Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 9-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Целая и дробная часть числа

Трапезников Семен Станиславович,
9 кл., МАОУ «Лицей №1», г. Кунгур,
Изергина Галина Семёновна,
учитель математики высшей категории.

Пермь. 2014.

Оглавление.

I.Введение.

Участвуя в олимпиадах по математике, я столкнулся с трудностями при использовании таких понятий, как "целая" и "дробная" части числа. Так, в 2012 году я принимал участие во Всероссийской математической олимпиаде имени Олехника, проводимой Центром имени Олехника и механико – математическим факультетом МГУ имени М.В.Ломоносова, и встретился с такой задачей «Найти число корней уравнения 5[x]+27{x}=2012, где [x] – целая часть числа x, а {x} – дробная часть числа x.». Проконсультировавшись у учителя математики, что такое целая и дробная часть числа я, смог решить эту задачу.

Я понял, что мне необходимо разобраться с этими понятиями, так как они представляли для меня сложность, как в теоретическом, так и практическом плане. Данной темы нет в программе для общеобразовательных школ, и я поставил перед собой следующие цели:

1. познакомиться с понятиями «целая» и «дробная» части числа;
2. рассмотреть функции вида: ***y=[x], y ={x }; y=(x), y={{x}}***и других;
3. самостоятельно рассмотреть свойства функций: целая и дробная части числа;
4. научиться решать уравнения и неравенства, содержащие целую и дробную части числа.

II. Целая часть числа.

Целой частью числа x (или антье), от фр. entier "антье" — целый, называется наибольшее целое число n, не превышающее x. Целая часть числа x обозначается символом [x] .

Например: [-1,8] = -2, [-5] = -5, [0] = 0, [4,2] = 4, [π] = 3, $\left[\frac{88}{9}\right]$= 9, $\left[\frac{11}{16}\right]$=0.

В математике целая часть действительного числа x – округление x до ближайшего целого в меньшую сторону.

В некоторых современных калькуляторах имеется функция целой части числа **INT**. Для отрицательных чисел данная функция определяется как

INT(-x)=-INT(x). Например, INT(-4,6)=-4.

2.1 Функция y=[x] (целая часть числа), её график и свойства.

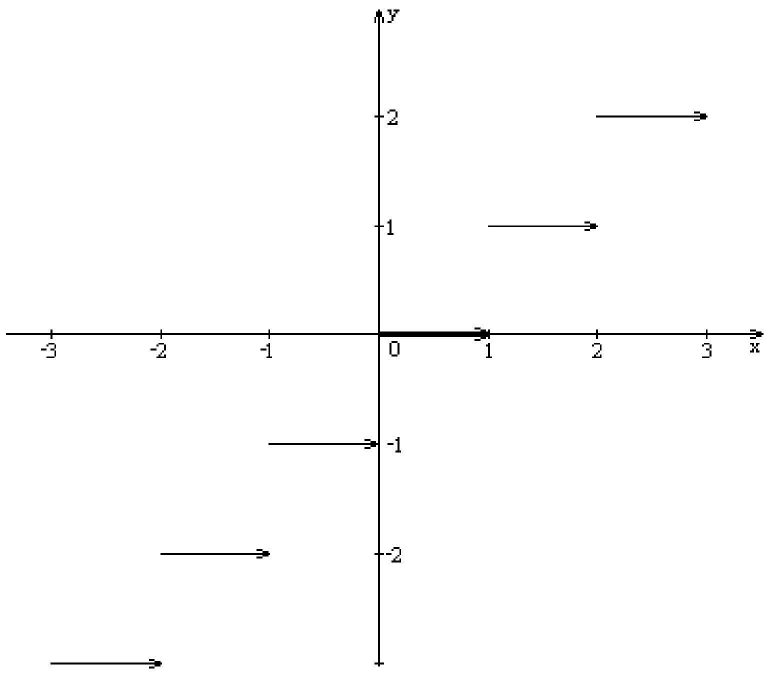


График функции y=[x] состоит из ступенек и как бы образует лестницу, идущую слева направо и снизу вверх, переходящую в себя при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ = (1,1).

Свойства функции y=[x].

1. *Область определения*.Функция имеет смысл для всех значений переменной x, что следует из определения целой части числа и свойств числовых множеств. Следовательно, ее областью определения является все множество действительных чисел:

$$\mathbf{D}([x]) = \mathbf{R}.$$

2. *Область значений.* Множество значений функции $y = [x]$, это множество целых чисел (по определению целой части числа).

$$\mathbf{E}\ ([x]) = \mathbf{Z}$$

3. *Чётность ,нечётность*.Функция общего вида, т.е. не выполняется ни условие четности: $f(-x) = f(x)$,ни условие нечетности $f(-x) = -f(x)$.

4. *Периодичность.*Функция $y = [x]$ не периодическая.

5. *Ограниченность.*Функция неограничена, так как множество значений функции — все целые числа, множество целых чисел неограничено.

6*. Непрерывность*.Функция разрывная. Все целые значения x — точки разрыва с конечным скачком равным 1. В каждой точке разрыва имеется непрерывность справа.

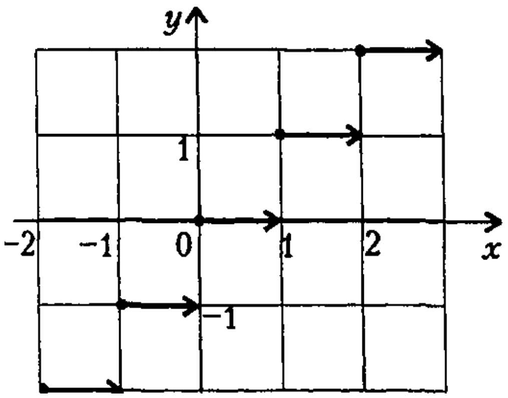
7. *Нули функции*.Функция принимает значение 0 для всех x, принадлежащих интервалу [0;1), что следует из определения целой части числа. Следовательно, нулями функции будут все значения этого интервала.

8*. Промежутки монотонности.* Учитывая свойства целой части числа функция $y = [x]$ принимает отрицательные значения при x меньших нуля, и положительные значения при x больших 1.

9. *Промежутки монотонности.* .Функция $y = [x]$ кусочно - постоянная .

10. *Точки экстремума*.Точек экстремума функция не имеет, так как не меняет характер монотонности.

11. *Наибольшее и наименьшее значения функции*. Так как функция $\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{x}]$ постоянна на каждом интервале $[\boldsymbol{n}\ ;\ \boldsymbol{n}+1)$, она не принимает наибольшего и наименьшего значений на области определения. Наибольшего и наименьшего значения нет.

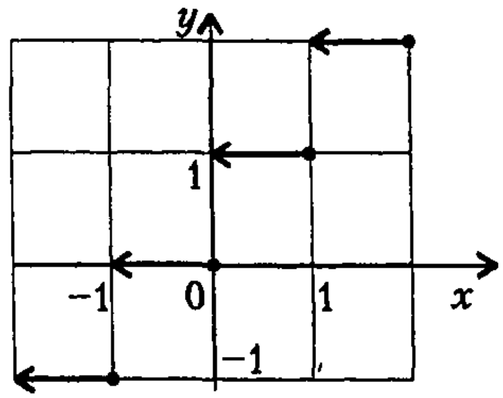


2.2.Пол числа, график функции y=$\lfloor x \rfloor$.

В литературе также встречается термин «пол числа x» и его обозначение $\lfloor x \rfloor$. Это то же самое, что и целая часть числа. Следовательно, график полностью совпадает с графиком функции y=[x].

2.3. Потолок числа, график функции y=$\lceil x \rceil$.

Сходным образом определяется парная функция y=$\lceil x \rceil$ - потолок числа x.



Это наименьшее целое число, не меньшее x.

Например: $\lceil -2 \rceil$= -2, $\left\lceil -\frac{1}{3} \right\rceil$= 0, $\lceil \pi \rceil$=4.

График функции y=[x] состоит из ступенек и как бы образует лестницу, идущую справа налево и сверху вниз, переходящую в себя при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ = (-1,-1).

2.4.Функция y=(x).

Существует функция y=(x) – ближайшее к x целое число. Если ближайших к x целых чисел два (когда x=$\frac{2k+1}{2}$, где k – целое число), то выбирают наибольшее из них.

Например: (4,53)=5, (1,5)=2, (-2,1)= -2.

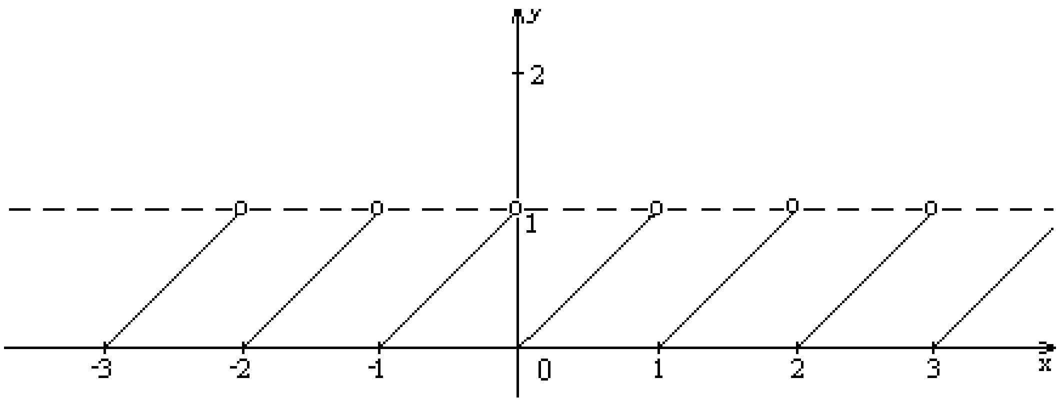
III. Дробная часть числа и её родственники.

3.1 Функция y={x}(дробная часть числа), её график и свойства.

Дробной частью {x} числа x называется разность между числом x и его целой частью: {x}=x - [x].

Например: {-0,3}=0,7, $\left\{-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$, { $\sqrt{2}$ }= $\sqrt{2}$ -1, {1} =0.

График функции y={x}:



<u>*Свойства функции y={x}.*</u>

1. <u>*Область определения*</u>. Функция имеет смысл для всех значений переменной ***x***, что следует из определения дробной части числа. Таким образом, область определения этой функции все действительные числа:

D({x}) = R.

2. <u>*Область значений.*</u> Функция ***y*** = {***x***} принимает значения на интервале [0 ; 1), что следует из определения дробной части числа, т.е.

E({*x*}) = [0 ; 1).

3. <u>*Чётность ,нечётность*</u>.Функция общего вида, не выполняется ни условие четности $f(-x) = f(x)$, ни условие нечетности $f(-x) = -f(x)$.

4. *Периодичность.* Функция периодическая с наименьшим положительным периодом $T = 1$.

5. *Ограниченность.* Из области значений функции следует, что функция $\boldsymbol{y} = \{\boldsymbol{x}\}$ ограничена.

6. *Непрерывность.* Функция $\boldsymbol{y} = \{\boldsymbol{x}\}$ непрерывна на каждом интервале $[\boldsymbol{n}\ ;\ \boldsymbol{n}+1)$, где $\boldsymbol{n}$ — целое, в каждой точке $\boldsymbol{n}$ функция терпит разрыв **первого рода**. Скачок равен 1.

7. *Нули функции.* Функция $\boldsymbol{y} = \{\boldsymbol{x}\}$ обращается в 0 при всех целых значениях $\boldsymbol{x}$, что следует из определения функции. То есть нулями функции будут все целочисленные значения аргумента.

8. *Промежутки монотонности.* Функция $\boldsymbol{y} = \{\boldsymbol{x}\}$ на всей области определения принимает только положительные значения.

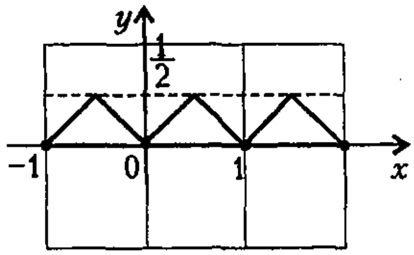
9. *Промежутки монотонности.* Функция, строго монотонно возрастающая на каждом интервале $[\boldsymbol{n};\ \boldsymbol{n}+1)$, где $\boldsymbol{n}$ — целое число.

10. *Точки экстремума.* Точек экстремума функция не имеет, так как не меняет характер монотонности.

11. *Наибольшее и наименьшее значения функции.* На каждом интервале $[\boldsymbol{n};\ \boldsymbol{n}+1)$ функция $\boldsymbol{y} = \{\boldsymbol{x}\}$ принимает наименьшее значение, равное нулю, в точке $\boldsymbol{n}$.

3.2 Функция y={{x}}

С дробной частью тесно связана ещё одна функция: y={{x}} – расстояние от x до ближайшего целого числа. В отличие от дробной части y={{x}} непрерывна на области определения. График функции:



IV. Свойства целой и дробной части.

1. **x=[x]+{x} (**любое число равно сумме целой и дробной частей).
2. **[x]≤x<[x]+1** (любое число больше своей целой части,

   но меньше целой части, увеличенной на 1).
3. Если p - целое число, то **[x +**p]= **[x]+**p.
4. Для любых действительных чисел x и y справедливо ***[x+y]≥[x]+[y]***

   (целая часть суммы двух чисел не меньше суммы целых частей слагаемых).
5. Если **[x] = [y], то |x - y| < 1.**

   (если целые части двух чисел равны, то модуль их разности меньше 1)

6.Если p - целое число, не равное 0, то $\left[\frac{[x]}{p}\right]=\left[\frac{x}{p}\right]$.

7. Если **x < y, то [x] < [y]** (если одно число меньше другого, то и его целая часть тоже меньше).

8.Для любого действительного x справедливо **[[x]] = [x].**

9. Если **[x] + {y} = 0**, то $\begin{cases}[x]=0\\ \{y\}=0\end{cases}$

10 . Если **p = [x] + {x}, то p=x**

11.Если p – натуральное, то **{p{x}} = {px}**

12.**(x) = [x +** $\frac{1}{2}$ **]**

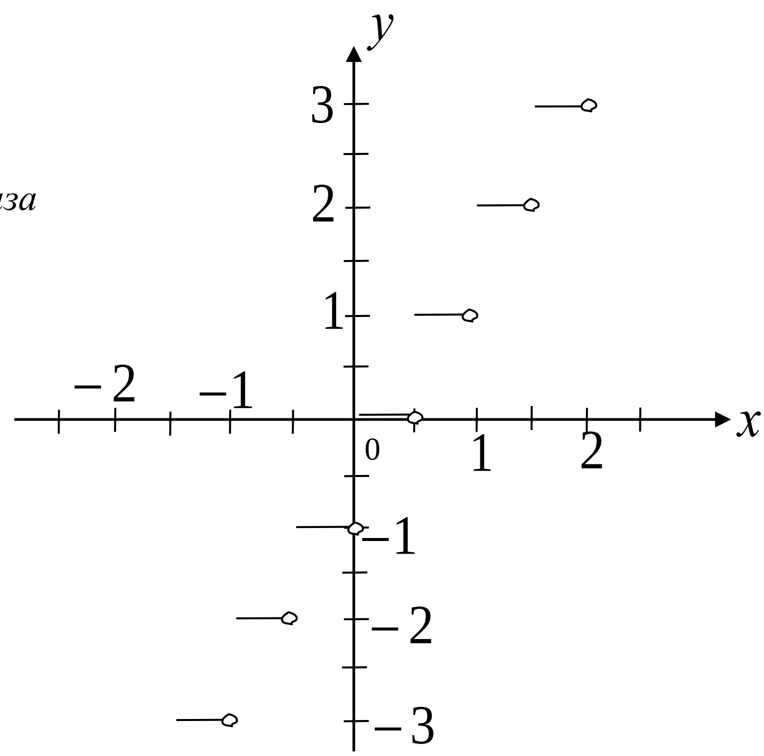
13. **{{x}} = |{x +** $\frac{1}{2}$ **} -** $\frac{1}{2}$ |

V. Преобразование графиков функций y=[x], y={x}.

1) y = [2x]

сжатие

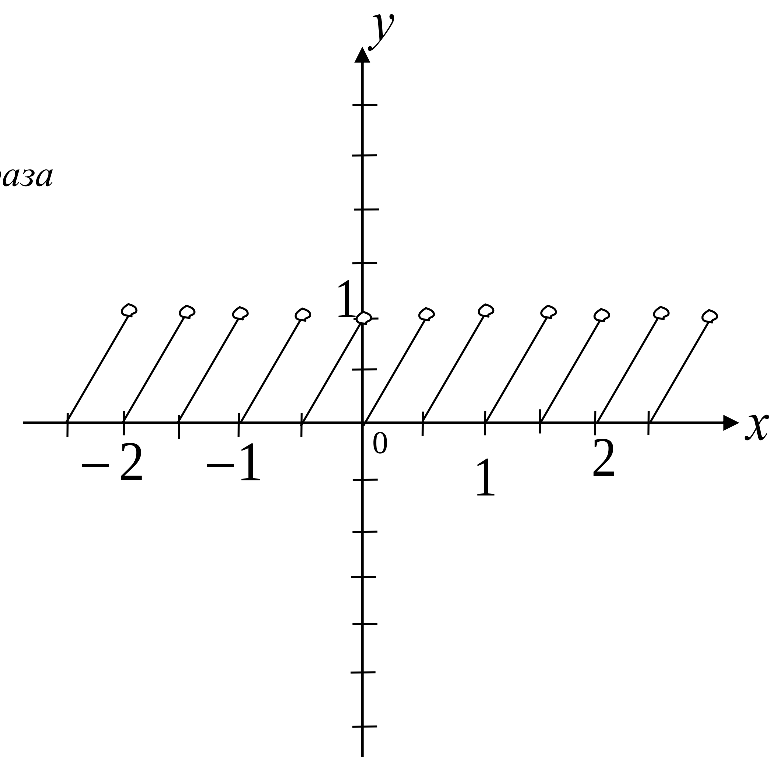
вдоль оси OX в 2 раза



2) y = {2x}

сжатие

вдоль оси OX в 2 раза

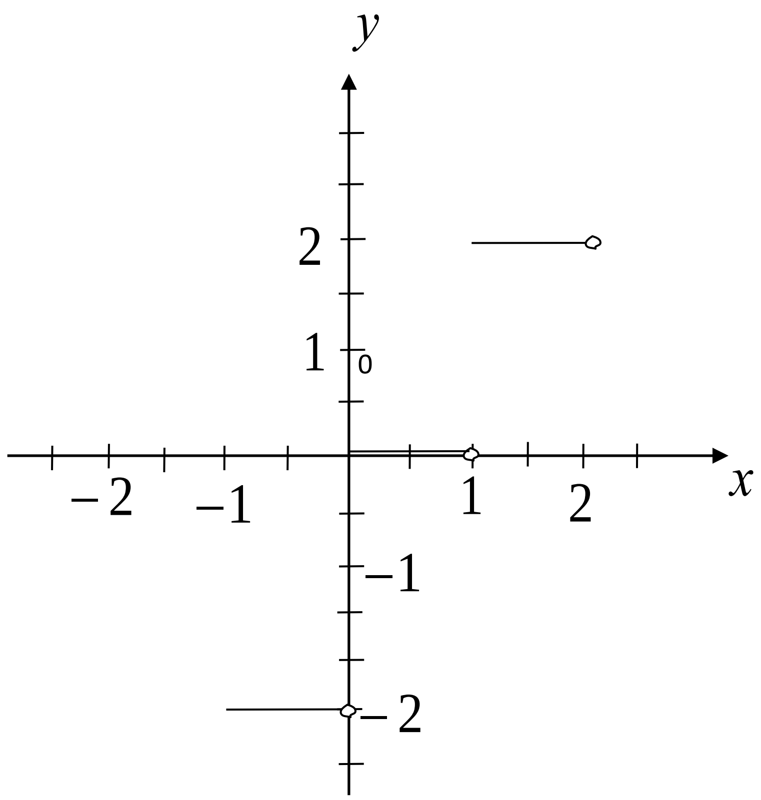


3). y = 2[x]

растяжение

вдоль оси OY в 2 раза

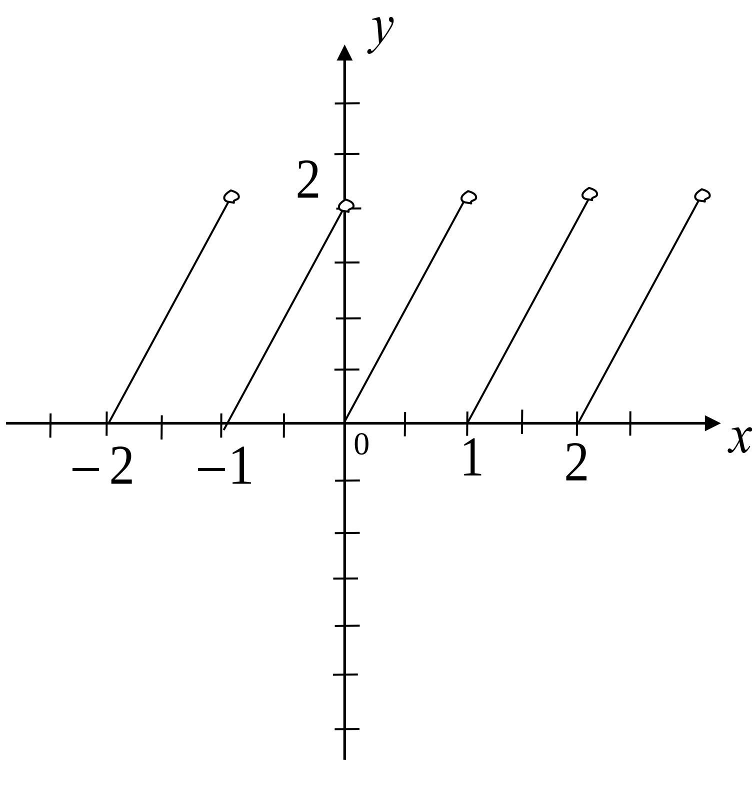
\



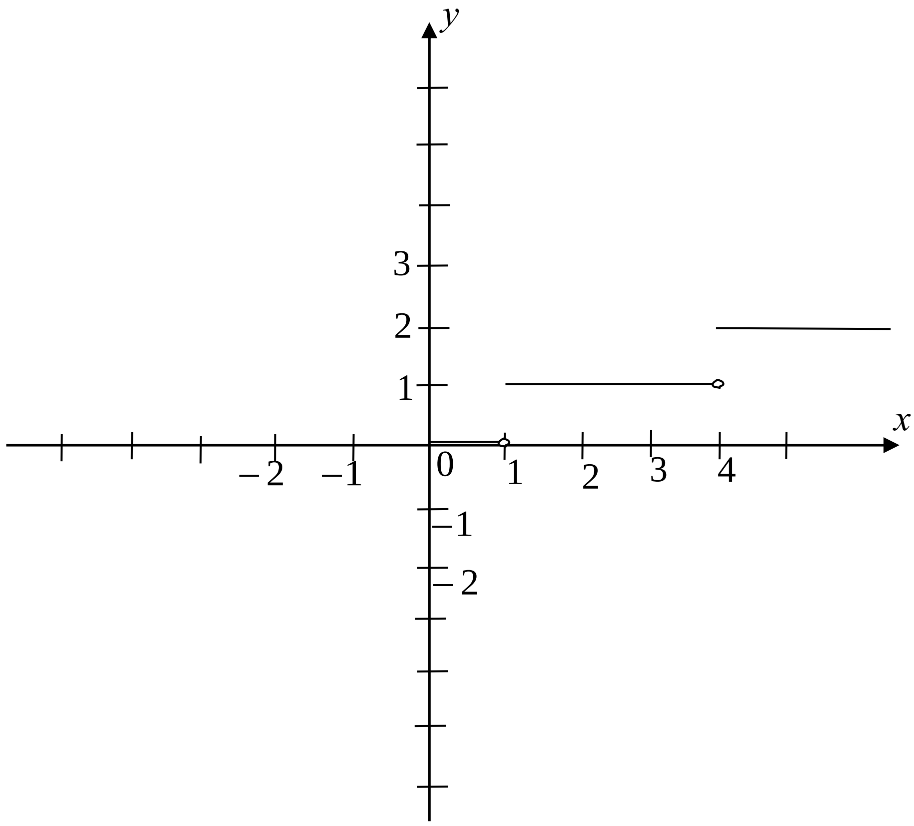
4) y = 2{x}

растяжение

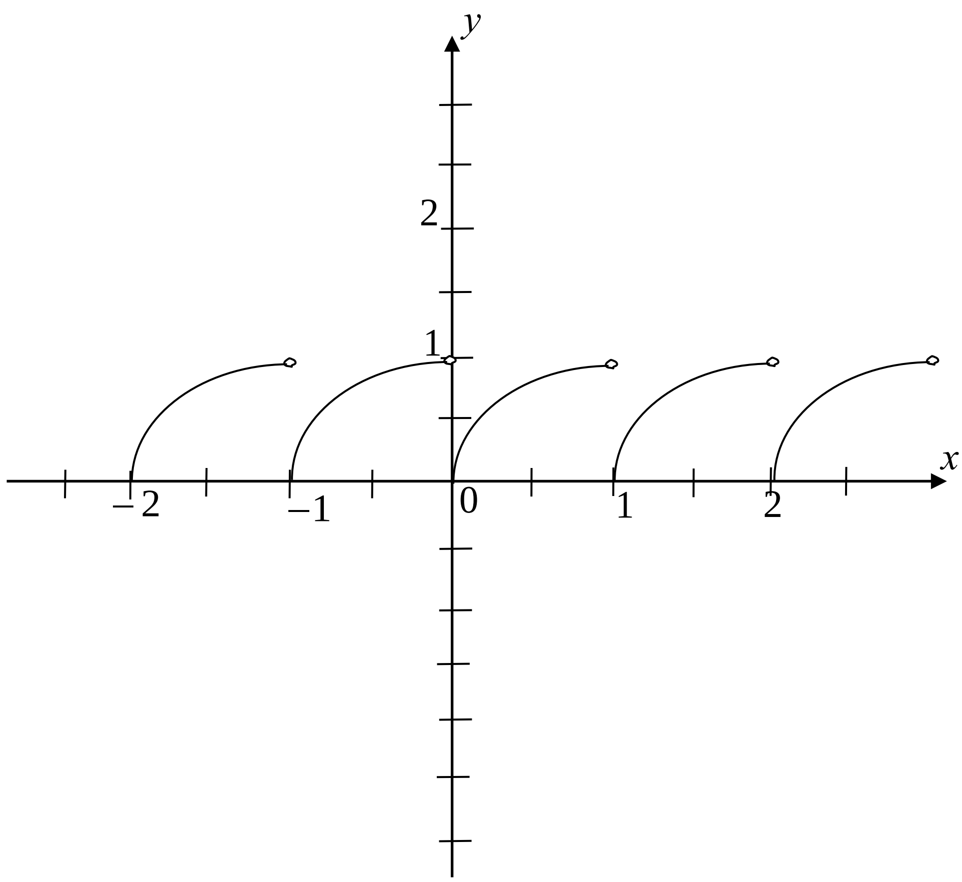
вдоль оси OY в 2 раза



5) $y = \sqrt{[x]}$



6) $y = \sqrt{\{x\}}$



VI. Уравнения и неравенства с переменной под знаком целой и дробной части.

6.1. Решение уравнений, содержащих целую часть числа:

1. $[x]=3$

$3 \le x < 3+1$

$Ответ: x \in [3;\ 4)$

2. $[x+1{,}5]=-5$

$-5 \le x+1{,}5 < -5+1$

$-6{,}5 \le x < -5{,}5$

$Ответ: x \in [-6{,}5;\ -5{,}5)$

3. $[2x+0{,}2]=1$

$1 \le 2x+0{,}2 < 2$

$0{,}8 \le 2x < 1{,}8$

$0{,}4 \le x < 0{,}9$

$Ответ: x \in [0{,}4;\ 0{,}9)$

4. $x+[x]=0$

$Ответ: x=0$

5. $[3x-2]=1{,}5$

$Ответ: решений\ нет$

6. $[10^x]=0$

$\begin{cases} 10^x > 0; \\ 10^x < 1. \end{cases} \Rightarrow x < 0$

$Ответ: x < 0$

7. $x^2 - 5[x] - 3 = 0$

$$[x] = \frac{x^2-3}{5}$$

$$\frac{x^2-3}{5} \le x < \frac{x^2-3}{5} + 1$$

$$\begin{cases} x \ge \dfrac{x^2-3}{5}, \\ x < \dfrac{x^2-3}{5} + 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 3 \le 0, \ * \\ x^2 - 5x + 2 > 0. \ ** \end{cases}$$

* $x^2 - 5x - 3 \le 0$

$D = 37$

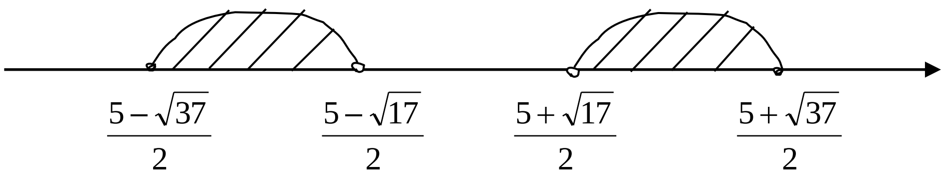
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

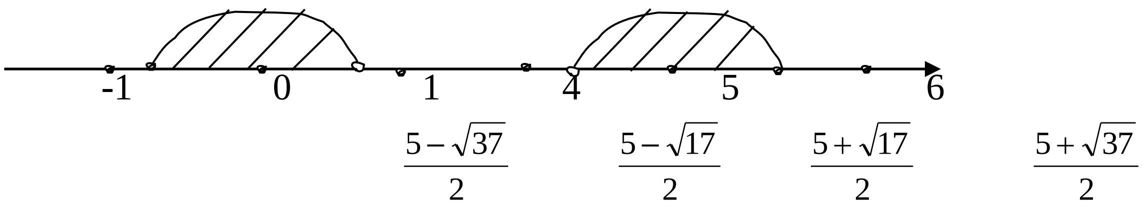
** $x^2 - 5x + 2 > 0$

$D = 17$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Решение системы неравенств:





а) $\dfrac{5-\sqrt{37}}{2} \le x < 0$

$[x] = -1 \ \Rightarrow$

$x^2 + 5 - 3 = 0$

$x^2 = -2$

решений нет

б) $0 \le x < \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$

$[x] = 0 \ \Rightarrow$

$x^2 - 3 = 0$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

$x_{1,2} \notin \left[0; \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$

$x_{1,2}$ – *посторонние корни*

в) $\dfrac{5+\sqrt{17}}{2} < x < 5$

$[x] = 4 \ \Rightarrow$

$x^2 - 20 - 3 = 0$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{23}$

$x = -\sqrt{23} \notin \left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}; 5\right)$

$x = -\sqrt{23}$ *посторонний корень*

$x = \sqrt{23} \in \left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}; 5\right)$

$x_1 = \sqrt{23}$

г) $5 \le x \le \dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$

$[x] = 5 \ \Rightarrow$

$x^2 - 25 - 3 = 0$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{28}$

$x = -\sqrt{28} \notin \left[5; \dfrac{5+\sqrt{37}}{2}\right]$

$x = -\sqrt{28}$ – *постор. корень*

$x = \sqrt{28} \in \left[5; \dfrac{5+\sqrt{37}}{2}\right]$

$x_2 = \sqrt{28}$

Ответ: $x_1 = \sqrt{23}; \ x_2 = \sqrt{28}$

6.2. Решение уравнений, содержащих дробную часть числа:

1. $x = [x]$

$x - [x] = 0$

$\{x\} = 0$

Ответ : x – *любое целое число*

2. $([x] + \{x\}) \mid x \mid + \dfrac{x^3 + 1}{x + 1} - x^0 = 0$

О.Д.З. $x \neq -1$ $x \neq 0$

$[x] + \{x\} = x$

$x \mid x \mid + \dfrac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} - 1 = 0$

$x \mid x \mid + x^2 - x = 0$

$x^2 - x + x \mid x \mid = 0$

1) *Если* $x < 0$, *то* $x^2 - x - x^2 = 0$

$x_1 = 0$

$x_1 \notin$ *О.Д.З.*

x_1 – *посторонний корень*

2) *Если* $x \geq 0$, *то* $x^2 + x^2 - x = 0$

$2x^2 - x = 0$

$x_2 = 0,\ x_3 = \dfrac{1}{2}$

$x_2 \notin$ *О.Д.З.*

x_2 – *посторонний корень*

$x_3 \in$ *О.Д.З.*

Ответ : $x = \dfrac{1}{2}$

6.3. Решение неравенств, содержащих дробную и целую части числа.

1).

1. $\dfrac{\{x\}+[x]+|x|+x}{|x|}-8^0>2x-1$

$О.Д.З.\ x\neq 0$

$\{x\}+[x]=x$

$\dfrac{2x+|x|}{|x|}-1>2x-1$

$\dfrac{2x}{|x|}+1-1>2x-1$

$\dfrac{2x}{|x|}>2x-1$

1) *Если* $x>0$, *то*

$\dfrac{2x}{x}>2x-1$

$x<\dfrac{3}{2}$

$\begin{cases} x>0, \\ x<\dfrac{3}{2}; \end{cases} \Rightarrow x\in(0;\dfrac{3}{2})$

2) *Если* $x<0$, *то*

$-\dfrac{2x}{x}>2x-1$

$x<-\dfrac{1}{2}$

$\begin{cases} x<0, \\ x<-\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;-\dfrac{1}{2})$

Ответ: $x\in(-\infty;-\dfrac{1}{2})\cup(0;\dfrac{3}{2})$

2).Решите неравенство $\left[\dfrac{2x+3}{1-x}\right] \le \pi$.

Решение: Если неравенство $[x] \le a$ справедливо при $a \in \mathrm{R}$, то выполняется неравенство $x < [a]+1$, так как $[\pi]=3$, то исходное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{2x+3}{1-x} \le 4$, решением которого являются $\mathrm{x} \in (-\infty; \frac{1}{6}) \cup (1;\infty)$

Ответ: $\mathrm{x} \in (-\infty; \frac{1}{6}) \cup (1;\infty)$

3).

Докажите неравенство $4[x]\{x\} \le x^2$.

Доказательство: Так как $x=[x]+\{x\}$, то неравенство представимо в виде $4[x]\{x\} \le ([x]+\{x\})^2 \Leftrightarrow 4[x]\{x\} \le [x]^2 + 2[x]\{x\} + \{x\}^2 \Leftrightarrow [x]^2 - 2[x]\{x\} + \{x\}^2 \ge 0 \Leftrightarrow ([x]-\{x\})^2 \ge 0$, что, очевидно, верно при любых значениях x.

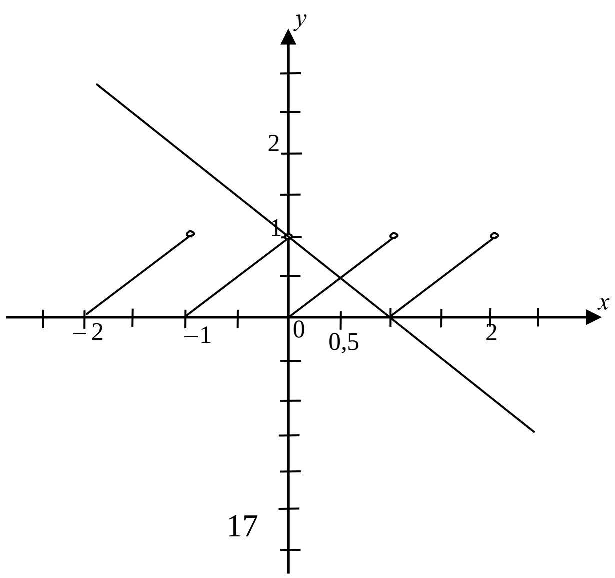
Неравенство доказано.

6.4 .Функционально - графический метод решения уравнений.

1). 1 – x = {x}

y_1=1-x

y_2={x}

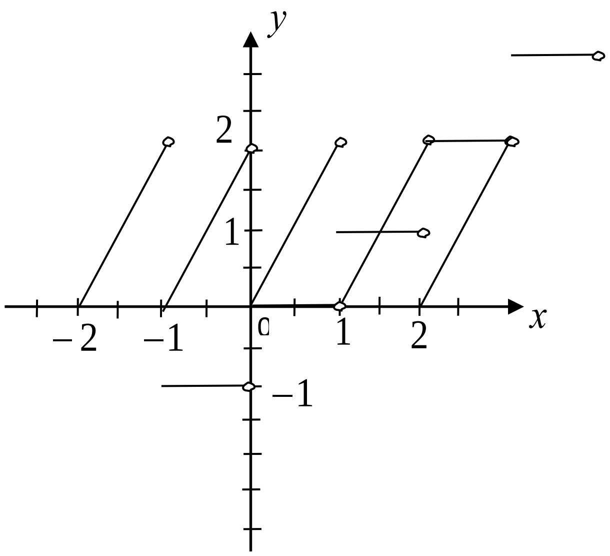


Ответ: $x_1 = 0{,}5$
$x_2 = 1$

2). $[x] = 2\{x\}$.

$y_1 = [x]$

$y_2 = 2\{x\}$



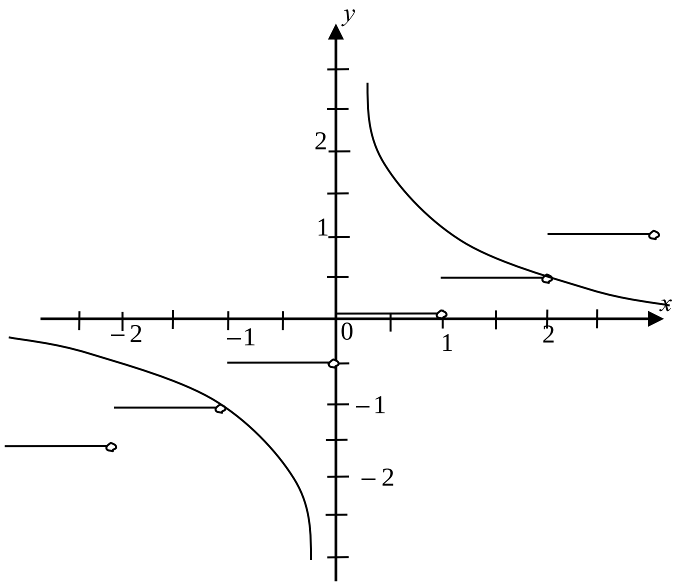
Ответ: $x_1 = 0$

$x_2 = 1{,}5$

3). $0{,}5[x] = \frac{1}{x}$

$y_1 = \frac{1}{x}$

$y_2 = 0{,}5[x]$



Ответ: Решений нет.

VII.Решение олимпиадных задач.

Задача 1. (V Соросовская олимпиада).

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3{,}9 \\ y+[z]+\{x\}=3{,}5 \\ z+[x]+\{y\}=2 \end{cases}$.

Решение: Пусть $a=[x], \alpha=\{x\}, b=[y], \beta\{y\}, c=[z], \gamma=\{z\}$, где *a, b, c* – целые числа, $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < 1$, $0 \le \gamma < 1$. В этих обозначениях система имеет вид

$\begin{cases} a+\alpha+u+\gamma=3{,}9 \\ b+\beta+c+\alpha=3{,}5 \\ c+\gamma+\alpha+\beta=2 \end{cases}$. Складывая уравнения системы, получим

2*(a+b+c+α+β+γ)*=9,4, то есть *(a+b+c+α+β+γ)*=4,7. Вычитая из полученного уравнения последовательно первое, второе и третье уравнения системы, имеем

$\begin{cases} c+\beta=0{,}8 \\ a+\gamma=1{,}2 \\ b+\alpha=2{,}7 \end{cases}$, откуда следует, что *c=0, β=0,8, a=1, γ=0,2, b=2, α=0,7.*

Ответ: (1,7; 2,8; 0,2).

Задача 2. Решите уравнение $\sqrt{x+[x]}+\sqrt{x-[x]}=1$.

Решение: Найдём ОДЗ системы: x≥0.

Рассмотрим два случая: $0 \le x < 1$ и $x \ge 1$.

Если $x \ge 1$, то $[x] \ge 1$ и $\sqrt{x+[x]} \ge \sqrt{2}$. В этом случае уравнение решений не имеет.

Если же $0 \le x < 1$, то $[x]=0$ и уравнение принимает вид $2\sqrt{x}=1$, откуда $x=\frac{1}{4}$.

Задача 3.Решите систему уравнений $\begin{cases} x|x|+y|y|=1 \\ [x]+[y]=1 \end{cases}$

Решение: Решение системы проведём графическим способом.

Уравнение $x|x|+y|y|=1$ определяет на плоскости кривую, состоящую из двух дуг гипербол и дуги окружности. Если k<x<k +1, k$\in$ Z, то [x] = k, а [y] = 1-k и 1-k < y <2- k. Поэтому уравнение $[x]+[y]=1$ определяет множество точек *(x;y)* плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} k \le x < k+1 \\ 1-k \le y < 2-k \end{cases}$, k$\in$ Z. Эти точки образуют единичные квадраты. Очевидно, что указанные линии имеют две общие точки (0;1) и (1;0)

Ответ: (0;l), (l;0).

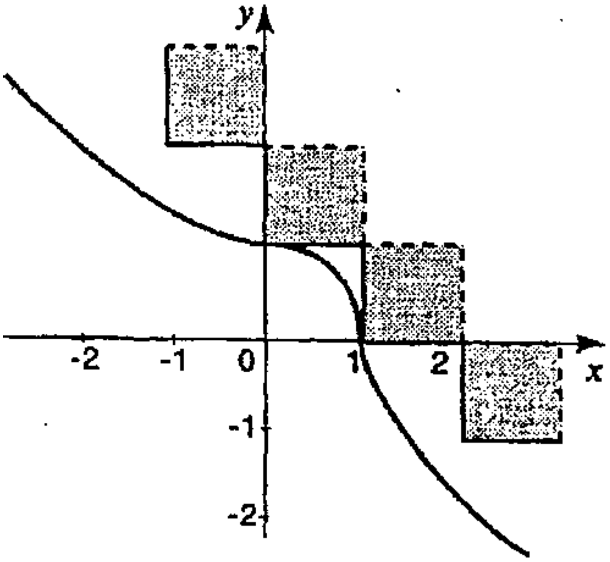
Задача 4.

Решите уравнение $\frac{1}{[x]}+\frac{1}{\{x\}}=\frac{1}{x}$

Решение: Так как $[x]+\{x\}=x$, то уравнение принимает вид $\frac{1}{[x]}+\frac{1}{\{x\}}=\frac{1}{[x]+\{x\}}$.

Сделав замену $[x]=a, \{x\}=b,$ получим $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2=ab \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{a}{b}\right)+1=0.$

Данное квадратное уравнение не имеет корней (относительно $\frac{a}{b}$) при *a≠0* и *b≠0.*



Ответ: решений нет.

VIII.Заключение.

Тема «Целая и дробная части числа» - очень сложная и интересная часть математики. Эти понятия широко используются в теории чисел, теории вероятностей и других разделах математики, а также в смежных науках. Я рад, что узнал много нового, самостоятельно смог описать свойства функций целой и дробной части, научился решать уравнения и неравенства, содержащие целую и дробную части числа. Считаю, что я буду чувствовать себя уверенно, если на олимпиадах встретятся задачи, содержащие эти понятия.

К сожалению, современная школьная программа не предусматривает изучение данной темы. Однако, в ходе своего исследования я пришёл к выводу, что данный материал можно использовать на факультативах, на занятиях математических кружков, начиная с пятого и заканчивая одиннадцатыми классами, и, конечно, при подготовке к олимпиадам.

А задачу, описанную во ведении, я решил так:

«Найти число корней уравнения 5[x]+27{x}=2012, где [x] – целая часть числа x, а {x} – дробная часть числа x.»

5[x] + 27{x} = 2012

5[x] = 2012 - 27{x}

[x] = (2012 - 27{x}) / 5

Оценим правую часть этого уравнения

$$\mathbf{0 \le \{x\} < 1}$$

$$\mathbf{-1 < -\{x\} \le 0}$$

$$\mathbf{-27 < -27\{x\} \le 0}$$

$$\mathbf{2012 - 27 < 2012 - 27\{x\} \le 2012}$$

$$\mathbf{1985 < 2012 - 27\{x\} \le 2012}$$

$$\mathbf{397 < \frac{2012-27\{x\}}{5} \le 402.4}$$

$\mathbf{397 < [x] \leq 402.3}$

[x] – 398, 399, 400, 401, 402

Мы нашли целые части чисел x. А так как нужно было количество чисел x, то чисел будет 5 и их дробные части можно не искать.

Ответ: 5 чисел.

IX.Список литературы.

1. Евсюк С.Л. Математика. Решение задач повышенной сложности. Минск «Мисанта» 2003 г., с. 44.
2. Абрамов А. М. Ивлев Б.М. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа «Просвещение» 1990 г.
3. В.Н. Березин, И.Л. Никольская, Л.Ю. Березина. Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике, - М.: 1985.
4. Вороной А.Н. Уравнение с переменной под знаком целой или дробной части. Журнал «Математика в школе» №10, 2002 г., с. 56-59.
5. http://ru.wikipedia.org/wiki/Целая часть
6. http://dic.academic.ru

X.Приложение.

Задача 1. Найти целую часть числа

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Решение: используем неравенства

$1 \le 1 \le 1$,

$$0.7 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 0.8$$

$$0.5 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 0.6$$

$$0.5 \le \frac{1}{\sqrt{4}} \le 0.5$$

$$0.4 < \frac{1}{\sqrt{5}} < 0.5$$

(Они получаются при извлечении корней с точностью до 0,1 с недостатком и избытком). Сложив эти неравенства, получим

1+0,7+0,5+0,5+0,4 < x < 1+0,8+0,6+0,5+0,5.

Т.е. 3,1< x <3,4 и, следовательно, [x]=3.

Заметим, что число 3,25 отличается от x не более чем на 0,15.

Задача 2. Найти наименьшее натуральное число m, для которого

$$0{,}3 < \left\{\sqrt{m}\right\} < 0{,}(3).$$

Решение: пусть $\sqrt{m} = k + \alpha$,

где $k \in Z$ и $0 \le \alpha < 1$, тогда по условию

$\frac{3}{10} < \alpha < \frac{1}{3}$, откуда

$$k + \frac{3}{10} < \sqrt{m} < k + \frac{1}{3},$$

$$k^2 + \frac{3}{5}k + \frac{9}{100} < m < k^2 + \frac{2}{3}k + \frac{1}{9}.$$

Проверка показывает, что при k = 1 и при k = 2 полученное неравенство, не выполняется ни для какого натурального m, а при к = 3 имеет решение m = 1.

Значит, искомое число равно 11.

Ответ: 11.

Задача 3. Решить уравнение:

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}.$$

Решение: положим $\frac{15x-7}{5}=t$, тогда $x=\frac{5t+7}{15}$, отсюда

$$\frac{5+6x}{8}=\frac{5}{8}+\frac{6}{8}\cdot x=\frac{5}{8}+\frac{6}{8}\cdot\frac{5t+7}{15}=\frac{10t+39}{40},$$

и уравнение принимает вид $\left[\frac{10t+39}{40}\right]=t$.

Из определения целой части следует, что $0\le\frac{10t+39}{40}-t<1$.

Решив эти неравенства, находим:

$$-\frac{1}{30}<t\le 1.3.$$

Так как t – целое число, то оно может быть либо нулем, либо единицей.

При t = 0 получим $x_1=\frac{7}{15}$, а при t = 1 имеем $x_2=\frac{4}{5}$.

Ответ: $x_1=\frac{7}{15}$; $x_2=\frac{4}{5}$.

Задача 4. Решить уравнение

$$\left[\frac{x^3+8x^2-9x+27}{162}\right]=\frac{x}{3}.$$

Решение: так как $\frac{x}{3}$ — целое число, то x = 3k,

где $k\in Z$, и после подстановки уравнение принимает вид

$$\left[\frac{27k^3+72k^2-27k+27}{162}\right]=k$$ или

$$\left[\frac{3k^3+8k^2-3k+3}{18}\right]=k.$$

По определению целой части полученное уравнение равносильно двойному неравенству

$$18k\le 3k^3+8k^2-3k+3<18k+18,$$

или $0\le 3k^3+8k^2-21k+3<18$.

Если $k\ge 3$, то

$$3k^3+8k^2-21k+3=3k\left(k^2-7\right)+8k^2+3>18.$$

Если $k\le -5$, то

$$3k^3+8k^2-21k+3=2k^2\left(k+4\right)+k(k^2-21)+3<0.$$

Итак, остается рассмотреть только целые числа $k\in[-4;2]$.

Проверка показывает, что решениями неравенства являются числа $k_1=0$ и $k_2=2$. При $k_1=0$ получим $x_1=0$ и при $k_2=2$ имеем $x_2=6$.

Ответ: 0; 6.

Задача 5. Решить уравнение $\left[\frac{x-3}{2}\right]=\left[\frac{x-2}{3}\right]$.

Решение: если два числа имеют одинаковую целую часть, то их разность по абсолютной величине меньше 1, и поэтому из данного уравнения следует неравенство

$$\left|\frac{x-3}{2}-\frac{x-2}{3}\right|<1,$$

откуда $-1<x<11$. Заметим, что неравенство $\frac{x-3}{2}<\frac{x-2}{3}$ выполняется при x<5, и, следовательно, число $x\in(-1;5)$ не будет корнем данного уравнения, если неравенство (относительно $k\in Z$) $\frac{x-3}{2}<k\le\frac{x-2}{3}$ будет иметь решение.

Но из этого неравенства вытекает, что $3k+2\le x<2k+3$, так что его решениями могут быть только $k<1$, а учитывая, что $x\in(-1;5)$, получаем k=0 и k = - 1.

Другими словами, из интервала $(-1;5)$ следует исключить промежутки $(-1;1)$ и $(2;3)$.

Аналогично, из интервала $(5;11)$ следует исключить промежутки $(7;8)$ и $(9;11)$.

В результате получим, что множество решений данного уравнения $x\in[1;2)\cup[3;7)\cup[8;9)$.

Ответ: $1\le x<2$;. $3\le x<7$; $8\le x<9$.

Задача 6. Решить уравнение $x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{1993}\right]$.

Решение: так как $[\alpha] \le \alpha < [\alpha] + 1$ и $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6}$, то

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] \le x < \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] + 3.$$

Отсюда следует, что

$$0 \le \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{7}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{1993}\right] < 3.$$

И поэтому, во-первых, $x \ge 0$, а во-вторых, в сумме, стоящей в середине полученного двойного неравенства, все слагаемые, начиная с третьего, равны 0, так что $x < 7$.

Поскольку x – целое число, то остается проверить значения от 0 до 6. Решениями уравнения оказываются числа 0,4 и 5.

Ответ: 0; 4; 5.

Задача 7. Решить систему уравнение

$$a)\begin{cases} [x] \cdot y = 1000 \ , \\ x \cdot [y] = 1996 \ . \end{cases}$$

Решение: так как $[x] \ne 0$ и $[y] \ne 0$, то рассмотрим два случая:

1) если $x \ge 1$, то записав уравнения системы в виде

$y = \frac{1000}{[x]}$ и $[y] = \frac{1996}{x}$, и используя неравенства $[y] \le y$ и $x < [x] + 1$,

получим

$\frac{1996}{[x]+1} < \frac{1000}{[x]}$, откуда $[x] < \frac{1000}{996}$.

Поэтому $[x] = 1$, $y_1 = 1000, x_1 = \frac{1996}{1000} = \frac{499}{250}$;

2) если $x < 0$, то запишем уравнения в виде

$[x] = \dfrac{1000}{y}$ и $x = \dfrac{1996}{[y]}$, и используем неравенства $y < [y] + 1$ и $[x] \le x$.

При $[y] \ne 1$ имеем

$$\frac{1000}{[y]+1} < \frac{1000}{y} = [x] \le x = \frac{1996}{[y]},$$

откуда $[y] > -\dfrac{1996}{996} > -3$, т.е. $[y] = -2, x_2 = [x] = -998$,

$$y_2 = -\frac{1000}{998} = -\frac{500}{499}.$$

Если $[y] = -1$, то $x_3 = [x] = -1996$,

$$y_3 = -\frac{1000}{1996} = -\frac{250}{499}.$$

Следовательно, система уравнений имеет три решения.

Ответ: $\left(\dfrac{499}{250}; 1000\right); \left(-998; -\dfrac{500}{499}\right); \left(-1996; -\dfrac{250}{499}\right)$.

б) $\begin{cases} [x+y+4] = 18 - y, \\ [x+1] + [y-1] = 18 - x - y. \end{cases}$

Решение: рассмотрим первое уравнение системы: $[x+y+4] = 18 - y$,
отсюда $18 - y \le x + y + 4 < 18 - y + 1$,

$18 - y - x \le y + 4 < 18 - y - x + 1$, а так как $18 - x - y = [x+1] + [y-1]$,
то получим: $[x+1] + [y-1] \le y + 4 < [x+1] + [y-1] + 1$,
значит $[y+4] = [x+1] + [y-1]$.
Используем свойство: если Z – целое число, то [x+Z] = [x] + Z, имеем:
$[y] + 4 = [x] + 1 + [y] - 1, [x] = 4 \Rightarrow x = 4.$
Подставим x=4 во второе уравнение системы: $5 + [y-1] = 14 - y$,
$[y-1] = 9 - y, 9 - y \le y - 1 < 10 - y$ или

$$\begin{cases} y - 1 \ge 9 - y \\ y - 1 \le 10 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y \ge 10 \\ 2y < 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \ge 5 \\ y < 5.5 \end{cases}$$

$5 \le y < 5.5 \Rightarrow y = 5.$

Ответ: (4;5)

Задача 8.

Найти число корней уравнения

$$19[x]+97\{x\}=1997.$$

Решение: из условия следует, что

$$0\le\{x\}=\frac{1997-19[x]}{97}<1.$$

Найдем количество целых чисел $[x]=n$,
удовлетворяющих неравенствам

$$0\le\frac{1997-19n}{97}<1.$$

Преобразуем, неравенство к виду $100<n<105\frac{2}{19}$, откуда получим, что искомое количество целых чисел равно 5. Значит, число корней данного уравнения равно 5.

Ответ: 5.

Задача 9. ***(Соросовская олимпиада).***

Решить уравнение

$$x^3-[x]-3=0.$$

Решение: преобразуем, уравнение к виду $x^3-3=[x]$
и построим графики функций $y=x^3-3$ и $y=[x]$.
Так как графики этих функций пересекаются в единственной точке, то уравнение имеет единственный корень.
Этот корень заключен между числами 1 и 2.
Но если 1<x<2, то $[x]=1$, и уравнение принимает вид
$x^3-1=3$, отсюда $x^3=4, x=\sqrt[3]{4}$.