

Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

**Математическое моделирование отталкивания при катании на
коньках**

Афанасенко Кирилл Андреевич,
11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,
Шабрыкина Наталья Сергеевна,
к.ф-м.н., доцент ПНИПУ.

Пермь. 2015.

Содержание

Введение	3
Концептуальная постановка задачи	5
Математическая постановка	6
Решение и анализ результатов.....	10
Результаты	12
Заключение	17
Список литературы	18

Введение

История катания на коньках насчитывает уже более 3000 лет. Первоначально в качестве лезвий коньков использовались выровненные и заточенные кости, привязываемые к подошвам обуви. Движение конька при этом было не только прямым, но и боковым, с проскальзыванием. Современная техника катания стала доступна только с появлением стальных коньков с остро заточенными кромками. Лезвия таких коньков режут лёд, а не скользят по его поверхности. Переход к новой технике, принципиально не изменившейся до настоящего времени, осуществили голландцы, открывшие новый способ движения примерно в XIII—XVI веках. Сейчас катание на коньках делится на 3 вида спорта: фигурное катание, спортивные танцы на льду и конькобежный спорт. Основная идея фигурного катания заключается в передвижении спортсмена или пары спортсменов на коньках по льду с переменами направления скольжения и выполнением дополнительных элементов под музыку. Танцы на льду внешне похожи на парное фигурное катание, но в них запрещены выбросы, поддержки партнерши выше головы партнёра, подкрутки, а также другие так называемые «акробатические» элементы. В конькобежном спорте же необходимо как можно быстрее преодолевать определённую дистанцию на ледовом стадионе по замкнутому кругу. Но все эти виды спорта объединяет одна вещь: в любом из них нужно уметь равномерно набирать скорость, что, в свою очередь, зависит от правильной техники отталкивания. Итак, любое отталкивание можно разделить на четыре фазы:

Первая фаза. Спортсмен отклоняется от вертикального положения тела, в то время как лезвия всей своей длиной касаются льда. Это можно назвать подготовительным этапом перед движением, так называемым контр движением. Во многих случаях, например, в тех, где рассматривается вертикальный прыжок, можно увидеть, что если перед прыжком было кратковременное контр движение, то это приводило к немалому увеличению высоты прыжка.

Вторая фаза состоит из движения, которое начинается в момент разгибания коленного сустава и заканчивается тогда, когда лезвие конька отталкивается ото льда. Эта фаза характеризуется резким разгибанием ноги в коленном суставе.

Третья фаза начинается со скольжения на опорной ноге, которое явилось следствием отталкивания во второй фазе. Нижние суставы ноги ещё согнуты, в то время как суставы в колене начинают разгибаться до того момента, когда нога распрямится в тазобедренном суставе.

Четвертая фаза заключается в возврате толчковой ноги в начальное положение. Эта фаза важна тем, что она составляет большую часть от всего цикла отталкивания.

Эта фаза повторяется, в результате спортсмен развивает скорость, которая зависит не только от начального положения стопы, но и от положения самой ноги и даже тела, от скорости распрямления ноги при движении, а также от многих других параметров. Безусловно, некоторые из них имеют большее влияние, а некоторые из параметров можно вообще не учитывать. И любому тренеру нужно понимать, что именно нужно улучшить в технике. Поэтому и цель данной работы - узнать, какие именно параметры больше всего влияют на качество отталкивания, а также выяснить, каким образом можно улучшить технику отталкивания, нужную для увеличения скорости.

Концептуальная постановка задачи

В задачах такого типа часто тело человека представляется как совокупность нескольких сегментов, которые представляют собой абсолютно твёрдые стержни, скрепленные шарнирами в местах суставов. В данной задаче целесообразно использовать модель, состоящую из четырех сегментов: стопа, голень, бедро и остальное туловище, включающее в себя голову и руки. Будут применены следующие допущения:

1. Массы и моменты инерции этих стержней равны соответственным характеристикам тела и известны в литературе.
2. Ограничений на подвижность суставов нет.
3. Сегменты двигаются в одной плоскости.
4. Считаем, что коэффициент трения коньков о лёд известен и не изменяется в ходе задачи. Считаем поверхность льда ровной.
5. Не учитываем силу сопротивления воздуха, т.к. при описании отталкиваний в хоккее и фигурном катании скорости малы, поэтому сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала. Но это недопустимо для конькобежного спорта.

Математическая постановка

Тело человека рассматривается как совокупность нескольких сегментов, для удобства каждый из них пронумерован. Тогда на рисунке тела человека будут обозначения:

A_i - точки соединения частей тела.

C_i - центр масс i -той части тела.

α_i - угол между вертикалью и i -той частью тела.

l_i - длина i -той части тела.

$A_i A_{i-1}$ - название i -той части тела.

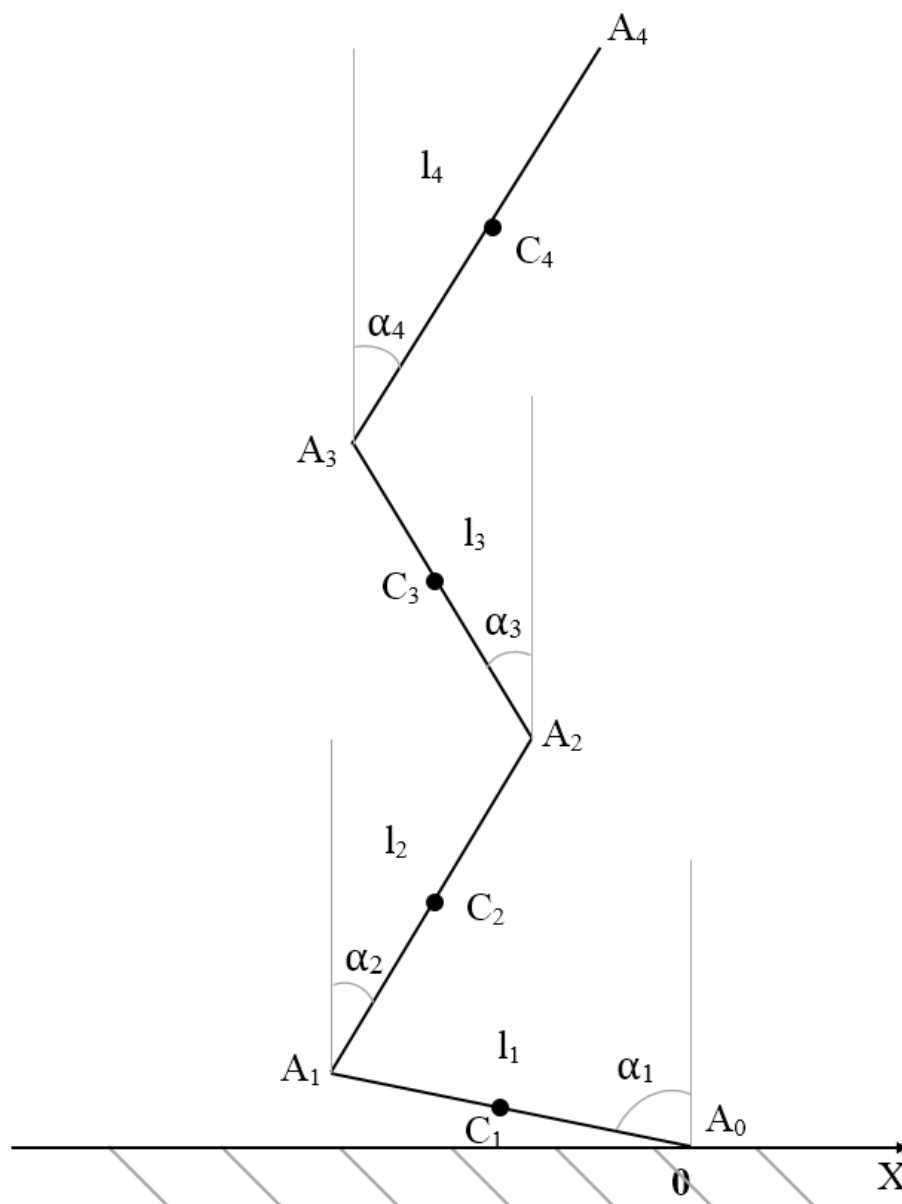


Рис. 1. Схема тела человека.

Необходимо составить уравнение центра масс для тела человека (см. рис. 1), для этого используется формула для нахождения координат центра масс:

$$X_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} . \quad (1)$$

m_i - это масса i -той части системы, а x_i - это абсцисса центра масс i -той части системы. Аналогичная формула будет использоваться для нахождения ординаты центра масс.

Необходимо найти координаты центра масс каждой из частей тела:

$$X_{c1} = -r_1 \sin \alpha_1 . \quad (2)$$

$$X_{c2} = -l_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2 . \quad (3)$$

$$X_{c3} = -l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 - r_3 \sin \alpha_3 . \quad (4)$$

$$X_{c4} = -l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 - l_3 \sin \alpha_3 + r_4 \sin \alpha_4 . \quad (5)$$

$$Y_{c1} = r_1 \cos \alpha_1 . \quad (6)$$

$$Y_{c2} = l_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2 . \quad (7)$$

$$Y_{c3} = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2 + r_3 \cos \alpha_3 . \quad (8)$$

$$Y_{c4} = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2 + l_3 \cos \alpha_3 + r_4 \cos \alpha_4 . \quad (9)$$

Теперь необходимо узнать координаты центра масс всего тела, для этого нужно подставить уравнения (2), (3), (4) и (5) в уравнение (1), тем самым можно найти абсциссу центра масс:

$$X_c = \frac{X_{c1} m_1 + X_{c2} m_2 + X_{c3} m_3 + X_{c4} m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} . \quad (10)$$

Также необходимо узнать ординату центра масс, для этого нужно подставить уравнения (6), (7), (8) и (9) в уравнение (1):

$$Y_c = \frac{Y_{c1} m_1 + Y_{c2} m_2 + Y_{c3} m_3 + Y_{c4} m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} . \quad (11)$$

Формулы (10) и (11) используются для расчёта координат положения центра масс, поэтому X_c и Y_c будут являться координатами центра масс тела человека (см.рис.1).

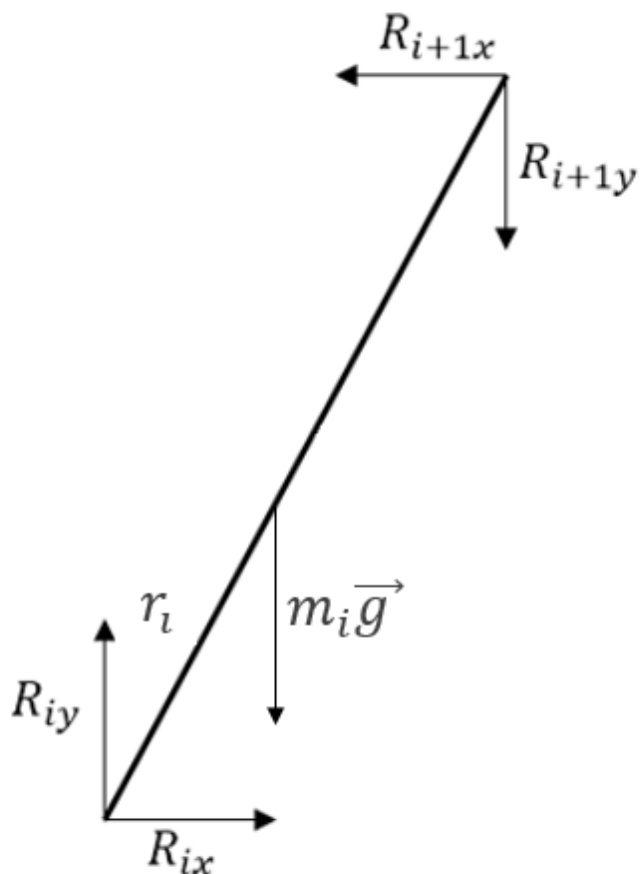


Рис. 2. Изображение сил, действующих на сегмент.

На рисунке 2 $r_i = l_i - C_i$ обозначает расстояние от начала сегмента до точки приложения силы тяжести.

Теперь необходимо записать II закон Ньютона для звена (см.рис.2) в общем виде:

$$\vec{R}_{ix} + \vec{R}_{i+1x} + \vec{R}_{iy} + \vec{R}_{i+1y} + m_i \vec{g} = m_i \vec{a}_i \quad (12)$$

Где m - масса сегмента, g – ускорение свободного падения, R – сила реакции опоры шарнира (точки соединения сегментов), a – ускорение сегмента.

Теперь можно спроецировать (12) на ось Ox (ось направлена в сторону направления ускорения):

$$R_{ix} - R_{i+1x} = m_i \ddot{x}_i \quad (13)$$

Спроецировать (12) на Oy (ось направлена вверх):

$$R_{iy} - R_{i+1y} - m_i g = m_i \ddot{y}_i \quad (14)$$

Данные формулы справедливы для всех сегментов, не считая последнего. Там нет сил

R_{i+1y} и R_{i+1x} .

Формулы для каждого из сегментов составляют систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{1x} - R_{2x} = m_1 \ddot{x}_1 \\ R_{2x} - R_{3x} = m_2 \ddot{x}_2 \\ R_{3x} - R_{4x} = m_3 \ddot{x}_3 \\ R_{4x} = m_4 \ddot{x}_4 \\ R_{1y} - R_{2y} - m_1 g = m_1 \ddot{y}_1 \\ R_{2y} - R_{3y} - m_2 g = m_2 \ddot{y}_2 \\ R_{3y} - R_{4y} - m_3 g = m_3 \ddot{y}_3 \\ R_{4y} - m_4 g = m_4 \ddot{y}_4 \end{array} \right.$$

Отсюда можно выразить силы:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{1x} = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + m_3 \ddot{x}_3 + m_4 \ddot{x}_4 \\ R_{2x} = m_2 \ddot{x}_2 + m_3 \ddot{x}_3 + m_4 \ddot{x}_4 \\ R_{3x} = m_3 \ddot{x}_3 + m_4 \ddot{x}_4 \\ R_{4x} = m_4 \ddot{x}_4 \\ R_{1y} = m_1 (\ddot{x}_1 + g) + m_2 (\ddot{x}_2 + g) + m_3 (\ddot{x}_3 + g) + m_4 (\ddot{x}_4 + g) \\ R_{2y} = m_2 (\ddot{x}_2 + g) + m_3 (\ddot{x}_3 + g) + m_4 (\ddot{x}_4 + g) \\ R_{3y} = m_3 (\ddot{x}_3 + g) + m_4 (\ddot{x}_4 + g) \\ R_{4y} = m_4 (\ddot{y}_4 + g) \end{array} \right. \quad (15)$$

Решение и анализ результатов

Задача была решена численно с помощью табличного процессора. Был использован Microsoft Office Excel 2013, но можно использовать Open Office Calc, т.к. он бесплатен. Первым делом были измерены углы наклона каждого сегмента опорной ноги на каждом временном промежутке. График изменения положения тела от времени был взят из исследовательской работы.

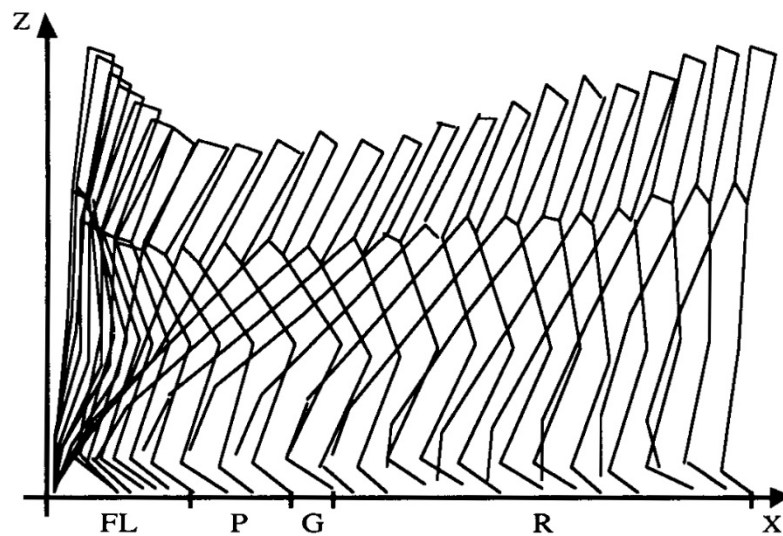


Рис.3. Движение фигуриста.

Для этого был использован графический редактор Adobe Photoshop CS6. С помощью инструмента «линейка» были измерены углы каждого из сегментов. Полученные углы были переведены в радианы и приведены в таблице 1.

Таблица 1. Измерение углов.

время, с	0,06	0,13	0,19	0,25	0,31	0,38	0,44	0,50
ступня, р	0,907571	0,795870	0,844739	0,951204	0,958186	0,937242	0,958186	0,994838
голень, р	0,211185	0,293215	0,315905	0,314159	0,328122	0,322886	0,314159	0,317650
бедро, ра	0,115192	0,193732	0,280998	0,328122	0,340339	0,338594	0,455531	0,549779
туловище	0,195477	0,249582	0,267035	0,312414	0,343830	0,474730	0,457276	0,527089
время, с	0,56	0,63	0,69	0,75	0,81	0,88	0,94	1,00
ступня, р	0,923279	0,900590	0,998328	0,860447	0,842994	0,973894	1,007055	0,958186
голень, р	0,274017	0,340339	0,453786	0,425860	0,371755	0,436332	0,453786	0,450295
бедро, ра	0,600393	0,596903	0,575959	0,493928	0,350811	0,333358	0,300197	0,317650
туловище	0,514872	0,509636	0,450295	0,507891	0,490438	0,466003	0,424115	0,422370
время, с	1,06	1,13	1,19	1,25	1,31	1,38	1,44	
ступня, р	1,022763	1,033235	0,869174	0,966912	1,129228	0,958186	0,935496	
голень, р	0,417134	0,387463	0,349066	0,298451	0,268781	0,207694	0,143117	
бедро, ра	0,261799	0,167552	0,123918	0,108210	0,066323	0,005236	0,059341	
туловище	0,373500	0,356047	0,336849	0,315905	0,232129	0,195477	0,186750	

Используя углы наклона сегментов, были рассчитаны координаты центров масс сегментов в каждый момент времени по формулам (2)-(9), что позволило рассчитать координаты центра масс всего тела в каждый момент времени по формулам (10) и (11). После этого были найдены ускорения и скорости для центров масс каждого из сегментов по формулам, связывающим ускорения и скорости с координатами:

$$\dot{x}_{ci}^j = \frac{x_{ci}^j - x_{ci}^{j-1}}{\Delta t}, \quad \dot{y}_{ci}^j = \frac{y_{ci}^j - y_{ci}^{j-1}}{\Delta t}, \quad i = 2..n$$

$$\ddot{x}_{ci}^j = \frac{x_{ci}^{j-1} - 2x_{ci}^j + x_{ci}^{j+1}}{\Delta t^2}, \quad \ddot{y}_{ci}^j = \frac{y_{ci}^{j-1} - 2y_{ci}^j + y_{ci}^{j+1}}{\Delta t^2}, \quad i = 2..n \quad (16)$$

Нахождение ускорения позволило выразить силы R для в каждый момент времени, подставив (16) в (15). При этом вычисления для первого шага по времени для сил не проводятся, т.к. ускорение можно найти только для второго шага по времени.

После этого были построены графики:

1. Зависимость координаты X центра масс от времени.
2. Зависимость координаты Y центра масс от времени.
3. Зависимость скорости центра масс от времени.
4. Зависимость каждой из сил R_i от времени.

Результаты

В результате вычисления координат на каждом шаге по времени был построен график зависимости координат от времени, что позволило увидеть, как меняется положение центра масс тела человека в ходе отталкивания.

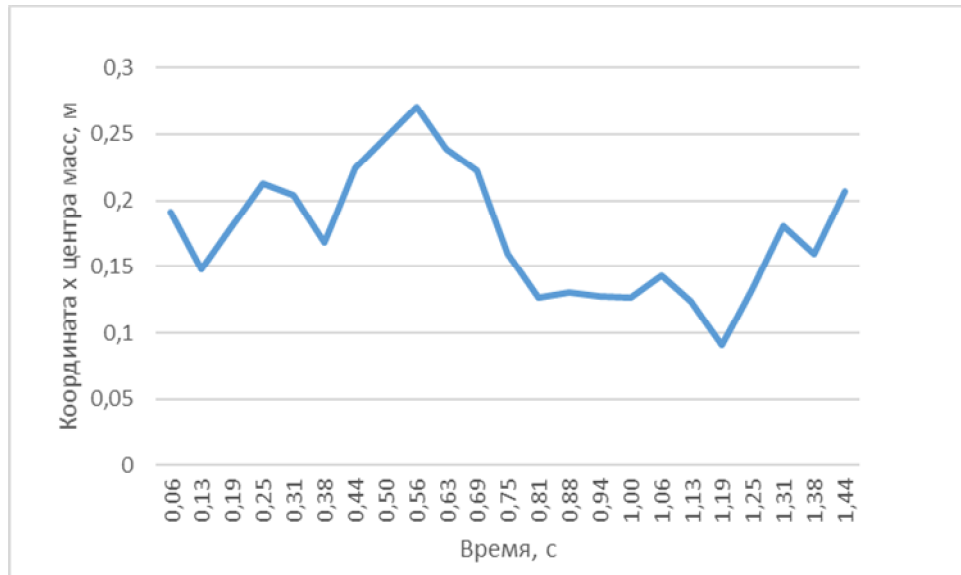


Рис.4. Зависимость координаты x центра масс от времени, $X_c(t)$.

Среднее значение $X_c=0,17\text{м}$

При анализе движения тела(рис.3) и графика зависимости $X_c(t)$, можно увидеть, что наибольшая координата X центра масс при самом низком положении тела. При этом корпус наиболее сильно наклонен вперед, а угол между бедром и вертикалью максимальный. Т.е. решающее значение для координаты X центра масс играет именно положение бедра и корпуса. Скачкообразное изменение координаты на некоторых шагах по времени в большей степени обусловлено недостаточной точностью измерения углов, также имеет значение точность рисунка движения тела.

Среднее значение $0,17\text{ м}$, что говорит о том, что центр масс при отталкивании в среднем смещен на 17 см относительно точки касания конька со льдом.

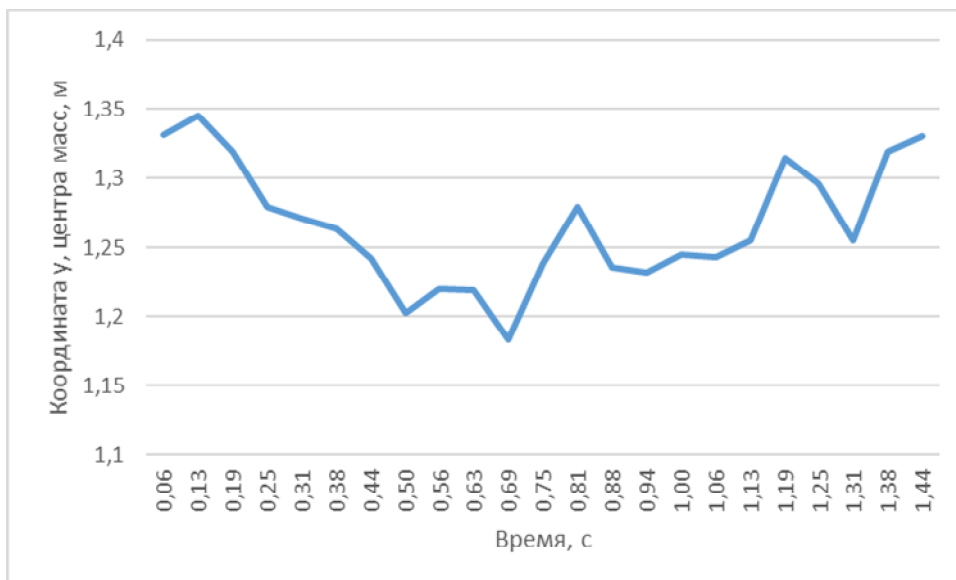


Рис.5. Зависимость координаты у центра масс от времени, $Y_c(t)$.

Среднее значение $Y_c=1,26$ м

Зависимость координаты Y центра масс от времени показывает изменение положения центра масс, при этом график по своей форме похож на изменение положения верхней точки тела фигуриста во время отталкивания (рис.3). Но при этом график не похож, например, на изменение положения коленного сустава. Это значит, что на положение центра масс в большей степени влияет положение центра масс самого тела, чем положение центра масс голени, ступни или бедра. Скачкообразное изменение координаты на некоторых шагах по времени в большей степени обусловлено недостаточной точностью измерения углов, также имеет значение точность рисунка движения тела.

Среднее значение 1,26 м, т.е. в среднем при отталкивании центр масс тела человека находится на высоте 1,26 м от поверхности льда.

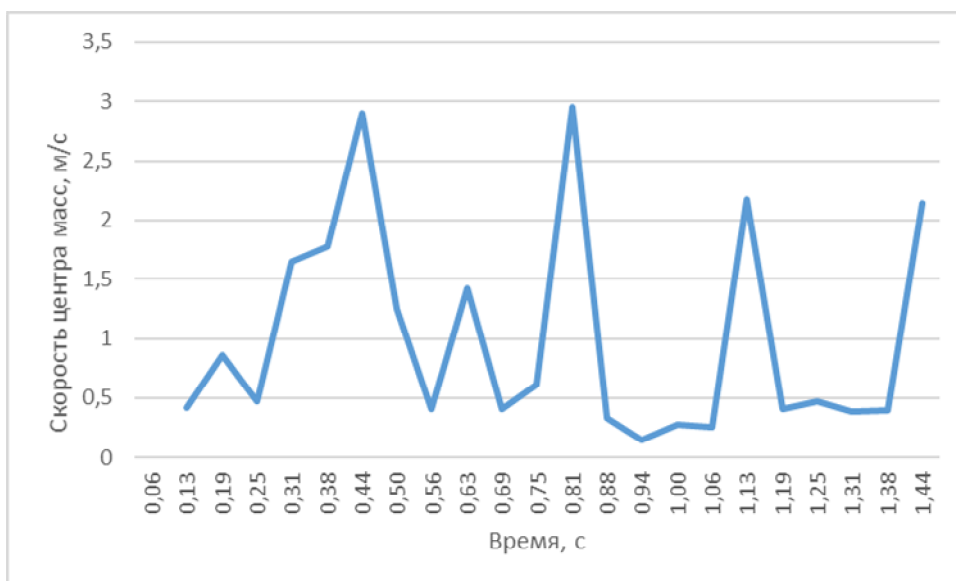


Рис.6. Зависимость модуля скорости центра масс от времени, $V_c(t)$.

- Среднее значение модуля скорости центра масс 1 м/с

Далее была построена зависимость модуля скорости центра масс от времени. На графике видно, что самые резкие изменения скорости происходят с 0,25 по 0,56, с 0,75 по 0,88, с 1,06 по 1,19 секунды. Если посмотреть на графики зависимости координат от времени (Рис.4) и (Рис.5), то в первую половину этих интервалов времени обе координаты наиболее быстро изменяют своё значение. Это приводит к резкому увеличению модуля скорости. Во вторую же половину этого интервала одна из координат изменяется медленнее, а потом практически перестаёт меняться. Что приводит к такому скачкообразному графику зависимости скорости от времени.

По полученным зависимостям сил от времени были построены графики зависимости каждой из сил от времени. Силы были рассчитаны в долях от веса тела человека для удобства. Сила R1 – наибольшая, т.к. R1 – сила реакции опоры, это означает, что в неё входят силы реакции каждого сегмента, а также вес всех сегментов. Сила R4 – наименьшая, т.к. это сила реакции тазобедренного сустава, в которую входит только вес тела. Поскольку масса корпуса в несколько раз больше, чем масса ног, силы R1 и R4 отличаются незначительно. Если посмотреть на рис.6 и рис.7, то можно увидеть, что резкое увеличение или уменьшение сил обусловлено увеличением или уменьшением скорости центра масс, т.к. чем больше изменение скорости, тем больше модуль ускорения, что по II закону Ньютона приводит к изменению сил.

Среднее значение силы реакции опоры равно 1197 Н.

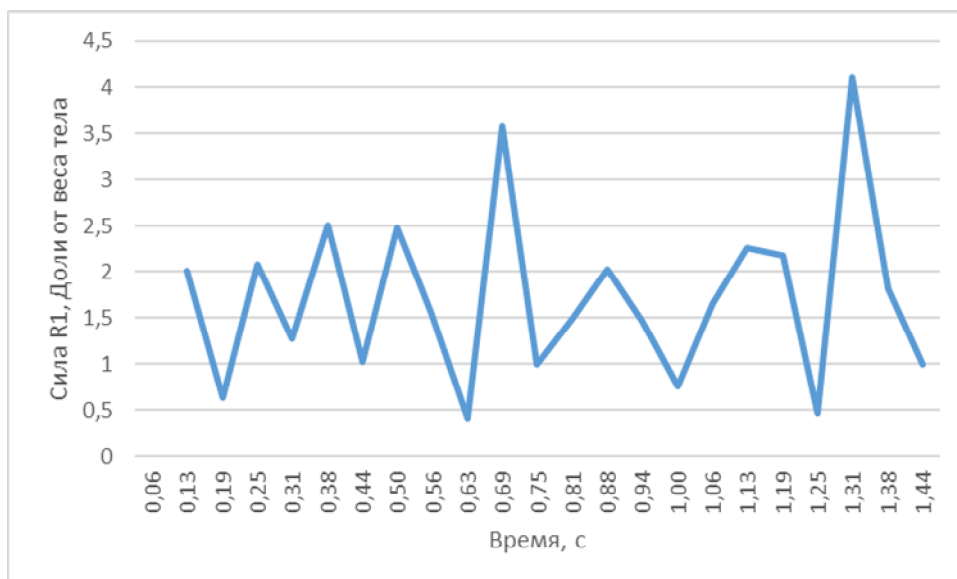


Рис.7. Зависимость силы реакции опоры первого сегмента от времени, R1(t).

Среднее значение R1=1,71 долей.

Среднее значение силы реакции в голеностопном суставе равно 1183 Н при массе тела человека 70кг. Это практически неощутимая нагрузка на данный сустав, поэтому опасность получения травм минимальна.

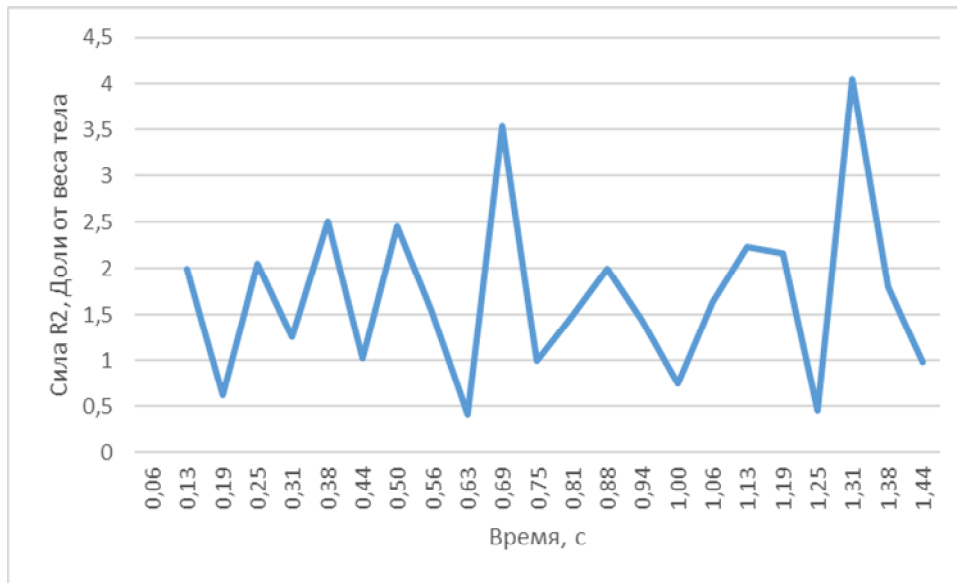


Рис.8. Зависимость силы реакции в голеностопном суставе от времени, $R_2(t)$.

Среднее значение $R_2=1,69$ долей.

Среднее значение силы реакции коленного сустава составляет 1134 Н, что является небольшой нагрузкой для данного сустава, однако есть небольшая опасность получения травм, но только при очень длительных тренировках, т.к. могут появиться микротрещины, что может привести к различным травмам.

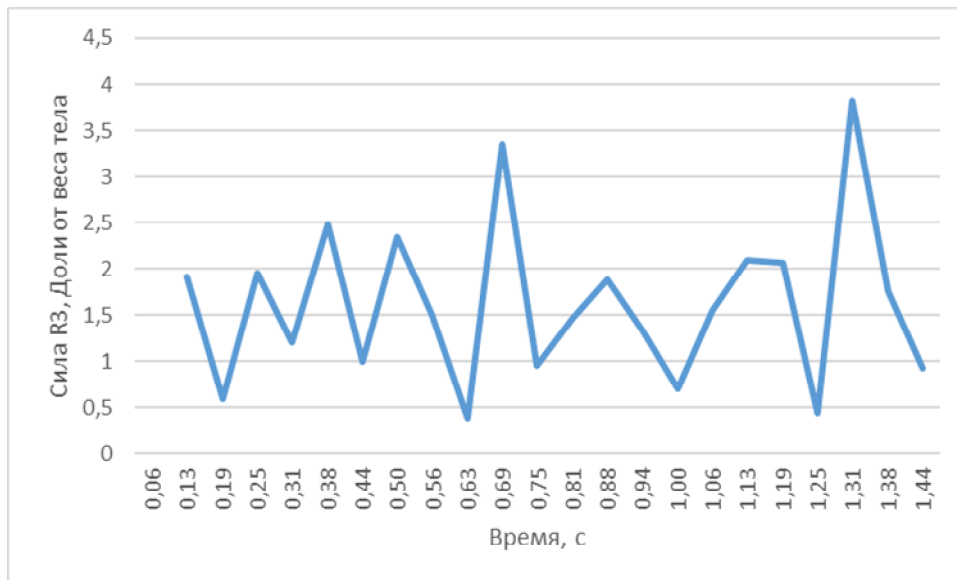


Рис.9. Зависимость силы реакции в коленном суставе от времени, $R_3(t)$.

Среднее значение $R_3=1,62$ долей.

Среднее значение силы, действующей на тазобедренный сустав равно 938 Н, что является достаточно маленькой нагрузкой для этого сустава и вообще не ощущается, поэтому опасности получения травм нет.

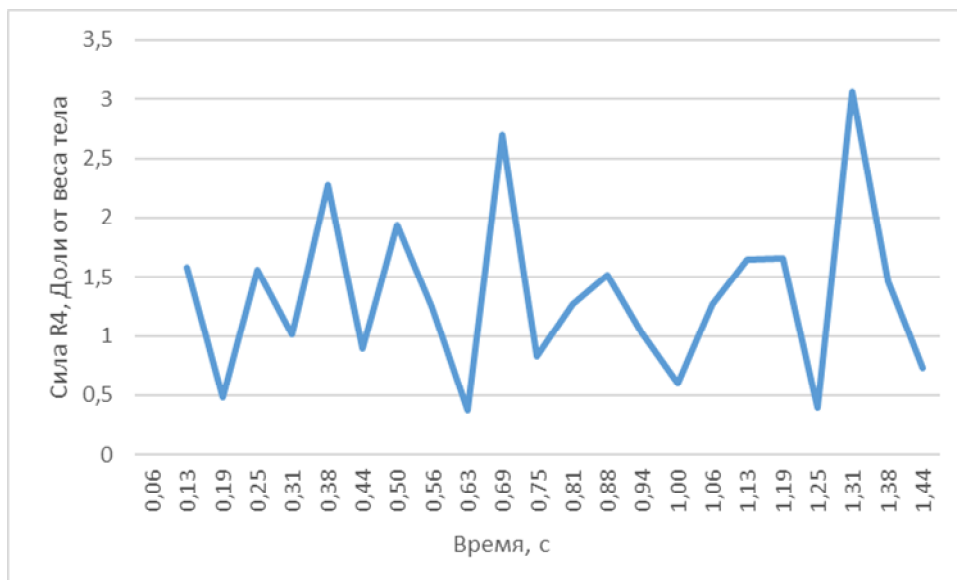


Рис.10. Зависимость силы реакции в тазобедренном суставе от времени, $R_4(t)$.

Среднее значение $R_4=1,34$ долей.

Заключение

В работе была построена модель процесса отталкивания при катании на коньках. Были измерены углы наклона ступни, голени, бедра и самого тела во время отталкивания. С помощью данной модели были выявлены зависимости скорости центра масс от времени, координат центра масс от времени, сил реакций в суставах и силы реакции опоры от времени. Все эти параметры позволяют описать движение фигуриста, что может помочь в улучшении качества отталкивания путём изменения параметров задачи. Зависимости сил реакций в суставах от времени могут помочь определить, в какой момент эти суставы будут испытывать наибольшую нагрузку, что даёт возможность предупредить получение травм при катании на коньках.

Для улучшения точности данной модели стоит найти более точные схемы движения человека, а также точнее измерить углы в движении.

Список литературы

1. Haguenaue M., Legreneur P., Colloud F., Monteil K. Characterization of the Push-off in Ice Dancing: Influence of the Support Leg Extension on Performance // Journal of Human Movement Studies. 2002. №43.
2. Мякишев Г.Я. Физика. Механика. – М., 2010.