Краевая научно-практическая конференция

учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

Математическое моделирование первого и второго законов Кеплера

Бурдейная Мария Андреевна,

10 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,

Волегов Павел Сергеевич,

к.ф.-м.н., доцент ПНИПУ.

Пермь. 2015.

Оглавление

Введение

Несмотря на высокий уровень астрономических сведений народов древнего Востока, их взгляды на строение мира ограничивались непосредственными зрительными ощущениями.

Согласно представлениям древних египтян, Вселенная имеет вид большой долины, вытянутой с севера на юг, в центре ее находится Египет. В Древнем Китае существовало представление, согласно которому Земля имеет форму плоского прямоугольника, над которым на столбах поддерживается круглое выпуклое небо [1].

Европейская астрономия берет начало в Древней Греции. Именно там, в VII – VI вв. до н.э. появились первые дошедшие до нас естественно-научные представления об окружающей Вселенной. Наиболее универсальная система мира была создана в IV в. до н.э. древнегреческим философом Аристотелем (384 – 322 до н.э.). Система Аристотеля была геоцентрической (Геоцентрическая система мира — представление об устройстве мироздания, согласно которому центральное положение во Вселенной занимает неподвижная Земля, вокруг которой вращаются Солнце, Луна, планеты и звёзды [7]). Она содержала пять основных элементов, из которых четыре – земля, вода, воздух и огонь – принадлежали «миру подлунному», а пятый элемент – эфир – «надлунному миру». Из эфира были построены 7 небесных сфер надлунного мира: сферы Солнца, Венеры, Меркурия, Марса, Юпитера, Сатурна и сфера звезд. Все небесные сферы равномерно обращались вокруг Земли – неподвижной и шарообразной [2].

В рамках аристотелевской системы мира древнегреческий ученый Клавдий Птолемей (ок. 87 – 165) дал математическое описание всех известных в то время астрономических явлений. Он поместил в центре Землю, вокруг которой обращались Солнце, Луна и планеты. Они двигались по маленьким кругам – эпициклам, центры которых обращались по круговым орбитам – деферентам – вокруг Земли.

В XVI в. благодаря трудам великого польского ученого Николая Коперника (1473 – 1543) на смену геоцентрической системе мира пришла гелиоцентрическая (Гелиоцентрическая система мира — представление о том, что Солнце является центральным небесным телом, вокруг которого обращается Земля и другие планеты[8]). Коперник отказался от утверждения, что наша планета является центром мира. Видимые движения светил он рассматривал как следствие движения самой Земли. Заход и восход Солнца, звезд, Луны и планет – следствие вращения Земли вокруг своей оси. А видимое движение Солнца среди звезд в течение года – следствие обращения нашей планеты вокруг своей звезды. Земля перестала быть центом мира, а стала «всего лишь» третьей планетой в Солнечной системе.

Гелиоцентрическая система мира позволила оценить размеры Солнечной системы, которые оказались намного больше, чем предполагалось прежде. Менее чем через столетие Тихо Браге (1546 – 1601) проследил движение кометы 1577 г. и показал, то ее орбита пронизала несколько планетных сфер. Уже и Солнце с планетами стали представляться крошечным мирком, затерянным среди бесконечно далеких звезд. Столетием позже Оле Ремер (1644 – 1710) измерил скорость света и нашел ее хотя и очень большой, но вполне соизмеримой с космическими масштабами.

В первой половине XIX в. удалось измерить удаленность ближайших звезд от Солнца, и счет расстояний пошел уже на световые годы и десятки световых лет. Но когда в начале XX в. оценили первое межгалактическое расстояние до ближайшей к нам галактики, туманности Андромеды, оно превысило 1,5 млн. световых лет. Стало ясно, что чем дальше находится изучаемый объект Вселенной, тем более «устаревшие» сведения получают о нем астрономы [2].

Глава 1. Содержательная постановка задачи

История открытия важнейших законов небесной механики И. Кеплером

Иоганном Кеплером (1571 – 1630) были открыты два важнейших закона небесной механики, которые он потом проверил на других планетах, а также на четырех спутниках Юпитера.

Во-первых, как установил и доказал ученый, орбиты всех планет представляют собой эллипсы (Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная [9]). Степень вытянутости орбиты – эксцентриситет – неодинакова у разных планет. Солнце находится в фокусе эллипса. Ближняя к нашему светилу точка орбиты называется перигелием, самая дальняя – афелием. Второй закон Кеплера, названный «законом площадей», гласит: прямая линия, соединяющая планету с Солнцем (радиус-вектор планеты), «заметает» равные площади за одинаковые промежутки времени. Первые два закона Кеплер опубликовал в 1609 г. А спустя 10 лет им был открыт математический закон, связывающий орбитальный период с расстоянием до Солнца: квадраты времен обращения планет (периодов) пропорционален кубам из расстояний от Солнца (больших полуосей орбит).

Три закона Кеплера легли в основу науки о движении небесных тел – небесной механики. Они дали возможность Исааку Ньютону (1643 – 1727) сформулировать закон всемирного тяготения, по которому притягиваются друг к другу все тела во Вселенной [3].

Первый закон Кеплера (1609 г.)

Все планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

На рис. 1 показана эллиптическая орбита планеты, масса которой много меньше массы Солнца. Солнце находится в одном из фокусов эллипса. Ближайшая к Солнцу точка P траектории называется перигелием, точка A, наиболее удаленная от Солнца – афелием. Расстояние между афелием и перигелием – большая ось эллипса.

Почти все планеты Солнечной системы (кроме Плутона) движутся по орбитам, близким к круговым (окружность является частным случаем эллипса) [4].

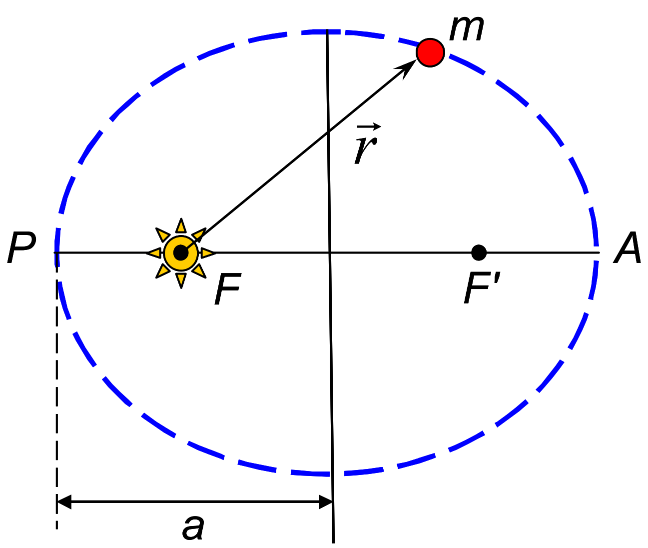

Рис. 1. Эллиптическая орбита планеты массой m << M, a – длина большой полуоси, F и F' – фокусы орбиты.

Второй закон Кеплера (1609 г.)

Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади. Это показано на рисунке 2. Здесь площади секторов MFM', BFB' и DFD' равны. Чем меньше радиус-вектор r, тем больше длина дуги, следовательно, больше орбитальная скорость движения планеты $\vec{v}$. С наибольшей скоростью планета движется в перигелии, с наименьшей – в афелии [6].

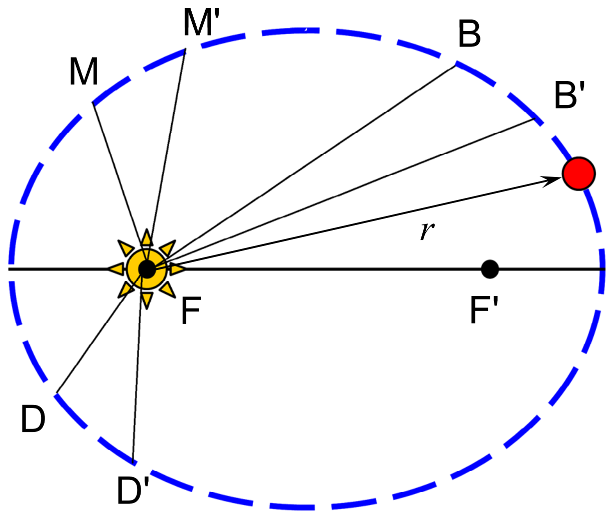

Рис. 2. r – радиус-вектор планеты; F и F' – фокусы орбиты; MFM', BFB' и DFD' – сектора.

Третий закон Кеплера (1619 г.)

Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит: $\frac{T_1^{\,2}}{a_1^{\,3}} = \frac{T_2^{\,2}}{a_2^{\,3}}$

Третий закон Кеплера выполняется для всех планет Солнечной системы с точностью выше 1 %: $\frac{T^2}{a^3} = const$

На рисунке 3 изображены две орбиты, одна из которых – круговая с радиусом R, а другая – эллиптическая с большой полуосью a. Третий закон утверждает, что если $R = a$, то периоды обращения тел по этим орбитам одинаковы [5].

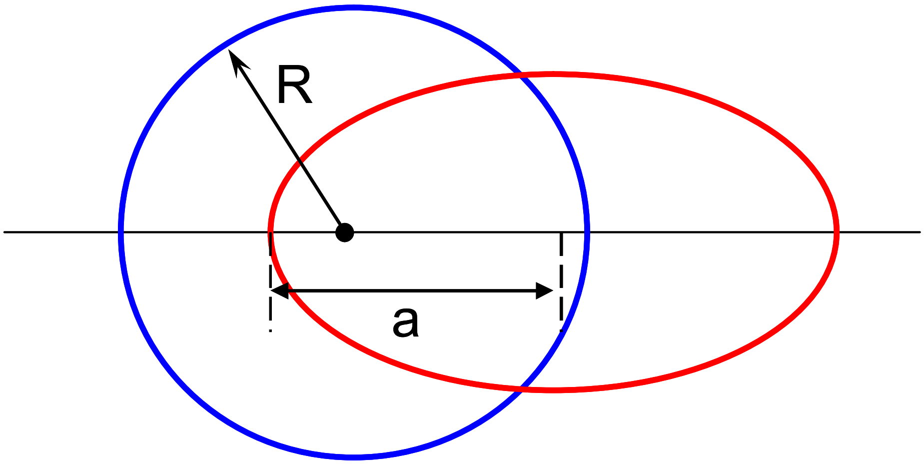

Рис. 3. R – радиус круговой орбиты; a – большая полуось эллиптической орбиты.

Глава 2. Концептуальная постановка задачи

Гипотезы модели:

1. Планета – материальная точка.
Материальной точкой называют тело, формой и размерами которого в данных условиях можно пренебречь. Рассмотрим эту ситуацию на конкретном примере (рисунок 4), для которого выбрана планета Земля.

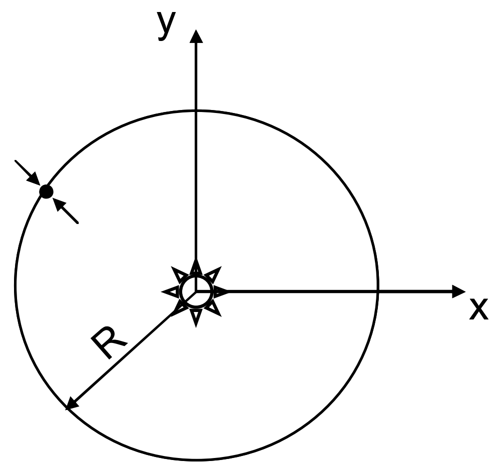

Рис. 4. R – радиус орбиты Земли.

$$R_{орбиты} = 1,5 \cdot 10^8 км, R_{земли} = 6,4 \cdot 10^3 км \Rightarrow R_{земли} \ll R_{орбиты}$$

$\Rightarrow$ Землю, как и любую другую планету, можно считать материальной точкой.

2. Солнце неподвижно и находится в начале координат.
Напишем 3-й закон Ньютона: $F = ma$, из которого следует, что солнце действует на планету с такой же силой, как и планета на солнце: $F_{c \to n} = F_{n \to c}$.
Запишем это же равенство в другом виде: $M_c a_c = M_n a_n$. Т. к. $M_c \gg M_n \Rightarrow a_c \ll a_n$
Следовательно, Солнце можно считать неподвижным телом, находящимся в начале координат.

3. Солнце и планеты взаимодействуют с силой всемирного тяготения (1).

$$F_G = G\frac{M_n M_c}{R^2}, \quad (1)$$

4. Движение происходит в плоскости, содержащей Солнце и планету.

5. Выполняются законы классической механики.

Глава 3. Математическая постановка задачи

Нарисуем прямоугольную координатную ось xOy. Поместим планету в точку с координатами $(x; y)$, а в начало координат (точку $(0;0)$) – Солнце.

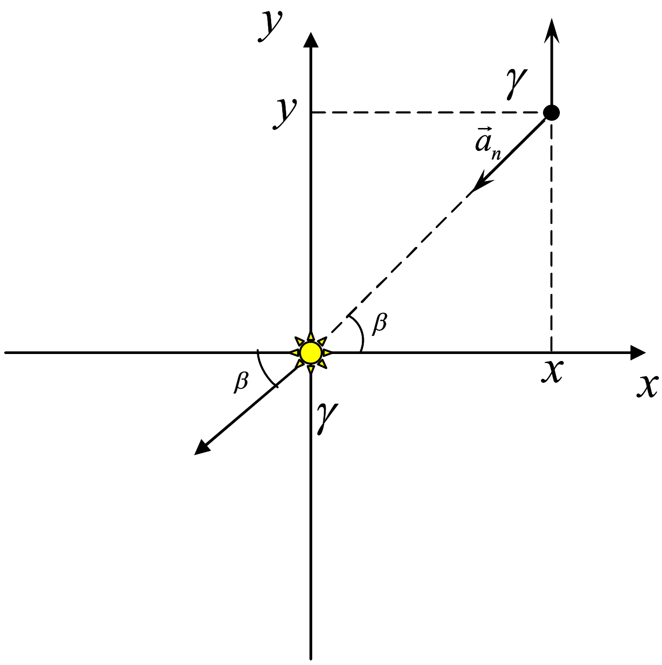

Рис. 5. x, y – координаты планеты, a_n – вектор центростремительного ускорения планеты, β – угол между вектором ускорения планеты и осью Ox, α – угол между продолжением вектор ускорения и осью Ox, γ – угол между вектором ускорения и вектором скорости.

Запишем 2-й закон Ньютона:

$$M_n \vec{a}_n = \vec{F}\ , (2)$$

где $\vec{F}$ – единственная сила, действующая на планету – это Всемирное тяготение, которое рассчитывается по формуле (3):

$$\vec{F} = F_G = G\frac{M_n M_c}{R^2}\ , (3)$$

Запишем формулу для нахождении проекции вектора $\vec{a}_n$ на ось Ox:

$$x : M_n \left(a_n\right)_x = F_G \cos\alpha = F_G \cos\left(180^\circ - \beta\right) = -F_G \cos\beta\ , (4)$$

Где $\cos\beta$ можно рассчитать по формуле (5):

$$\cos\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (5)$$

Радиус-вектор планеты R можно представить как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами x и y, и, следовательно, по теореме Пифагора:

$$R^2 = x^2 + y^2, (6)$$

Заменяем R^2 в формуле закона всемирного тяготения на выражение (6):

$$F_G = G\frac{M_n M_c}{x^2 + y^2}, (7)$$

Из формул (7) и (5) получаем формулу для расчета координаты x в любой момент времени:

$$a_x = -G\frac{M_c}{x^2 + y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (8)$$

Аналогичные преобразования выполним для проекции вектора $\vec{a}_n$ на ось Oy:

$$y: M_n\left(a_n\right)_y = F_G\cos\gamma = F_G\cos\left(180^\circ - \delta\right) = -F_G\cos\delta = -F_G\sin\beta, (9)$$

Где $\sin\beta$ рассчитывает по формуле (10):

$$\sin\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (10)$$

Используя формулы (7) и (10) получаем формулу для расчета координаты y в любой момент времени:

$$a_y = -G\frac{M_c}{x^2 + y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (11)$$

Для дальнейших расчетов будут использованы формулы (8) и (11).

Глава 4. Результаты работы и их анализ

Расчеты и построение графиков производились в системе *Mathematica* версии *Wolfram Mathematica 9.*

Для расчетов использовались формулы (8) и (11), полученные в предыдущей главе, а так же следующие константы (за параметры планеты были выбраны параметры Земли): масса Солнца M_c ($1,98892\times10^{30}\,кг$), гравитационная постоянная G ($6,672\times10^{-11}$), радиус-вектор Земли r – расстояние от Земли до Солнца ($1,5\times10^{11}\,м$), период обращения Земли вокруг Солнца Т ($365\times24\times3600с$). Время является переменной, которая задавалась произвольно для каждого уравнения.

<u>Первый закон Кеплера</u>

Первый закон Кеплера гласит о том, что все планеты движутся по эллиптическим орбитам (см. стр. 6). Выводим график зависимости координаты x от координаты y (график 1).

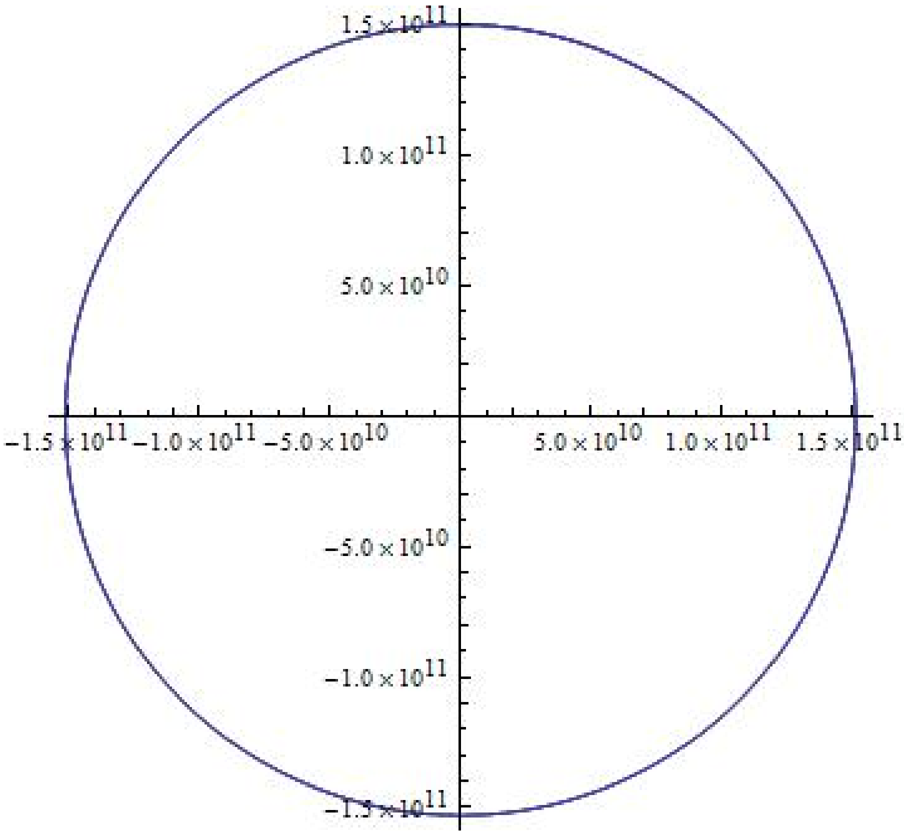

График 1. Зависимость координат x от y.

По графику 1 не ясна точная форма траектории планеты. Выводим график 2, который будет показывать изменение радиус-вектора планеты.

График 2. Зависимость радиус-вектора от времени. Точка A – афелий траектории, точка P – перигелий.

По графику 2 можно сделать вывод, что траектория планеты не является окружностью и изменяется циклически.

Для того, чтобы доказать эллиптическую форму орбиты запишем уравнение эллипса (12):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1, \quad (12)$$

Значение большой полуоси а можно взять с графика 2 по формуле (13):

$$a = A + P = const, \quad (13)$$

Значение малой полуоси б выражаем из уравнения эллипса (12):

$$в = \sqrt{y^2\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}, \quad (14)$$

Выводим на график изменение малой полуоси во времени (график 3).

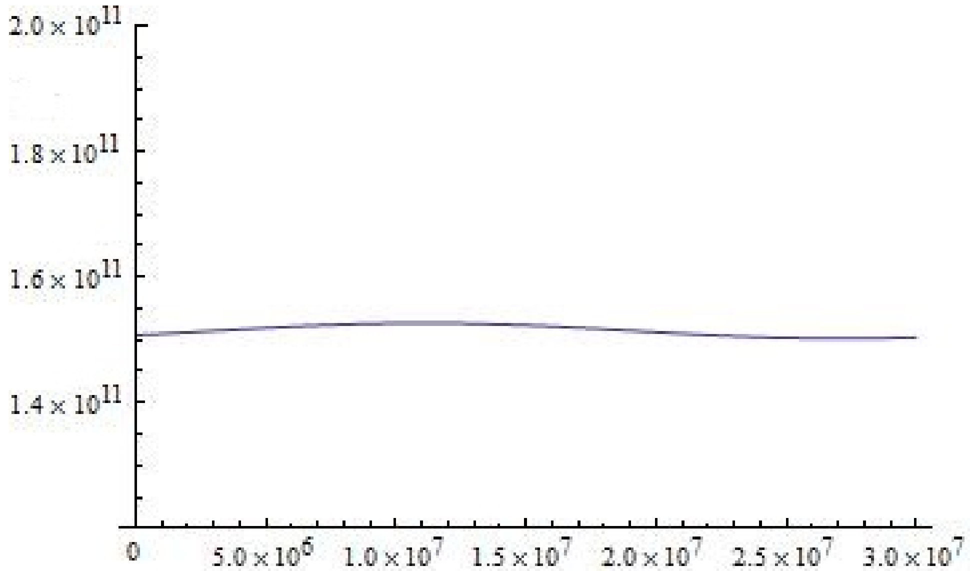

График 3. Значение малой полуоси

По графику 3 видно, что значение малой полуоси $в$ равно const => орбита Земли является эллипсом, в одном из фокусов которого находится Солнце.

<u>Второй закон Кеплера</u>

Второй закон Кеплера гласит о том, что за равные промежутки времени радиус-вектор планеты заметает равные площади (см. стр. 8).

Выведем уравнение для расчёта площади, которую заметает радиус-вектор за произвольно заданный промежуток времени. Подставим промежуток времени от 0 до 2*10^7 с и проинтегрируем. В результате получается 3,03434*10^18. Изменяем время на промежуток от 10^7 до 3*10^7 и снова интегрируем. В результате получается 3,03913*10^18. Сравниваем результаты и видим, что разница возникает только в третьем знаке после запятой, что составляет погрешность в 0,15 %. Такая погрешность считается допустимой.

Можно подставлять любые промежутки времени и сравнивать результаты, но таким способом невозможно перебрать все любые равные промежутки времени, поэтому требуется наглядное представление – т.е. график.

На графике 3 выведены результаты подсчётов площади, который заметает радиус-вектор планеты за любой промежуток времени, равный 10^7 с. При вычете погрешности линия получается прямой, то есть const => радиус вектор за любые равные промежутки времени заметает равную площадь.

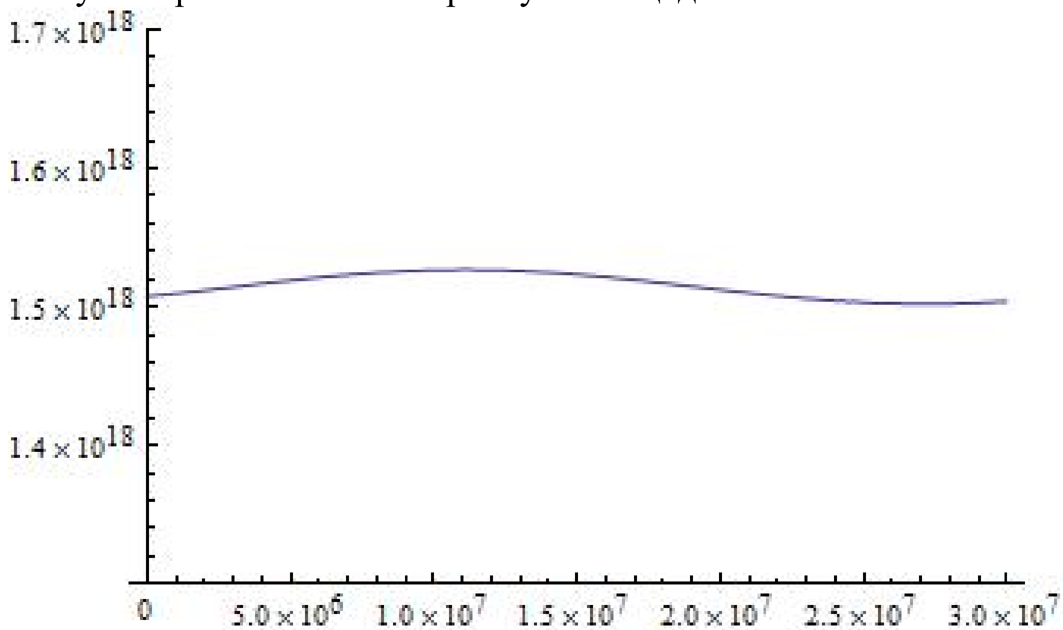

График 3. Площадь, которую заметает радиус-вектор планеты за любой промежуток времени, равный 10^7 с.

Заключение

В результате математического моделирования получена модель, написанная в системе *Mathematica,* которая позволяет изучить движение любой из планет Солнечной системы по второму и первому законов Кеплера при изменение вводных данных.

В работе рассматривалось движение планеты по первым двум законам Кеплера на примере планеты Земля.

Список литературы

1. Самые первые модели мира
http://schools.keldysh.ru/sch216/bagry/3.html

2. Большая школьная энциклопедия, раздел «1. представления о Вселенной» (§1.1. геоцентрическая система мира и §1.2. гелиоцентрическая система мира)

3. Большая школьная энциклопедия, раздел «6. Солнечная система» (§6.3. Законы движения планет)

4. Законы сохранения в механике: 1.24. Законы Кеплера
http://www.physics.ru/courses/op25part1/content/chapter1/section/paragraph24/theory.html#.VDfxHMbh7Tp

5. Законы Кеплера
http://www.its-physics.org/zakony-keplera

6. учебник по физике 9 класс

7. Геоцентрическая система мира [Википедия]
https://ru.wikipedia.org/wiki/Геоцентрическая_система_мира

8. Гелиоцентрическая система мира [Википедия]
https://ru.wikipedia.org/wiki/Гелиоцентрическая_система_мира

9. Эллипс
http://webmath.exponenta.ru/dnu/lc/age/pyartli1/node28.htm