \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ a \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$ a>-0,5

Таким образом уравнение имеет решение на промежутке (2;3] при а∈(-0,5; $\frac{2}{3}$] , значит не имеет корней при а∈(-∞;-0,5] ∪($\frac{2}{3}$;+ ∞)
Ответ:при а∈(-∞;-0,5] ∪($\frac{2}{3}$;+ ∞)

Пример 5.
При каких значениях а сумма выражений $\log_a(\frac{3+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}), \log_a\frac{3\sqrt{x}+4}{1+\sqrt{x}}$ не равна единице не при каких значениях х.
$\log_a(\frac{3+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}) + \log_a\frac{3\sqrt{x}+4}{1+\sqrt{x}} = 1$
Найдем, при каких значениях а уравнение не имеет корней.

$\frac{3+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{2(\sqrt{x}+1)+1}{\sqrt{x}+1} = 2 + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$
$\frac{3\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+1} = \frac{3(\sqrt{x}+1)+1}{\sqrt{x}+1} = 3 + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$
$\log_a(2 + \frac{1}{\sqrt{x}+1}) + \log_a(3 + \frac{1}{\sqrt{x}+1}) = 1$
Пусть $2 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} = t$
$\log_a t + \log_a(t+1) = 1$
Оценка:
$\sqrt{x} \geq 0$
$\sqrt{x} + 1 \geq 1$
$2 < 2 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 3$
2 < t ≤ 3
Найдем при каких значениях а уравнение не имеет корней на промежутке при $t \in (2; 3]$.
$\log_a(t^2 + t) = \log_a a$
$t^2 + t - a = 0$
Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 + t - a$
$t_0 = \frac{-b}{2a} = -\frac{1}{2}$



Условие задачи удовлетворяет совокупность условий:

$$\left[\begin{array}{l} f(2) \geq 0 \\ f(3) < 0 \end{array}\right.$$

$$f(2) = 4 + 2 - a$$

$$f(3) = 9 + 3 - a$$

$$\left[\begin{array}{l} a \leq 6 \\ a > 12 \end{array}\right.$$

$a \in (-\infty; 6] \cup (12; +\infty)$

А так как по определению логарифма $a > 0$; $a \neq 1$

Ответ: $a \in (0; 1) \cup (1; 6] \cup (12; +\infty)$.

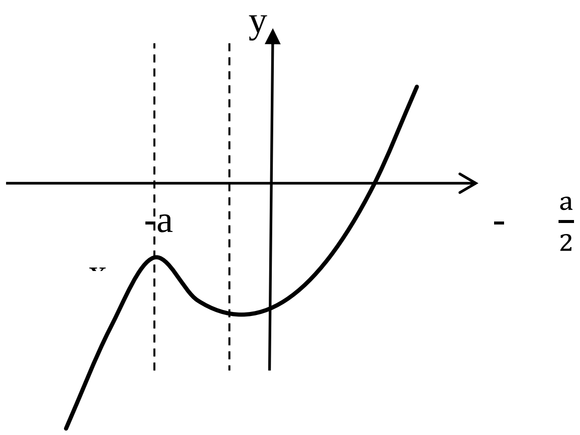
Пример 6

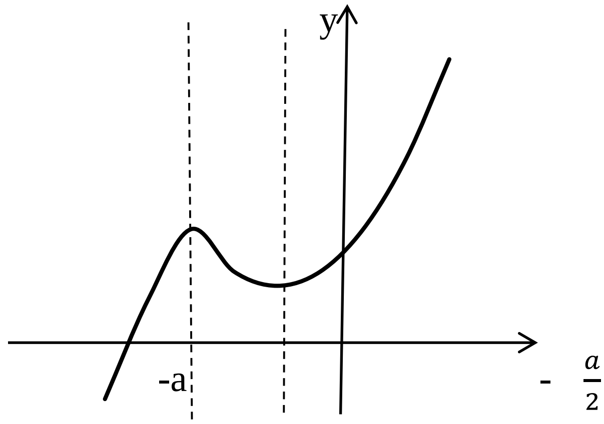
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение x|x+a|+a+2=0 имеет единственное решение

Рассмотрим функцию f(x)= x|x+a|+a+2

$$f(x)= \left\{\begin{array}{l} -x^2-xa+a+2 \text{ , } x<-a \\ x^2+xa+a+2 \text{ , } x>-a \\ x_0 = -\frac{-a}{-2} = -\frac{a}{2} \text{ - абсцисса обеих парабол} \end{array}\right.$$

I. при a>0





а)

$$\begin{cases} a>0 \\ f(-a)<0 \\ f(-\frac{a}{2})<0 \\ f(-a)= \\ f(-\frac{a}{2})= -\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}+a+2= -\frac{a^2}{4}+a+2 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} a>0 \\ f(-a)>0 \\ f(-\frac{a}{2})>0 \end{cases}$$

$-a^2+a^2+a+2=a+2$

а) $\begin{cases} a>0 \\ a+2<0 \\ -\frac{a^2}{4}+a+2<0 \end{cases}$ $\begin{cases} a>0 \\ a<-2 \\ a^2-4a-8>0 \end{cases}$ $\begin{cases} a>0 \\ a<-2 \\ a<2-\sqrt{12},\ a>2+\sqrt{12} \end{cases}$

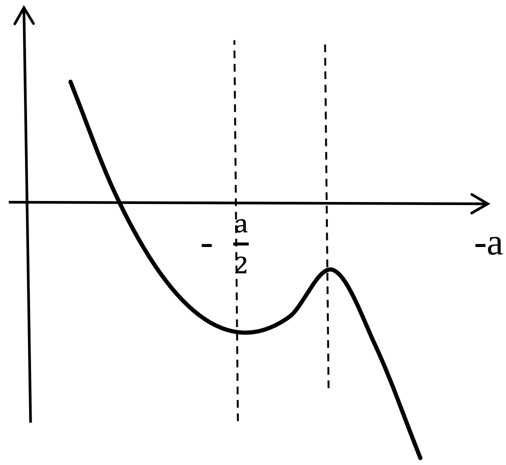
Нет решений

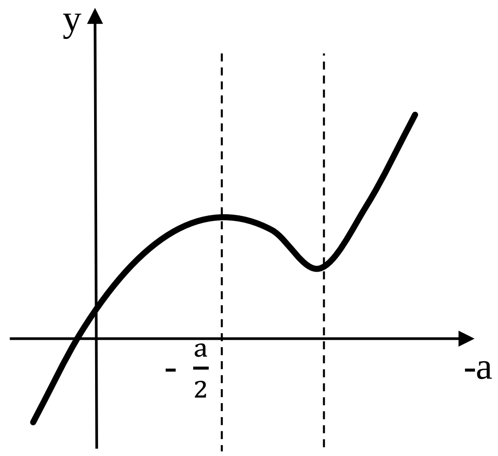
б) $\begin{cases} a>0 \\ a>-2 \\ -\frac{a^2}{4}+a+2>0 \end{cases}$ $\begin{cases} a>0 \\ a>-2 \\ a>2-\sqrt{12},\ a<2+\sqrt{12} \end{cases}$

$a\in(0;\ 2+\sqrt{12})$

II. При $a<0$

y





а)

$$\begin{cases} a<0 \\ f(-a)>0 \\ f\left(-\frac{a}{2}\right)>0 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} a<0 \\ f(-a)<0 \\ f\left(-\frac{a}{2}\right)<0 \end{cases}$$

а) $\begin{cases} a<0 \\ a>-2 \\ \frac{a^2}{4}+a+2>0 \end{cases}$ $\begin{cases} a<0 \\ a>-2 \\ a^2+4a+8>0 \end{cases}$ $\begin{cases} a<0 \\ a>-2 \\ a\in R \end{cases}$ $a\in(-2;0)$

б) $\begin{cases} a<0 \\ a<-2 \\ a^2+4a+8<0 \end{cases}$ - неравенство не имеет решений, следовательно, и система не имеет решений.

III. При a=0

$x|x|+2=0$

1) $\begin{cases} x^2+2=0 \\ x\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=-2 \\ x\geq 0 \end{cases}$ система не имеет решения

2) $\begin{cases} -x^2+2=0 \\ x<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=2 \\ x<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\sqrt{2} \quad -\sqrt{2} \\ x<0 \end{cases}$

При a=0 уравнение имеет 1 корень

Ответ: $a\in(-2;\ 2+\sqrt{12})$

Пример 7

Найдите все значения a , при которых неравенство $\frac{x^2+4(a-1)x+4a^2}{5-(\cos\sqrt{15-2a-a^2}+4)} > 0$ выполняется для всех $x\in(-2;1)$

ОДЗ значения параметра а

$\begin{cases} 5-(\cos\sqrt{15-2a-a^2}+4)\neq 0 \\ 15-2a-a^2\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \cos\sqrt{15-2a-a^2}\neq 1 \\ a^2+2a-15\leq 0 \end{cases}$

$a^2+2a-15 < 0$

$a_1= 3$; $a_2= - 5$

Т.к $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, но по ОДЗ $\cos\alpha\neq 1 \Rightarrow$

$-1 \leq \cos\alpha < 1$

$3 \leq \cos\alpha < 5$

$-5 \leq -\cos\alpha < -3$

$0 \leq 5-\cos\alpha < 2$

И дробь положительная, то

$x^2+4(a-1)x+4a^2>0$

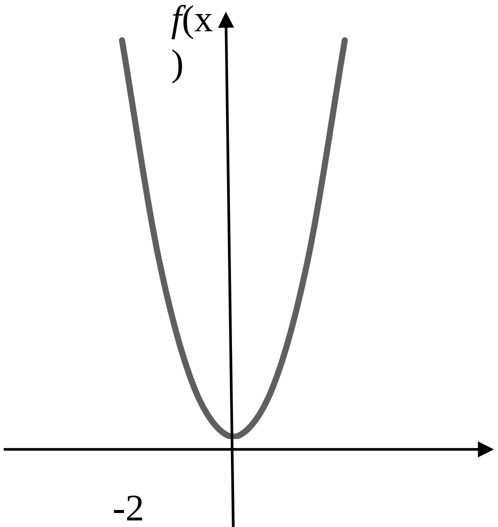
Рассмотрим функцию

$f(x)= x^2+4(a-1)x+4a^2$

Найдем все значения параметра а,при которых для всех значений $x\in(-2;1)$ выполняется неравенство $f(x)>0$

ОДЗ: $a\in(-3;5)$

1)



$D_1<0$, то условие выполняется

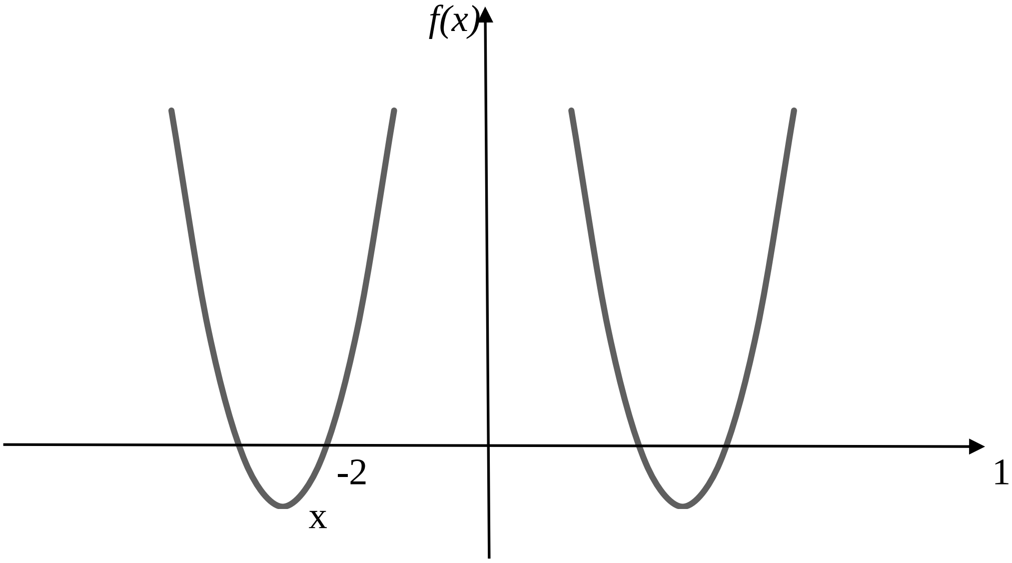
$D_1=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$

$D_1=(2a-2)^2-4a^2=4a^2+4-8a-4a^2=4(1-2a)$

$a>\frac{1}{2}$

2) $\begin{cases} D_1=0 \\ \left[\begin{array}{l} f(-2)\geq 0 \\ f(1)\geq 0 \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} 4a^2-8a+12\geq 0 \\ 2a^2+4-3\geq 0 \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} a\in R \\ 4(a-\frac{1}{2})(a+\frac{3}{2})\geq 0 \end{array}\right. \end{cases}$ $\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

3) $D_1>0$



$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_0 < -2 \\ D_1>0 \\ f(-2) \ge 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_0<1 \\ D_1>0 \\ f(1)<0 \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a>\frac{1}{2} \\ a\in R \\ -2(a-1)\ge -2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a<\frac{1}{2} \\ a>\frac{1}{2} \text{ и } a<\left(-\frac{3}{2}\right) \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} a>\frac{1}{2} \\ a-1\le 1 \end{array}\right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a>\frac{1}{2} \\ a\le 2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} a>\frac{1}{2} \\ \text{Нет решений} \end{array}$$

$$a<\frac{1}{2}$$

$$a\in\left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right)$$

Ответ: $a\in\left(-5; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 3\right)$

Пример 8

Найдите сумму целых значений параметра m при которых уравнение $2012^{2x} - 4*2012^{x} - 3m+m^2=0$ имеет единственный корень

Пусть $2012^x=t\ \ t>0$

$t^2-4t-3m+m^2=0$

1) $\left\{ \begin{array}{l} D_1=0 \\ t>0 \end{array}\right.$ $\qquad t_1=\frac{4}{2}=2 \quad 2>0 \qquad D_1=4-3m+m^2$

$\left\{ \begin{array}{l} m^2-3m-4=0 \\ 2>0 \end{array}\right.$ $\qquad (m-4)(m+1)=0$

$m=4; m=-1$

2) $D_1>0$ то уравнение имеет 2 различных корня. Может иметь следующие корни:

t_1	+	-	+	0	0
t_2	+	-	-	+	-

Тогда исходное уравнение имеет единственный корень, если t_1 и t_2 имеют разные знаки или один положительный, а другой равен 0.

а) $\left\{ \begin{array}{l} D_1>0 \\ t_1*t_2<0 \end{array}\right.$ $\qquad t_1*t_2=m^2-3m \qquad t_1+t_2=4$

$\begin{cases} m^2-3m-4>0 \\ m^2-3m<0 \end{cases}$ $\quad m(m-3)<0$ $\quad (m-4)(m+1)>0$

Нет решений

б) $\begin{cases} D_1>0 \\ t_1*t_2=0 \\ t_1+t_2>0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} (m-4)(m+1)\le 0 \\ m^2-3m=0 \\ 4>0 \end{cases}$

$m\in[0;3]$

3)Если $D_1<0$,то квадратное уравнение не имеет корней, тогда и исходное не имеет корней

Таким образом уравнение имеет единственный корень при $m\in\{-1\}\cup[0;3]\cup\{4\}$

$\sum$ целых решений- $-1+0+1+2+3+4=9$

Ответ:9

Пример 9

Найдите все значения a , при которых неравенство $\frac{x^2+4(a-1)x+4a^2}{5-(\cos\sqrt{15-2a-a^2}+4)} > 0$ выполняется для всех $x\in(-2;1)$

ОДЗ значения параметра a

$\begin{cases} 5-(\cos\sqrt{15-2a-a^2}+4)\neq 0 \\ 15-2a-a^2\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \cos\sqrt{15-2a-a^2}\neq 1 \\ a^2+2a-15\leq 0 \end{cases}$

$a^2+2a-15 < 0$

$a_1= 3$; $a_2= - 5$

Т.к $\quad -1\leq\cos\alpha\leq 1$, но по ОДЗ $\cos\alpha\neq 1 \Rightarrow$

$-1\leq\cos\alpha<1$

$3\leq\cos\alpha<5$

$-5\leq-\cos\alpha<-3$

$0\leq 5-\cos\alpha<2$

И дробь положительная, то

$x^2+4(a-1)x+4a^2>0$

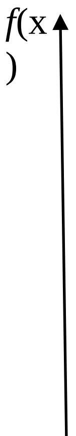
Рассмотрим функцию

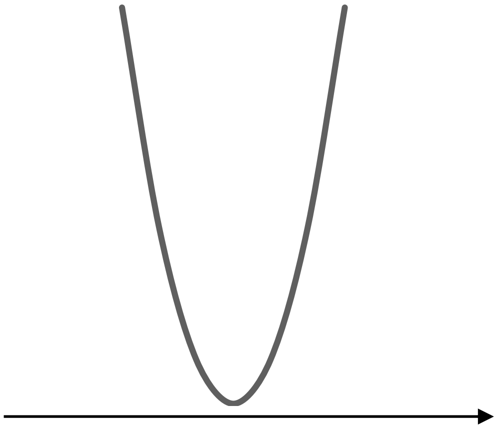
$f(x)= x^2+4(a-1)x+4a^2$

Найдем все значения параметра a,при которых для всех значений $x\in(-2;1)$ выполняется неравенство $f(x)>0$

ОДЗ: $a\in(-3;5)$

1)





-2 1

$D_1<0$, то условие выполняется

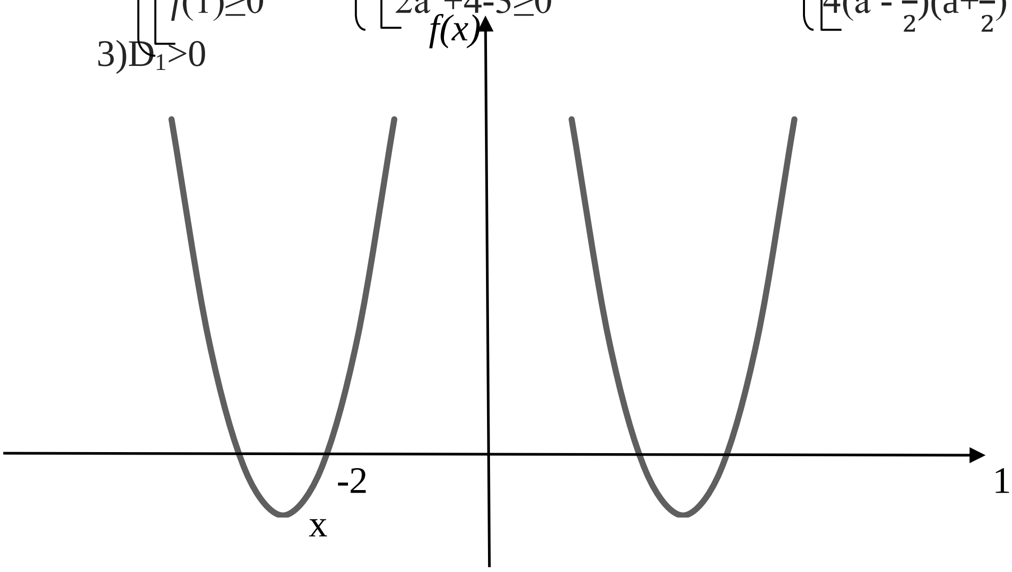
$D_1=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$

$D_1=(2a-2)^2-4a^2=4a^2+4-8a-4a^2=4(1-2a)$

$a>\frac{1}{2}$

2) $\begin{cases} D_1=0 \\ \left[\begin{array}{l} f(-2)\ge 0 \\ f(1)\ge 0 \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} 4a^2-8a+12\ge 0 \\ 2a^2+4-3\ge 0 \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} a\in R \\ 4(a-\frac{1}{2})(a+\frac{3}{2})\ge 0 \end{array}\right. \end{cases}$ $a=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

3) $D_1>0$



$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0<-2 \\ D_1>0 \\ f(-2)\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0<1 \\ D_1>0 \\ f(1)<0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>\frac{1}{2} \\ a\in R \\ -2(a-1)\ge -2 \end{cases} \\ \begin{cases} a<\frac{1}{2} \\ a>\frac{1}{2} \text{ и } a<\left(-\frac{3}{2}\right) \end{cases} \end{array}\right.$ $\begin{cases} a>\frac{1}{2} \\ a-1\le 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a>\frac{1}{2} \\ a\le 2 \end{cases}$ $a>\frac{1}{2}$ Нет решений

$a<\frac{1}{2}$

$a\in\left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right)$

Ответ: a∈(-5; $-\frac{3}{2}$] ∪[$\frac{1}{2}$; 3)

Пример 10

При каких значениях a значения выражения $\cos x^{\log_3(\cos x)-|a|}$ больше значения выражения $3^{\log_9(1-\sin^2 x)+a(a-2)}$ при всех допустимых значениях x?

ОДЗ: 0<cos x≤1

$3^{\log_3 \cos x^{\log_3(\cos x)-|a|}} = 3^{(\log_3 \cos x-|a|)\log_3 \cos x}$

$3^{\log_9(1-\sin^2 x)+a(a-2)}=3^{\log_9 \cos^2 x+a^2-2}=3^{\log_3|\cos x|+a^2-2a}$

$3^{(\log_3 \cos x-|a|)\log_3 \cos x}>3^{\log_3|\cos x|+a^2-2a}$

Функция y=3^t возрастающая (3>1)

$(\log_3 \cos x-|a|)\log_3 \cos x>\log_3|\cos x|+a^2-2a$

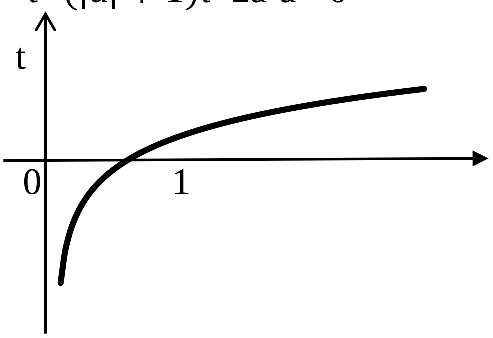
Так как по ОДЗ 0<cos x≤1,то $|\cos x| = \cos x$

$\log^2{}_3 \cos x-|a|\log_3 \cos x- \log_3 \cos x-a^2+2a>0$

$\log^2{}_3 \cos x-(|a|+1)\log_3 \cos x-a^2+2a>0$

Пусть $\log_3 \cos x$=t

$t^2-(|a|+1)t+2a-a^2>0$



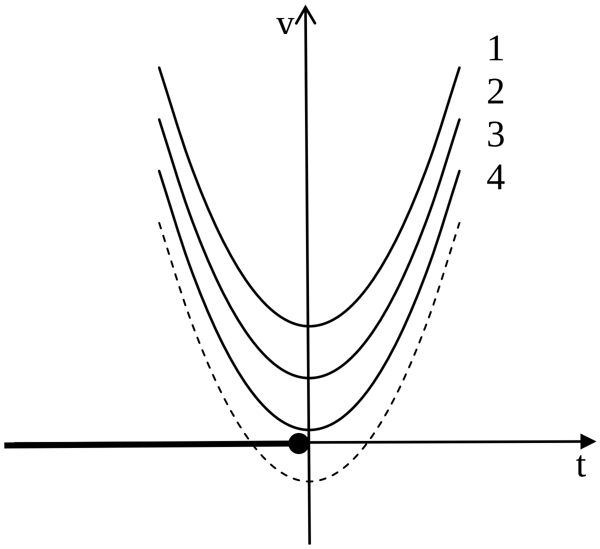
z=cos x

t≤0

Рассмотрим функцию $f(t)= t^2-(|a|+1)t+2a-a^2$

Найдем при каких значениях параметра a y>0 при t≤0

$x_{в}=\frac{|a|+1}{2}>0$ при всех действительных a



Условие задачи выполняется, если точка пересечения параболы с точкой ординат расположена выше 0(в случаях 1,2,3) то есть выполняется условие

$$\begin{cases} x_в>0 \\ c>0 \end{cases}$$

$c=a(2-a)$

$a(2-a)>0$

Заключение

Я рассмотрел многие из видов уравнений с параметром.
Меня заинтересовала эта тема и я буду продолжать над ней работать

Используемая литература.

1. П.И.Горнштейн, В.Б.Полонский, М.С.Якир «Задачи с параметрами», 2002г.
2. Н.Ю.Глаголева «Задачи по математике для поступающих в вузы», 1994г.
3. В.В.Локоть «Задачи с параметрами», 2003г.
4. А.Г.Мордкович «Алгебра и начала анализа», 1987г.
5. В.С.Крамов «Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начала анализа», 1994г.
6. «Математика. Решение задач повышенной сложности», 2004г.
7. М.И. Шабунин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, Р.Г. Газарян «Алгебра и начала анализа», 2000г.