Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 9-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

Математическое моделирование очередей

Филатов Вячеслав Александрович,

10 кл., МАОУ «Гимназия №4 имени братьев Каменских», г. Пермь,

Мартюшева Надежда Николаевна,

учитель математики высшей категории.

Пермь. 2014.

Оглавление

Введение...3

Глава 1. Общие вопросы теории очередей...5

Глава 2. Построение элементарной математической модели очереди.....10

Глава 3. Использование элементарной модели очереди в практических

целях 15

Заключение...17

Список литературы...18

Введение

На многих предприятиях клиенты (не обязательно люди) поступают на обслуживающее устройство, например, на обрабатывающий станок, с постоянной скоростью. Если устройство выходит из строя из-за поломки или по другой причине, то перед ним образуется очередь. Простой производства влечет за собой убытки. Если приблизительно известно время ликвидации простоя, можно вычислить время ликвидации очереди. Это очень важный вопрос с экономической точки зрения в виду того, что сложно провести реальный эксперимент такой ситуации. Поэтому реально составить математическую модель очереди и, используя эту модель, ответить на актуальные вопросы производства.

Математическое моделирование – научный подход, связанный с построением и использованием математической модели исследуемого явления, субъекта или объекта, а также систем, их включающих с целью сокращения времени, сил и средств по предсказанию возможного будущего, повышения обоснованности и точности научных прогнозов, учёта их в деятельности. [2]

Все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, по сути занимаются математическим моделированием: заменяют объект его математической моделью и затем изучают последнюю. Связь математической модели с реальностью осуществляется с помощью цепочки гипотез, идеализаций и упрощений. С помощью математических методов описывается, как правило, идеальный объект, построенный на этапе содержательного моделирования. [3]

Цель данного исследования: построить простейшую модель очереди и решить с ее помощью конкретные практические задачи.

Задачи исследования:

- Изучить основные вопросы теории массового обслуживания.

- Построить простейшую математическую модель очереди.
- Построить частные случаи математической модели очереди при некоторых измененных условиях.
- Решение практических задач с помощью построенных моделей.

Глава 1.
Общие вопросы теории очередей

Каждый из нас не раз в своей жизни стоял в очередях и знает, как много времени это отнимает. Очередь — это линия ожидания. Они могут носить форму ожидания ремонта автомобиля в центре автосервиса или ожидания студентами консультации у профессора. В таблице перечислены некоторые примеры возникновения очередей в системах массового обслуживания:

Ситуация	Ожидающие в очереди	Процесс обслуживания
Супермаркет	Покупатели	Прием кассиром оплаты за покупки
Приемная врача	Пациенты	Прием доктором и медсестрой
Компьютер	Компьютерные программы	Выполнение программ процессором
Телефонная компания	Абоненты	Выполнение заказов на междугородние переговоры

Теория очередей — часть более широкой теории, в рамках которой проводятся оперативные исследования и создаются математические модели. Все это делается с одной целью — решить проблемы, которые создает стояние в очередях. Здесь важно найти компромиссный вариант, учитывающий систему расходов и среднее время ожидания в очереди. Основы знаний об очередях, иногда называемые теорией очередей или теорией массового обслуживания, составляют важную часть теории управления производством. Теория массового обслуживания (англоязычное название - *queueing theory* - теория очередей) возникла в начале 20 века. Ее основоположником считается датский ученый А.К. Эрланг, работавший в шведской телефонной компании и занимавшийся вопросами проектирования телефонных сетей. В дальнейшем теория получила интенсивное развитие и применение в различных областях науки, техники, экономики, производства. Это объясняется тем, что эта теория изучает широко распространенные в человеческой практике ситуации, когда имеется некоторый ограниченный ресурс и множество (поток) запросов на его использование, следствием чего являются задержки или отказы в обслуживании некоторых запросов. Стремление понять объективные причины этих задержек или отказов и по возможности уменьшить их воздействие является побудительным мотивом развития теории массового обслуживания.

Классификационные признаки систем массового обслуживания

В системах массового обслуживания различают три основных этапа, которые проходит каждая заявка:

1) появление заявки на входе в систему;

2) прохождение очереди;

3) процесс обслуживания, после которого заявка покидает систему.

На каждом этапе используются определенные характеристики, которые следует обсудить прежде, чем строить математические модели.

Характеристики входа:

1) число заявок на входе (размер популяции);

2) режим поступления заявок в систему обслуживания;

3) поведение клиентов.

Число заявок на входе

Число потенциально возможных заявок (размер популяции) может считаться либо бесконечным (неограниченная популяция), либо конечным (ограниченная популяция). Если число заявок, поступивших на вход системы с момента начала процесса обслуживания до любого заданного момента времени, является лишь малой частью потенциально возможного числа клиентов, популяция на входе рассматривается как неограниченная. Примеры неограниченных популяций: автомобили, проходящие через пропускные пункты на скоростных дорогах, покупатели в супермаркете и т. п. В большинстве моделей очередей на входе рассматриваются именно неограниченные популяции.

Если количество заявок, которые могут поступить в систему, сравнимо с числом заявок, уже находящихся в системе массового обслуживания, популяция считается ограниченной. Пример ограниченной популяции:

компьютеры, принадлежащие конкретной организации и поступающие на обслуживание в ремонтную мастерскую. [1]

Режим поступления заявок в систему обслуживания

Заявки могут поступать в систему обслуживания в соответствии с определенным графиком (например, один пациент на прием к стоматологу каждые 15 мин, один автомобиль на конвейере каждые 20 мин) или случайным образом. Появления клиентов считаются случайными, если они независимы друг от друга и точно непредсказуемы.

Поведение клиентов

Большинство моделей очередей основывается на предположении, что поведение клиентов является стандартным, т. е. каждая поступающая в систему заявка встает в очередь, дожидается обслуживания и не покидает систему до тех пор, пока ее не обслужат. Другими словами, клиент (человек или машина), вставший в очередь, ждет до тех пор, пока он не будет обслужен, не покидает очередь и не переходит из одной очереди в другую.

Жизнь значительно сложнее. На практике клиенты могут покинуть очередь потому, что она оказалась слишком длинной. Может возникнуть и другая ситуация: клиенты дожидаются своей очереди, но по каким-то причинам уходят необслуженными. Эти случаи также являются предметом теории массового обслуживания, однако мной не рассматриваются.

Характеристики очереди:

1) длина;

2) правило обслуживания.

Длина очереди

Длина может быть ограничена либо не ограничена. Длина очереди (очередь) ограничена, если она по каким-либо причинам (например, из-за физических ограничений) не может увеличиваться до бесконечности. Если очередь достигает своего максимального размера, то следующая заявка в систему не допускается и происходит отказ. Длина очереди не ограничена, Если в очереди может находиться любое число заявок. Например, очередь автомобилей на заправке.

Правило обслуживания

Большинство реальных систем использует правило «первым пришел — первым ушел» (*FIFO — first in, first out*). В некоторых случаях, например в приемном покое больницы, в дополнение к этому правилу могут устанавливаться различные приоритеты. Пациент с инфарктом в критическом состоянии, по-видимому, будет иметь приоритет в обслуживании по сравнению с пациентом, сломавшим палец. Порядок запуска компьютерных программ — другой пример установления приоритетов в обслуживании.

Характеристики процесса обслуживания:

1) конфигурация системы обслуживания (число каналов и число фаз обслуживания);

2) режим обслуживания.

Конфигурация системы обслуживания

Системы обслуживания различаются по числу каналов обслуживания. Обычно количество каналов можно определить как число клиентов, обслуживание которых может быть начато одновременно, например: число мастеров в парикмахерской. Примеры одноканальной системы обслуживания: банк, в котором открыто единственное окошко для обслуживания клиентов, или ресторан, обслуживающий клиентов в автомобилях. Если же в банке открыто несколько окошек для обслуживания, клиент ожидает в общей очереди и подходит к первому освободившемуся окну, то мы имеем дело с многоканальной однофазовой системой обслуживания. Большинство банков, также, как почтовые отделения и авиакассы, являются многоканальными системами обслуживания.

Другая характеристика — число фаз (или последовательных этапов) обслуживания одного клиента. Однофазовыми являются такие системы, в которых клиент обслуживается в одном пункте (на одном рабочем месте), затем покидает систему. Ресторан для обслуживания автомобилей, в котором официант получает деньги и приносит заказ в автомобиль, является примером однофазовой системы. Если же в ресторане нужно сделать заказ в одном месте, оплатить его в другом и получить пищу в третьем, то мы имеем дело с многофазовой (три фазы) системой обслуживания.

Режим обслуживания

Как и режим поступления заявок, режим обслуживания может характеризоваться либо постоянным, либо случайным временем обслуживания. При постоянном времени на обслуживание любого клиента затрачивается одинаковое время. Такая ситуация может наблюдаться на автоматической мойке автомобилей. Однако более часто встречаются ситуации, когда время обслуживания имеет случайное распределение.

Параметры моделей очередей

При анализе систем массового обслуживания используются технические и экономические характеристики.

Наиболее часто используются следующие технические характеристики:

1) среднее время, которое клиент проводит в очереди;

2) средняя длина очереди;

3) среднее время, которое клиент проводит в системе обслуживания (время ожидания плюс время обслуживания);

4) среднее число клиентов в системе обслуживания;

5) вероятность того, что система обслуживания окажется незанятой;

6) вероятность определенного числа клиентов в системе.

Среди экономических характеристик наибольший интерес представляют следующие:

1) издержки ожидания в очереди;

2) издержки ожидания в системе;

3) издержки обслуживания.

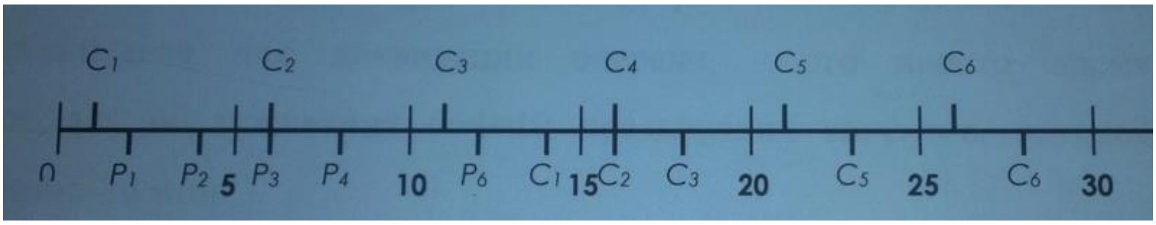
Глава 2

Построение элементарной математической модели очереди

Рассмотрим такую задачу. Со станка A на станок B поступают изделия со скоростью 30 изделий в час. Станок B может обработать 80 изделий в час. Предположим, что станок B сломался и не работает 4 часа. Когда станок снова начинает работать, перед ним скопилась очередь в 120 изделий. В течение первого часа после возобновления работы на станок B поступают еще 30 изделий, но этот станок может обработать 80 изделий в час. Таким образом, в конце первого часа останется очередь из 70 изделий. В течение второго часа поступают 30 новых изделий, B может обслужить 80. Итак, в конце второго часа у станка B останется очередь из 20 изделий. В течение третьего часа поступают еще 30 изделий, но этот станок может обработать 80 изделий. Таким образом, в течение третьего часа очередь на станок исчезнет и производство войдет в обычную колею. [4]

Временной фактор	**Очередь**
Станок В начинает работу	120
Конец первого часа	70
Конец второго часа	20
Конец третьего часа	0

А теперь рассмотрим следующую ситуацию. Имеется обслуживающее устройство, которому для обслуживания клиента требуется две минуты. Каждые пять минут на устройство поступает новый клиент. Когда устройство начало работу, перед ним была очередь из шести клиентов, а первый «новый» клиент появился через минуту. Обозначим через $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ клиентов, которые находились в очереди в начале работы устройства, а через c_1, c_2, c_3 и т.д. – «новых» клиентов в порядке возрастания индексов. На луче, изображенном ниже, указаны времена их прибытия и ухода.



Мы видим, что c_5 – первый клиент, который не застал у обслуживающего устройства очереди. Для того чтобы обслужить очередь, потребовалось 20 минут. (Имеется в виду, что очередь состоит из ожидающих клиентов и клиентов, находящихся в стадии обслуживания)

Можно догадаться, что изображенный выше луч с временами прибытия и ухода для большинства подобных задач окажется очень неудобным. Поэтому для получения нужной информации следует выбирать другую модель.

Пусть для описанного выше процесса c_{n+1} обозначает первого клиента, который не обнаруживает очереди у обслуживающего устройства. Это означает, что оно к этому моменту обслужило уже $(n+6)$ клиентов. Общее время в минутах, которое потребовалось для обслуживания этих $(n+6)$ клиентов, равно $(n+6)2$.

Однако к тому моменту, когда поступает $(n+1)$-й клиент, устройство уже действовало $(5n+1)$ минут. Таким образом, должны выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} &(n+6)\cdot 2 \le 5n+1 \\ &-3n \le -11 \qquad\qquad (1) \\ &n \ge \frac{11}{3} \end{aligned}$$

Надо заметить, что n должно быть целым числом. К тому же важно найти первого клиента, который поступил на устройство и не нашел очереди. Таким образом, нужно найти наименьшее число n, удовлетворяющее неравенству (1). Отсюда следует, что $n=4$ и, таким образом, пятый клиент c_5 является первым клиентом, который нашел устройство свободным. Общее время, требующееся для ликвидации очереди, - это просто время, необходимое для обслуживания 6+4=10 предыдущих клиентов, которое, очевидно, равно 20 минут.

Теперь можно обобщить описанный процесс. Обозначим через N число клиентов в очереди перед началом работы обслуживающего устройства. Пусть S – время, требующееся для обслуживания одного клиента, а T – интервал между прибытием клиентов. Пусть, далее, f обозначает время между началом работы устройства и прибытием первого нового клиента, $0 \leq f \leq T$.

Для того, чтобы очередь исчезла, должно выполняться условие $T>S$. Если $T<S$, очередь будет просто продолжать расти. Например, станок обрабатывает 100 деталей в час и отправляет их для дальнейшей обработки на станок, который может обработать лишь 60 деталей в час. При $T=S$ очередь будет сохраняться, а, если N не равно 0, она никогда не исчезнет.

Пусть c_{n+1} - первый клиент, прибывший на свободное обслуживающее устройство. Это означает, что оно обслужило уже $(n+N)$ клиентов. Общее время обслуживания этих клиентов равно $(n+N)S$.

Однако когда прибывает $(n+1)$-й клиент, время работы устройства описывается выражением $nT + f$.

Следовательно, должны выполняться неравенства

$$(n+N)S \leq nT + f$$

$$NS - f \leq n(T\text{-}S)$$

$$\frac{NS-f}{T-s} \leq n \qquad (2)$$

(При составлении модели было использовано неравенство $T>S$) Таким образом, n – это наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству (2). Первый клиент, который прибывает на обслуживающее устройство, - это c_{n+1}, а общее время, требующееся для исчезновения очереди, описывается выражением $(n+N)S$.

Некоторые частные случаи

В предыдущей главе была составлена простейшая математическая модель для очереди. А теперь рассмотрим некоторые частные случаи для очереди и попробуем составить математические модели.

Задача 1. Предположим, что не одно, а два обслуживающих устройства обслуживают одну очередь и каждому из этих устройств требуется время S для обслуживания клиента. В случае, когда $0 \leq f \leq T$, попробуем определить первого клиента, который не застанет очереди перед обслуживающим устройством (c_{n+1}), и время, которое потребуется для ликвидации очереди.

Допустим, что устройства начали работу одновременно, следовательно, обслуживание первых двух клиентов началось и закончилось одновременно. Тогда время обслуживания этих двух клиентов будет равно $2 \cdot \frac{S}{2}$ то есть S. Тогда общее время обслуживания очереди с четным количеством клиентов (в этом случае либо n и N – четные, либо оба числа нечетные) будет равно

$$\frac{(n+N)S}{2}$$

Если же $(n+N)$ – число нечетное, то время обслуживания такой очереди совпадет со временем обслуживания очереди с четным количеством клиентов, равным $(n+N)+1$. Таким образом, время обслуживания очереди с нечетным числом клиентов найдем по формуле

$$\frac{(n+N+1)S}{2}$$

Среднее время обслуживания одного клиента будет равно $\frac{S}{2}$. Тогда количество клиентов, прибывших после начала работы устройства и стоящих в очереди, найдем с помощью выражения

$$\frac{N\frac{S}{2}-f}{T-\frac{S}{2}} \leq n$$

Первый клиент, который не найдет очереди, будет $(n+1)$-m.

Задача 2. Сколько времени будет ждать окончания своего обслуживания произвольный заданный клиент? (Т.е. нужно найти, сколько времени пройдет с момента прихода некоторого n-ного клиента до конца его обслуживания в обобщенном случае $0 \leq f \leq T$).

Допустим, к обслуживающему устройству подошел некоторый клиент c_n. Перед ним в очереди стоят клиенты $N+(n-1)$. Время от начала работы устройства до момента прихода данного клиента будет описываться формулой $((n-1)T+f)$. Общее время, требующееся для исчезновения очереди, равно $(n+N)S$. Несложно найти, сколько времени клиент будет ждать окончания своего обслуживания:

$(n+N)S-(n-1)T-f$

Задача 3. Все решенные выше задачи рассматривались в обобщенном случае, когда $0 \leq f \leq T$. Что же произойдет, если $f \geq T$?

Если $f \geq NS$, то c_1 не обнаружит очереди, нахождение n не имеет смысла. Надо предположить, что $f<NS$.

Если $f \geq T$, то тогда f можно разложить на сумму $kT+f$, где f – целое число, меньшее T, другими словами, f – остаток от деления f на T.

Если подставлять в ранее выведенную формулу (2) для нахождения n, получится, что в частном случае n будет меньше, чем в обобщенном, на k единиц.

При $0 \leq f \leq T$ n будет максимальным, поэтому все формулы выводились именно в этом случае. Тем не менее, при решении задач можно подставлять любое f (меньшее NS), т.к. выведенные формулы являются математическими моделями для простейшего случая очереди.

Глава 3

Использование элементарной модели очереди в практических целях

В данной работе были составлены математические модели для нескольких частных случаев очереди. Теперь попробуем применить выведенные формулы на практике.

На телефонном заводе существует сборочный цех. Рассмотрим две последовательные операции: установка микрофонов (один рабочий выполняет эту работу за 30 секунд) и сборка трубки (один рабочий выполняет эту работу за 40 секунд, следовательно, нужно двое рабочих, которые будут выполнять ее за 20 секунд). Новые детали прибывают через каждые 30 секунд.

Допустим, один их рабочих, выполняющих сборку трубки, опоздал на один час. Нужно найти номер первой телефонной трубки (далее - деталь), не заставшей очереди, и время, требующееся для ликвидации очереди.

1 этап: Нахождение N. Если T=30 секунд, то за один час (3600 секунд) на сборку трубки поступило $\frac{3600}{30} = 120$ деталей. Так как рабочий был один, то его S=40 секунд. За один час он смог собрать $\frac{3600}{40} = 90$ деталей. Следовательно, N = 120-90 = 30 деталей.

2 этап: Нахождение номера первой детали, не нашедшей очереди (c_{n+1}), и общего времени, потребовавшегося для ликвидации очереди. Итак, $N=30$ дет., $S=20$ сек., $T=30$ сек. Время $f=0$. Используя неравенство $n \geq \frac{NS-f}{T-S}$, получим

$$n \geq \frac{30*20-0}{30-20}$$

$$n \geq 60$$

Отсюда найдем номер первой детали, не заставшей очереди:

$$c_{n+1} = 30+60+1 = 91$$

Найдем общее время:

$$(n+N)S = (60+30)20 = 1800$$

1800 сек. = 30 минут.

Ответ: потребуется времени 30 минут, телефонная трубка №91 застанет «обслуживающее устройство свободным».

Используя выражение $(n+N)S - (n-1)T - f$, найдем, сколько времени пройдет от поступления детали №51 до конца ее обслуживания:

$(51+30)20 - (51-1)30 - 0 = 120$ *(сек.)*

Ответ: 51-я по счету телефонная трубка будет стоять в очереди в течение 2 минут.

Теперь допустим, что для скорейшей ликвидации образовавшейся очереди на помощь сборочному цеху было послано двое рабочих. Таким образом, рабочих, собирающих трубки, стало четверо, т.е. в 2 раза больше.

Общее время, которое потребуется для ликвидации очереди, найдем с помощью выражения $\frac{(n+N)S}{2}$ (т.к. количество деталей, стоящих в очереди, выражается четным числом). Общее время составит 900 секунд, или 15 минут.

Чтобы найти номер первой детали (c_{n+1}), не заставшей очереди, воспользуемся неравенством $\frac{N\frac{S}{2}-f}{T-\frac{S}{2}} \leq n$. В результате получится, что n = 15, а деталь, которая не найдет очереди будет 46-й ($c_{n+1} = 30+15+1 = 46$).

Заключение

При осуществлении данной исследовательской работы был использован метод математического моделирования. Сам процесс математического моделирования можно подразделить на четыре основных этапа:
I этап: Формулирование законов, связывающих основные объекты модели, т.е. запись в виде математических терминов сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели. В данном случае моделью было неравенство.
II этап: Исследование математических задач, к которым приводят математические модели. В нашем случае это решение неравенства.
III этап: Корректировка принятой модели согласно критерию практики, т.е. выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений.
IV этап: Последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изученных явлениях и модернизация модели.

Результатом проделанного исследования являются доказанные неравенства, связывающие основные величины математической модели очереди и решенные на их основе практические задачи. В соответствии с этим можно сделать вывод, что решение экономической задачи уравновешивания затрат на содержание обслуживающих устройств и затрат на пребывание в очереди возможно решить с помощью математического моделирования.

Список литературы

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М., Наука, 1987.
2. Горстко А.Б. Познакомьтесь с математическим моделированием. – М., Знание, 1991.
3. Коршунова Н.И., Плясунов В.С. Математика в экономике. – М., Вита-пресс, 1996.
4. Слойер К. Математические фантазии. Приложения элементарной математики. – М., Мир, 1993.