Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Геометрия трапеции

Демидова Анжелика Федоровна,
11 кл., МБОУ «Ильинская СОШ №1»,
Ильинский район,
Самохина Наталья Александровна,
учитель математики высшей категории.

Пермь. 2015.

Оглавление

Введение

Решение задач- главное средство изучения геометрии. Правильность их решения зависит от знания определений, свойств геометрических фигур, от знания теорем и умения их применять. Учебно-исследовательская работа посвящена одной из ключевых фигур планиметрии – трапеции.

Актуальность темы обусловлена тем, что в материалах экзаменов очень часто встречаются задачи на трапецию, решение которых требует знания ее свойств. Данная работа является системой приобретенных школьных знаний, развитием и углублением их о ключевых задач трапеции.

Проблема: Свойства, необходимые для решения задач, отсутствуют в учебниках или перенесены в задачи и не воспринимаются как теоретические положения.

Гипотеза: Трапеция обладает рядом интересных и полезных для решения задач свойствами. Если овладеть ими и рассмотреть дополнительные построения в трапеции, то возникает объективная возможность для решения задач повышенной сложности.

Объект исследования: Трапеция как геометрическая фигура

Предмет исследования: Свойства, дополнительные построения в задачах о трапеции

Цель: Исследование свойств, дополнительных построений в трапециях, и применение полученных знаний к практике решения задач

Задачи:

1. Собрать информацию о свойствах трапеции
2. Доказать зависимость между элементами трапеции, эффективно используемых при решении геометрических задач
3. Выделить основные виды дополнительных построений
4. Применить полученные знания к практике решения задач
5. Составить банк ключевых задач о трапеции
6. Создать электронную презентацию

Структура:

Работа состоит из 4-х глав.

Глава первая - из истории трапеции.

Во второй главе систематизируются полученные знания о свойствах трапеции и доказываются новые сведения зависимостей между основаниями, высотой и средними линиями трапеции.

Третья глава посвящена задачам на трапецию.

Четвёртая глава – задачи ЕГЭ.

ГЛАВА 1. Из истории трапеции

«Трапеция» - слово греческое, означавшее в древности «столик» (по-гречески «трапедзион» означает столик, обеденный стол). Геометрическая фигура была названа так по внешнему сходству с маленьким столом.

В «Началах» (главный труд Евклида, написанный около 300 г. до н.э. и посвященный систематическому построению трапеции) термин «трапеция» применяется не в современном смысле, а в другом смысле: любой четырехугольник (не параллелограмм). «Трапеция" в нашем смысле встречается у древнегреческого математика Посидония(Iв.). Лишь в XIIIв. это слово приобретает современный смысл.

В современном смысле, трапеция- это выпуклый четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

ГЛАВА 2. Свойства трапеции

Элементы трапеции:

- Параллельные стороны называются основаниями трапеции
- Две другие стороны называются боковыми сторонами
- Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется средней линией трапеции
- Отрезок, соединяющий середины оснований, называется второй средней линией трапеции

Виды трапеции:

- Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется равнобокой, равнобочной или равнобедренной трапецией
- Трапеция, имеющая прямые углы при боковой стороне, называется прямоугольной

Известные свойства трапеции из школьного курса геометрии:

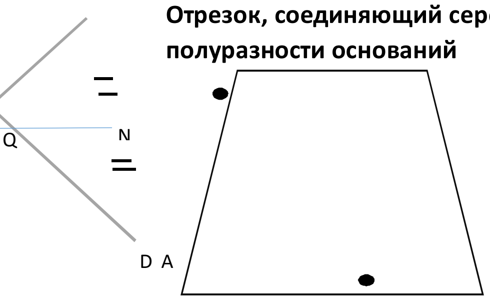
1. Средняя линия трапеции параллельна основанием и равна их полу сумме
2. Углы при любом основании равнобедренной трапеции равны
3. Длины диагоналей равнобедренной трапеции равны
4. Прямая, проходящая через середины оснований равнобедренной трапеции, перпендикулярна основаниям и является осью симметрии трапеции
5. В трапецию можно вписать окружность, если сумма оснований трапеции равна сумме ее боковых сторон. Средняя линия в этом случае равна сумме боковых сторон, деленной на 2.
6. Если трапеция равнобедренная, то около нее можно описать окружность
7. В трапеции ее боковая сторона видна из центра вписанной окружности под углом 90^0
8. Треугольники, лежащие на основаниях при пересечении диагоналей, подобны
9. Если отношение оснований ровно k, то отношение площадей треугольников, лежащих на основаниях, равно k^2
10. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту

Трапеция обладает еще рядом интересных и полезных для решения задач свойствами.

1. Свойство отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции

В C

Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований



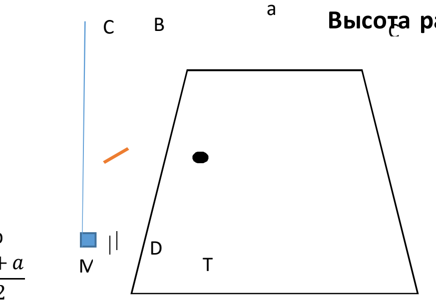
MO- средняя линияΔABC; MO=$\frac{1}{2}$AB

MQ- средняя линия ΔABD и MQ=$\frac{1}{2}AD$

Тогда OQ=MQ-MO $=> OQ = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD - \mathrm{BC})$

При решении задач на трапецию одним из основных приемов является проведение на ней двух высот.

2. *Свойство высот равнобедренной трапеции, проведенных их вершин тупых углов*



Высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на два отрезка, меньший из которых равен полуразности, а больший- полусумме оснований

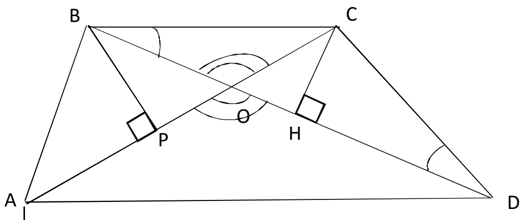
$\Delta\mathrm{ABT} = \Delta\mathrm{CMD}$(по катету и гипотенузе)$=>$

$=> AT$=MD=$\frac{b-a}{2}$

Тогда TD=TM+MD=a+$\frac{b-a}{2}$ = $\frac{a+b}{2}$

3. Свойство треугольников, на которые разбивается трапеция ее диагоналями

Диагонали трапеции разбивают ее на 4 треугольника, причем треугольники, прилежащие к основаниям, подобны, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики



$\Delta BOC \sim \Delta AOD$ по двум углам (I признак подобия)

<u>Докажем вторую часть утверждения</u>

Треугольники BOC и COD имеют общую высоту, если принять за их основания отрезки OB и OD

Тогда $\frac{S_{BOC}}{S_{COD}} = \frac{\frac{1}{2}BO*CH}{\frac{1}{2}OD*CH} = \frac{BO}{OD} = k =>$

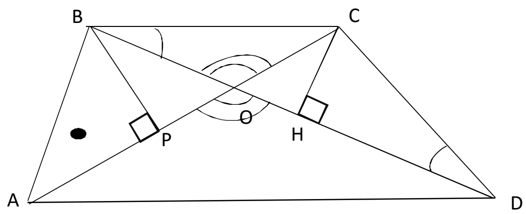
$S_{COD} = \frac{1}{k} * S_{BOC}$

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, русский

Треугольники BOC и AOB имеют общую высоту, если принять за их основания отрезки CO и OA

Тогда $\frac{S_{BOC}}{S_{\text{AOB}}} = \frac{\frac{1}{2}\text{CO}*\text{BP}}{\frac{1}{2}\text{AO}*\text{BP}} = \frac{\text{C}O}{O\text{A}} = k => S_{\text{AOB}} = \frac{1}{k} * S_{BOC}$

Из этих двух предложений следует, что $S_{COD} = S_{AOB}$



4. Связь между площадями треугольников, на которые разбивается трапеция ее диагоналями

O-точка пересечения диагоналей трапеции ABCD с основаниями BC и AD.

Пусть $S_{BOC} = S_1$ и $S_{AOD} = S_2$

$$\Delta \text{BOC} \sim \Delta AOD => \frac{S_{BOC}}{S_{AOD}} = \frac{S_1}{S_2} = k^2 => \frac{BO}{OD} = k = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$$

$$S_{COD} = \frac{1}{k} * S_{BOC} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} * S_1 = \sqrt{S_1 * S_2}$$

$$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOD} + 2S_{COD}$$

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 * S_2} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$$

5. Свойство отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основанием

Отрезок, параллельный основаниям трапеции, проходящий через точку пересечения диагоналей и соединяющий 2 точки на боковых сторонах,

делится точкой пересечения диагоналей пополам. Его длина есть *<u>среднее гармоническое основание трапеции</u>*

Точка О-точка пересечения диагоналей трапеции ABCD с основаниями BC и AD. BC=a, AD=b

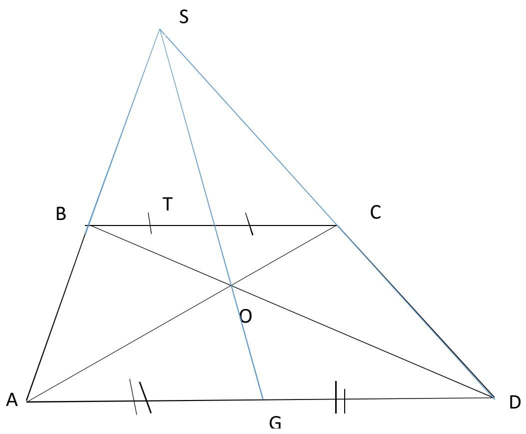
$\Delta AOD \sim \Delta BOC \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{b}{a}$

$\Delta AOP \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{PO}{BC} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow PO = \frac{ab}{a+b}$

ΔDOK подобен $\Delta DBC \Rightarrow OK = \frac{ab}{a+b}$

Отсюда PO=OK и $PK = \frac{2ab}{a+b}$

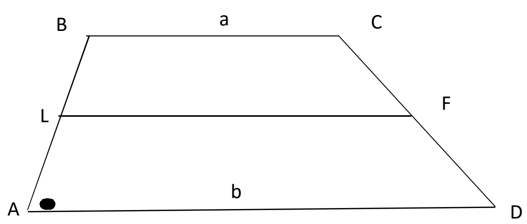
6. Свойство 4 точек



В трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжения боковых сторон, середины оснований трапеции лежат на одной прямой

$\Delta BSC \sim \Delta ASD$ и в каждом из них медианы ST и SG делят угол при вершине S на одинаковые части. Следовательно, точки S,T,G лежат на одной прямой. $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ и в каждом из них медианы TO и OG делят угол при вершине O на одинаковые части Следовательно, точки T,O,G лежат на одной прямой

7. Свойство длины отрезка, разбивающего трапецию на 2 подобные

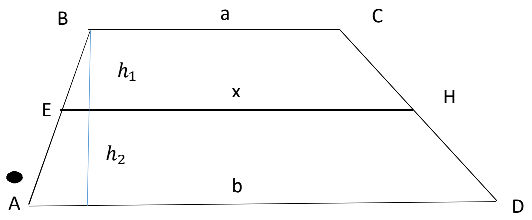


Отрезок, разбивающий трапецию на 2 подобные трапеции, имеет длину равную *<u>среднему геометрическому длин оснований</u>*

Трапеции ALFD и LBCF подобны

$\frac{a}{LF} = \frac{LF}{b} => LF^2 = ab,\ LF = \sqrt{ab}$

8. Свойство отрезка, делящего трапецию на две равновеликие



Длина отрезка, делящего трапецию на 2 равновеликие равна среднему квадратичному длин оснований

Пусть площадь трапеции равна S. h_1 и h_2 – части высоты, а x- длина искомого отрезка.

Тогда $\frac{S}{2} = h_1 \frac{a+x}{2} = h_2 \frac{b+x}{2}$ и $S = (h_1 + h_2) * \frac{a+b}{2}$

Составим систему:

$$\begin{cases} h_1 * (a + x) = h_2 * (b + x) \\ h_1 * (a + x) = (h_1 + h_2) * \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Выразим из первого выражения $h_1 = \frac{h_2*(b+x)}{a+x}$

Подставим значение h_1 во второе уравнение системы

$$h_2 * (b + x) = \left(\frac{h_{2*(b+x)}}{a + x} + h_2\right) * \frac{a + b}{2}$$

$$h_2 * (b + x) = h_2 * \frac{b + 2x + a}{a + x} * \frac{a + b}{2}$$

$$b + x = \frac{b + a + 2x}{a + x} * \frac{a + b}{2}$$

$$2(a + x)(b + x) = (b + a + 2x)(a + b)$$

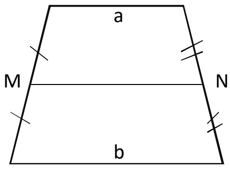
$$2ab + 2bx + 2ax + 2x^2 = ab + a^2 + 2ax + b^2 + ab + 2bx$$

$$2x^2 = a^2 + b^2$$

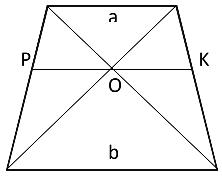
$$x^2 = \frac{a^2+b^2}{2},\ \ x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Вывод: доказаны зависимости между основаниями трапеции и отрезками, параллельными основаниям. Появился новый блок знаний, с помощью которых можно продвинуться в решении задач повышенной сложности

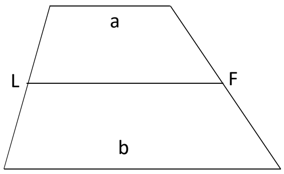
1)



2)



3)



$MN = \frac{a+b}{2}$

Среднее арифметическое чисел a и b

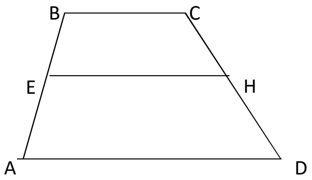
$PK = \frac{2ab}{a+b}$

Среднее гармоническое чисел a и b

$LF = \sqrt{ab}$ $\quad ALFD \sim LBCF$

Среднее геометрическое чисел

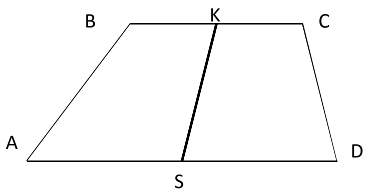
4)



$$S_{EBCH} = S_{AEHD} => EH = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Среднее квадратичное чисел a и b

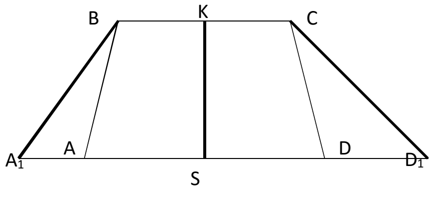
9. Вторая средняя линия трапеции



Средняя линия трапеции – это отрезок, соединяющий середины боковых сторон. Если же соединить отрезком середины оснований, получится вторая средняя линия трапеции

Вторая средняя линия трапеции – это отрезок, соединяющий середины оснований

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований. А если ли связь между второй средней линией и ее боковыми сторонами? Очевидно, что вторая средняя линия трапеции не равна полусумме боковых сторон, в чем можно убедиться, хотя бы растяжением одного из оснований:



Сумма боковых сторон трапеции изменилась, а длина KS осталась прежней. И все же связь между второй средней линией трапеции и боковыми сторонами есть.

Воспользуемся векторным способом:

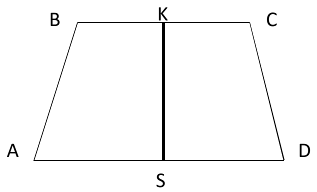
В трапеции ABCD BC∥ AD, KS – вторая средняя линия

$\overrightarrow{KS} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS}$, с другой стороны, $\overrightarrow{KS} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DS}$. Сложив оба равенства получим: $2\overrightarrow{KS} = \left(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right) + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{AS + \overrightarrow{DS}}\right)$, т.е.

$$\overrightarrow{KS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$$

Таким образом, **вектор второй средней линии трапеции равен полусумме векторов боковых сторон, взятых в одном порядке (сверху вниз).**

Это утверждение можно доказать вторым способом:



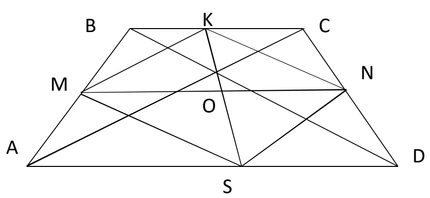
В трапеции ABCD, BC∥ AD, KS – вторая средняя линия, O – произвольная точка

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right), \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right)$$

$$\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}\right)\right)$$

$$\overrightarrow{KS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$$

10. Средние линии трапеции в точке пересечения делятся пополам

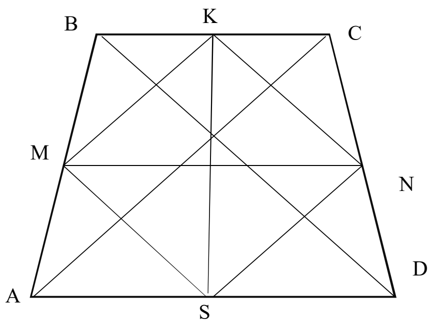


Для доказательства рассмотрим треугольники BCD и ABD: KN – средняя линия треугольника BCD, KN∥ BD и KN=$\frac{1}{2}BD$

MC – средняя линия треугольника ABD, MS∥ BD, MS=$\frac{1}{2}BD$. MK∥ AC, MK=$\frac{1}{2}AC$, NS∥AC, NS=$\frac{1}{2}AC$.

Таким образом, MKNS – параллелограмм, MN и KS – его диагонали=> KO=OS, MO=ON

11. В равнобочной трапеции средние линии перпендикулярны



Дано: ABCD – трапеция, AB=CD, MN, KS - средние лини

Доказать: MN⊥ KS

Доказательство: МК – средняя линия ΔABC, МК$\parallel AC, MK = \frac{1}{2}AC$

NS – средняя линия $\Delta ADC, NS \parallel AC, NS = \frac{1}{2}AC$

Если противоположные стороны четырехугольника MKNS равны и параллельны, то по признаку MKNS – параллелограмм, т.к. трапеция ABCD- равнобокая, то AC=BD

$$MK = \frac{1}{2}AC, KN = \frac{1}{2}BD$$

$$MK = KN => MKNS - \text{ромб}$$

По свойству ромба, диагонали в нем перпендикулярны, MN⊥ KS

Вывод: Все рассмотренные свойства позволят более глубоко познать трапецию и обеспечат успешность в решении задач на применение ее свойств

ГЛАВА 3. Задачи о трапециях

Среди задач о многоугольниках важную долю составляют задачи о трапециях.

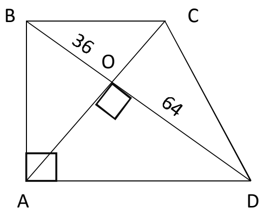
Основные подходы к решению таких задач:

- Подобие и пропорциональность
- Дополнительные построения
- Трапеция и площадь
- Трапеция и окружность

3.1. Подобие и пропорциональность в трапециях

Особенностью трапеции является наличие двух параллельных сторон. При пересечении их (или их продолжений) любой прямой образуются равные углы, что приводит к появлению пар подобных треугольников, и соответственно, пропорциональных отрезков. В соответствии с теоремой Фалеса пропорциональные отрезки возникают на боковых сторонах трапеции или их продолжениях, если проводится прямая, параллельная основаниям.

Задача 1. *Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны, и большая из них точкой пересечения делится на отрезки, равные 36 и 64. Найдите основания трапеции.*



Решение: 1) ΔBAD,_AO^2=BO*OD, AO^2=36*64, AO^2=2304, AO=48.

2) $\Delta \mathrm{BOC} \sim \Delta AOD, \frac{BO}{OD} = \frac{OC}{AO}, \frac{36}{64} = \frac{OC}{48}$, OC=27

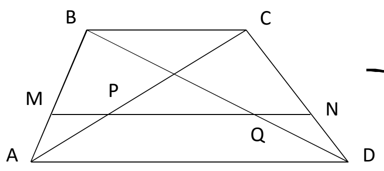
3) $\Delta \mathrm{BOC}$; $\angle \mathrm{O} = 90^0$, $BC^2=BO^2+OC^2$, $BC^2=36^2+27^2$, BC^2=1296+729, BC^2=2025, BC=45.

4) ΔAOD; $\angle \mathrm{O} = 90^0$, $AD^2=AO^2+OD^2$,

$AD^2=48^2+64^2$, AD^2=2304+4096, AD^2=6400, AD=80

<u>Ответ:</u> 45;80

Задача 2. *Прямая, параллельная основаниям трапеции, пересекает ее боковые стороны и диагонали последовательно в точках M, P, Q, N. Доказать, что MP=QN.*



Решение:

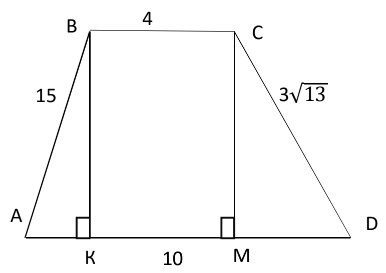
1) $\Delta AMP \sim \Delta ABC => \frac{AM}{AB} = \frac{MP}{BC}$

2)$\Delta DNQ \sim \Delta DBC => \frac{DN}{DC} = \frac{QN}{BC}$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{MP}{BC} = \frac{DN}{DC} = \frac{QN}{BC} => MP = QN$$

3) По теореме Фалеса $\frac{AM}{AB} = \frac{DN}{CD}$

Задача3. *Основания трапеции равны 4 и 10, а ее боковые стороны – 3$\sqrt{13}$ и 15. Найти косинус меньшего угла этой трапеции.*



Решение:

Проведем высоты ВК и СМ, ВК=СМ

1) Рассмотрим ΔABK и ΔCDM, $\angle K = \angle M = 90^0, \angle A = \alpha, \angle D = \beta$

$\sin\alpha = \frac{BK}{AB}$ $\sin\beta = \frac{CM}{CD}$

AB>CD => $\sin\alpha < \sin\beta => \alpha < \beta$

2) Определим $\cos\alpha = \frac{AK}{AB}$

ΔABK и ΔCDM AK=x, MD=AD-AM=10-(x+4)=6-x

$BK^2=AB^2 - AK^2$; $BK^2=225 - x^2$

$CM^2=CD^2 - MD^2$; $CM^2=(3\sqrt{13})^2 - (6 - x)^2=117 - 36+12x - x^2=81+12x - x^2$

$225 - x^2=81+12x - x^2$; $12x=225-81$; $12x=144$; $x=12$

$$\cos\alpha = \frac{AK}{AB} = \frac{12}{15} = 0,8$$

<u>Ответ:</u> 0,8

Вывод: При решении на подобие и пропорциональность использованы:

- признаки подобия треугольников
- теорема Фалеса
- свойство средней линии трапеции
- теорема Пифагора и обратная ей

3.2. Дополнительные построения в трапеции

Дополнительные построения являются эффективным методом решения геометрических задач. Наиболее часто используются при решении задач:

1. Опускание высот из концов одного основания на другое основание
2. Проведение через вершины трапеции прямой, параллельной боковой стороне, не содержащей эту вершину
3. Проведение через середину меньшего основания прямых, параллельных боковым сторонам
4. Проведение через вершину трапеции прямой, параллельной диагонали, не содержащей эту вершину
5. Продолжение боковых сторон до пересечения

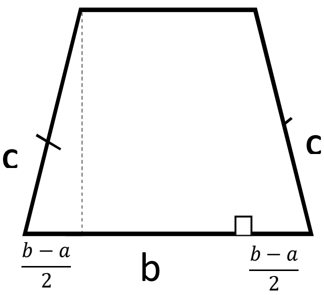
Рассмотрим каждое их них.

Дополнительное построение 1 позволяет разбить трапецию на прямоугольник (стороны которого- одно из оснований и высота трапеции) и два прямоугольных треугольника (в которых один из катетов – высота трапеции, а гипотенузы – боковые стороны трапеции)

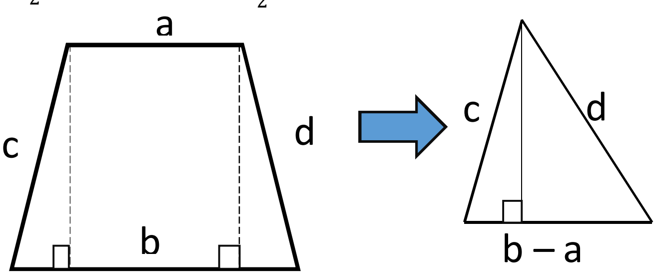
Построение 1.

Возможны два варианта:

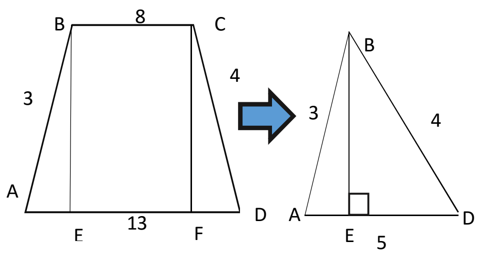
а)



б)



Задача 1. *Найти площадь трапеции с основаниями 8 и 13 и боковыми сторонами 3 и 4.*



I способ – геометрический

Решение:

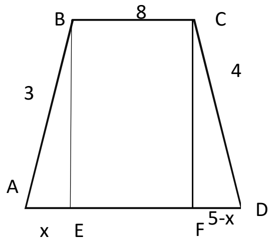
1) ΔABD со сторонами 3,4,5=>$\angle B = 90^0$ (по теореме обратной теореме Пифагора)=>

=>$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}$*3*4=6

2) $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} * AD * BE => BE = \frac{2S}{AD} = \frac{12}{5} = 2{,}4$

3) $S_{ABCD} = 6 + 8 * 2{,}4 = 25{,}2$

<u>Ответ:</u> 25,2



II способ решения – алгебраический

1) $\Delta ABE;\ \angle E = 90^0$

$BE^2=AB^2 – AE^2=9 – x^2$

2) $\Delta CDF;\ \angle F = 90^0$

$CF^2=CD^2 – FD^2=16 – (5-x)^2= -x^2+10x – 9$

3) $BE^2=CF^2$

$9 – x^2=-x^2+10x – 9$

$– 10x= - 18$

x=1,8

BE^2=9-3,24=5,76; BE=2,4

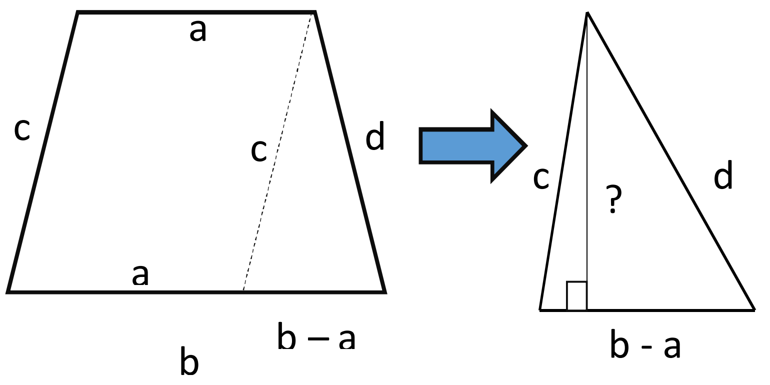
$$S_{ABCD} = 6 + 8 * 2{,}4 = 25{,}2$$

<u>Ответ:</u> 25,2

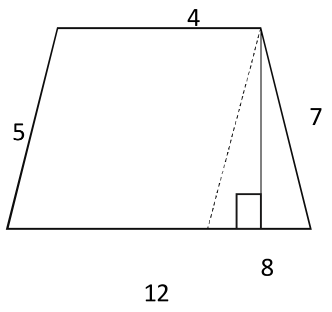
Вывод: первый способ проще, решение короче.

Дополнительное построение 2 делит трапецию на параллелограмм и треугольник. Заставляет работать боковые стороны, соединив их вместе в треугольник.

Построение 2.



Задача 2. *Стороны трапеции равны 4,7,12 и 5. Найти ее площадь.*



Решение:

1) Перенесем параллельную сторону трапеции

2) Найдем площадь получившегося треугольника:
$$S = \sqrt{10 * 2 * 3 * 5} = 5\sqrt{3}$$

3) Найдем высоту трапеции и треугольника

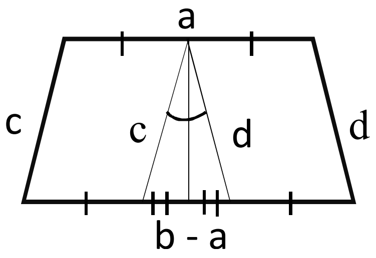
$h = \frac{2S}{a} = \frac{10\sqrt{3}}{8} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

4) Тогда площадь трапеции равна $S = \frac{4+12}{2} * \frac{5\sqrt{3}}{4} = 10\sqrt{3}$

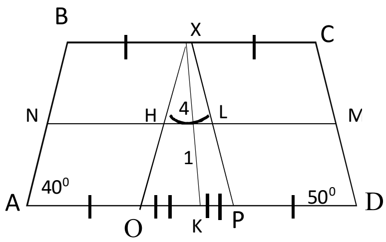
Ответ: $10\sqrt{3}$

Дополнительное построение 3 очень близко к построению 2 и сводится к решению треугольника.

Построение 3.



Задача 3. *В трапеции средняя линия равна 4 см, углы при одном из основании равны 40^0 и 50^0. Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1 см.*



Решение: 1) Из точки X проведем две параллельные прямые боковым сторонам. Получим ΔOXP.

2) $\angle XOP = 40^0, \angle XPO = 50^0 => \angle OXP = 90^0$

3)XK – медиана из вершины прямого угла XK=$\frac{1}{2}$OP поэтому OP=2XK=2

4)HL – средняя линия $\Delta OXP, HL = \frac{1}{2} OP = 1$

5)NM=$\frac{1}{2}(BC + AD) = 4 -$ средняя линия трапеции, поэтому BC+AD=8

6)ABXO и PXCD – параллелограммы, BX=NH=AO, XC=LM=PD

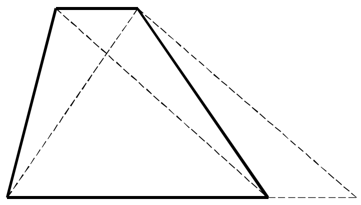
7)NH=LM=$\frac{4-HL}{2} = 1{,}5$, AO=PD=1,5

8)Получаем AD=2AO+OP=1,5*2+2=5, BC=2MN – AD=8 – AD=8 – 5=3

Ответ: 5;3

В тех случаях, когда заданы диагонали трапеции или угол между ними, выполняется дополнительное построение 4, которое сводится к решению треугольника, со сторонами равными и параллельными диагоналям трапеции и третьей стороной, равной сумме длин оснований.

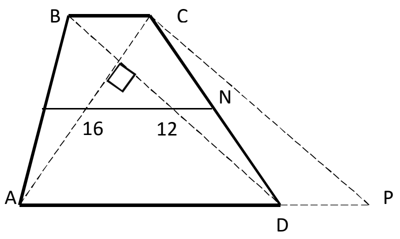
Построение 4.



Задача 4. *В трапеции ABCD диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, причем AC=16, BD=12. Найти среднюю линию трапеции.*

Решение:

1) Проведем CP параллельно диагонали BD



DBCP – параллелограмм, где BC=DP, BD=CP

2) Рассмотрим $\Delta ACP, \angle ACP = 90^0$, а AP=AD+BC

3) Из ΔACP по теореме Пифагора имеем $AP^2=AC^2+CP^2$, $AP^2=16^2+12^2=256+144=200$, AP=20

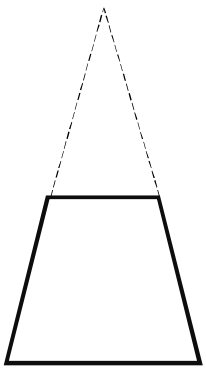
Средняя линия трапеции равна полусумме оснований т.е

$MN=\frac{AD+BC}{2}$ т.к BC=DP, то $MN=\frac{AD+DP}{2} = \frac{AP}{2} = 10$

<u>Ответ:</u> MN=10

Дополнительное построение 5 позволяет сводить задачу о трапеции к задаче о треугольнике.

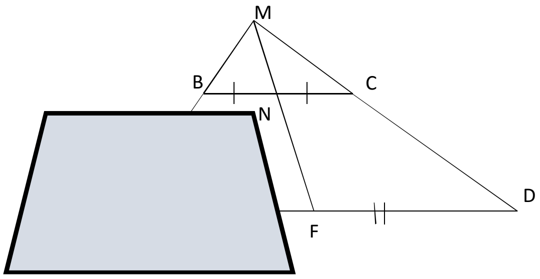
Построение 5.



Задача 5. *В трапеции ABCD сумма углов при основании AD равна 90^0. Доказать, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований (вторая средняя линия трапеции).*

Доказательство:

1) Продолжим стороны трапеции до их пересечения в точке М.



Получили ΔBMC и ΔAMD

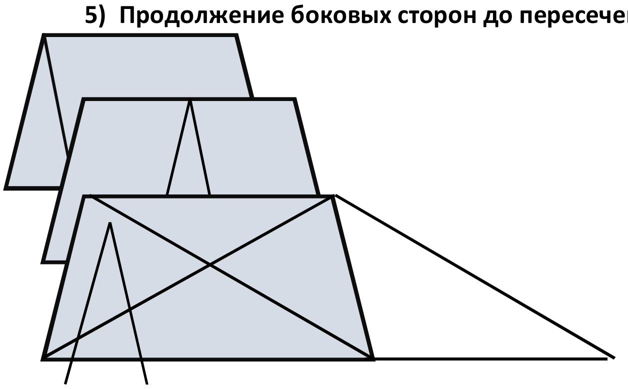
2) $\angle A + \angle D = 90^0 => M = 90^0$

AF=FD, BN=NC (по условию)

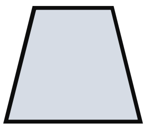
3) $\Delta BMC, \angle M = 90^0; MN -$ медиана $=> MN = \frac{1}{2}BC$
4) $\Delta AMD, \angle M = 90^0; MF -$ медиана $=> MF = \frac{1}{2}AD$
5) $FN = MF - MN, FN = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC = \frac{AD-BC}{2}$

Вывод: Решение задач с помощью дополнительных построений не только быстрое и проще, но и намного интересней, чем решение привычными способами.

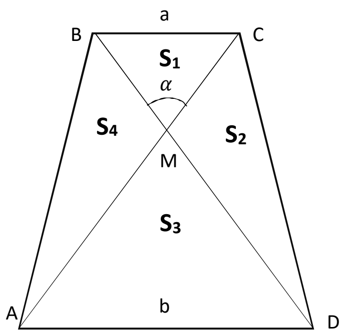
1) **Опускание высот из концов одного основания на другое основание;**
2) **Проведение через вершины трапеции прямой, параллельной боковой стороне, не содержащей эту вершину;**
3) **Проведение через середину меньшего основания прямых, параллельных боковым сторонам;**
4) **Проведение через вершину трапеции прямой, параллельной диагонали, не содержащей эту вершину;**
5) **Продолжение боковых сторон до пересечения.**



3.3. Трапеция и площадь



Наличие параллельных сторон в трапеции порождает ряд интересных свойств, связанных с площадями.



Свойства:

1) $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ т. к $\Delta BMC \sim \Delta AMD$

2) $S_2 = S_4$

3) $S_2 = \sqrt{S_1 * S_3}$ т.к

$S_1 = \frac{1}{2} BM * MC * \sin\alpha$

$S_3 = \frac{1}{2} AM * MD * \sin\alpha,\ \sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$

$S_1 S_3 = \frac{1}{4} AM * BM * MC * MD * \sin^2\alpha$

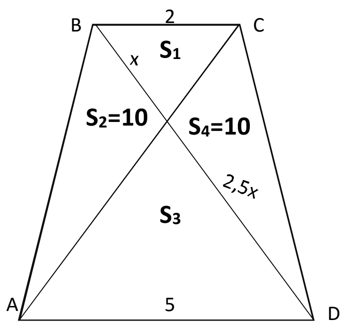
$S_2 = \dfrac{1}{2} AM * BM * \sin\alpha,\ S_4 = \dfrac{1}{2} CM * MD * \sin\alpha$

$S_2 S_4 = \frac{1}{4} AM * BM * MC * MD * \sin^2\alpha => S_1 S_3 = S_2 S_4$

$S_2 = S_4 = \sqrt{S_1 * S_3}$

Задача 6. *Длины оснований трапеции равны 2 и 5. Площадь треугольника, прилегающего к одной из боковых сторон равна 10. Найдите площадь всей трапеции.*

Отформатировано: английский (США)



Решение:

1) По свойству площадей треугольников получаем: $S_2S_4 = S_1S_3 => S_1S_3 = 100$

$S_1 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 S_3 => S_1 S_3 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 {S_3}^2 = 100$

$S_3 = 10 : \frac{2}{5} = 25,$ тогда $S_1 = 4$

$S_{ABCD} = 10 + 10 + 4 + 25 = 49$

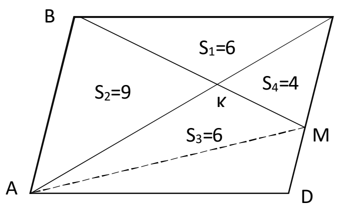
<u>Ответ:</u> 49

Задача 7. *Точка M лежащая на стороне параллелограмма ABCD, соединена с вершиной B. Диагональ AC пересекает отрезок BM в точке K. Площадь ΔKBC равна 6, площадь ΔKMC равна 4. Найти площадь исходного параллелограмма.*

Решение: 1) ABCM – трапеция

По свойству площадей: $S_1S_3=S_2S_4$; $S_1=S_3=6$ => $4S_2=36$, $S_2=9$ => $S_{ABC}=S_{ADC}=15$

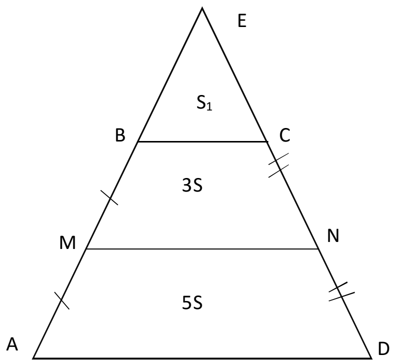
$S_{ABCD}=15+15=30$



Ответ: 30

При продолжении боковых сторон образуются подобные треугольники, площади которых относятся как квадраты соответствующих сторон.

Задача 8. *Средняя линия трапеции равна 10 см и делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найти блины оснований.*



Решение:

1) Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения

2) Пусть S – площадь трапеции ABCD, тогда $S_{AMND}=5S$, $S_{MBCN}=3S$

3) Пусть $S_{BCE}=S_1$; BC=a; AD=b

$\Delta AED \sim \Delta BEC => \frac{8S+S_1}{S_1} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$,

$8\frac{S}{S_1} + 1 = \frac{b^2}{a^2}$

$\Delta MEN \sim \Delta BEC => \frac{3S+S_1}{S_1} =$

$= \left(\frac{10}{a}\right)^2, 3\frac{S}{S_1} + 1 = \frac{100}{a^2}$

$$\begin{cases} 8*\frac{S}{S_1} + 1 = \frac{b^2}{a^2} \\ 3*\frac{S}{S_1} + 1 = \frac{100}{a^2} \end{cases}$$

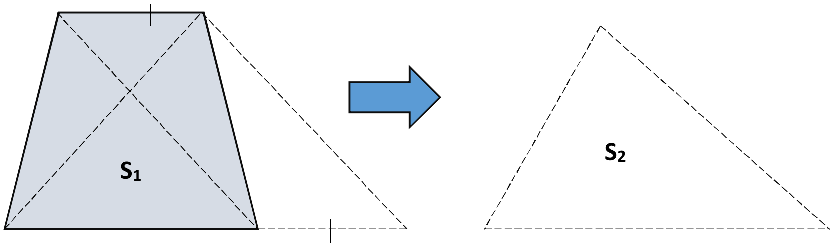
Исключив $\frac{S}{S_1}$, получим: $\frac{-3b^2}{a^2} + \frac{800}{a^2} = 5$; $\frac{800-3b^2}{a^2} = 5$, но $\frac{a+b}{2} = 10 => a =$

$= 20 - b$

$800 - 3b^2 = 5(20-b)^2$

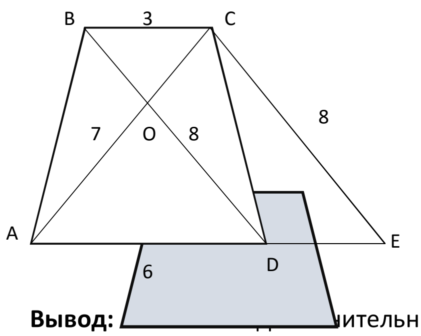
$800 - 3b^2 = 5(400 - 40b + b^2)$
$-8b^2 + 200b - 1200 = 0$
$8b^2 - 200b + 1200 = 0$
$b^2 - 25b + 150 = 0$
b=15, a=5
<u>Ответ:</u> 5;15

При дополнительном построении, когда переносится диагональ, образуется треугольник, площадь которого равна площади трапеции.



$S_1 = S_2$

Задача 9. *Найти площадь трапеции, диагонали которой равны 7 и 8, а основания – 3 и 6.*



Решение: 1) Проведем CE∥ BD

2) $S_{ABCD} = S_{ACE}$ т.к

$\left.\begin{array}{l} S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} \\ S_{ACE} = S_{ACD} + S_{DCE} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{ACE}$

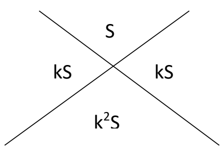
3) $S_{ACE} = \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}$
$= \sqrt{12 * 5 * 3 * 4} = 12\sqrt{5}$

$S_{ABCD} = 12\sqrt{5}$

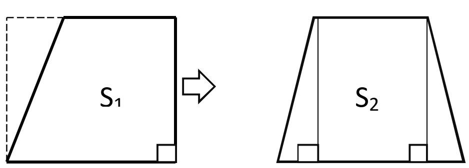
<u>Ответ:</u> $12\sqrt{5}$

Вывод: дополнительные построения позволяют легко находить площадь трапеции и ее элементы.

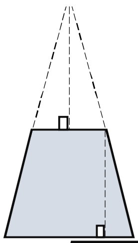
1)



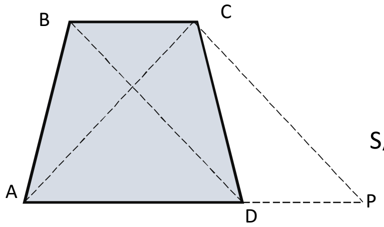
2)



3)



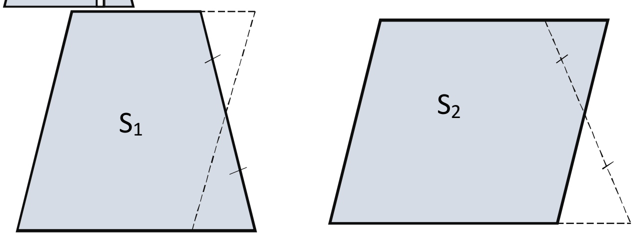
4)



$S_1=S_2$

$S_{ABCD}=S_{ABP}$

5)

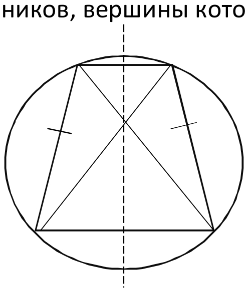


$S_1=S_2$

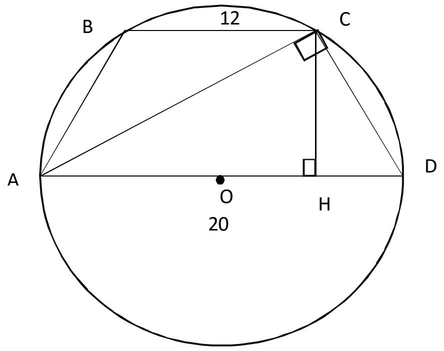
3.4. Трапеция и окружность

3.4.1. Трапеция, вписанная в окружность:

- Если окружность описана около трапеции ABCD (AD‖BC), это означает, что трапеция равнобедренная
- Прямая, проходящая через центр окружности перпендикулярно основанием, является осью симметрии трапеции
- Окружность, описанная около трапеции, описана и около $4^{\underline{х}}$ треугольников, вершины которых совпадают с вершинами трапеции



Задача 1. *Центр окружности, описанной вокруг трапеции, лежит на ее основании. Основания равны 12 и 20. Найти диагональ и боковую сторону этой трапеции.*



Решение:

1) Центр окружности, описанной вокруг трапеции лежит на ее основании => $\angle ACD$=90^0 (вписанный угол, опирающийся на диаметр)

2) ABCD – равнобедренная трапеция

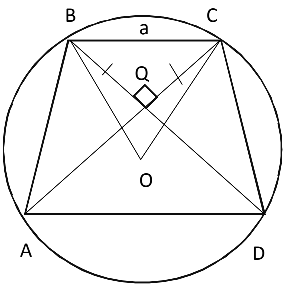
3) $\Delta ACD;\ \angle C = 90^0, AD = 20, CH == 8$

CD^2=HD*AD, CD^2=4*20=80, CD=$4\sqrt{5}$

AC^2=AH*AD, AC^2=16*20=320, AC=$8\sqrt{5}$

<u>Ответ:</u> $4\sqrt{5}; 8\sqrt{5}$

Задача 2. *В трапеции ABCD (AB и CD – основания) меньшее основание равно a. углы, прилежащие к этому основанию, равны 105^0, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.*

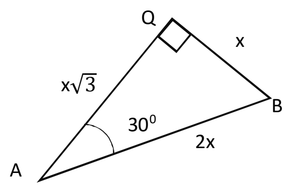


Решение: **I способ.**

1) Дополнительное построение т.к трапеция равнобедренная, то можно описать окружность).

2) $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC * BD * \sin 90^0 = \frac{1}{2}AC * BD = \frac{1}{2}AC^2$

3) Пусть QB=x, AB=2x (т.к $\angle BAQ = 30^0$, AQ=y по теореме Пифагора:



$4x^2=x^2+y^2 \Rightarrow y^2=3x^2 \Rightarrow y=\sqrt{3}x \Rightarrow \frac{BQ}{AQ} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow AD = \sqrt{3}a$

4) $\Delta BQC \sim \Delta AQD => \frac{BQ}{QD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}, AD = a\sqrt{3}$

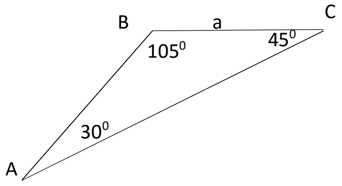
5) $\Delta BQC: x^2 + x^2 = a^2, BQ = x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

6) $AQ = x\sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{2}} * \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

7) $AC = AQ + QC = \frac{a\sqrt{6}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$

8) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}\right)^2 = \frac{2a^2(2+\sqrt{3})}{4} = \frac{a^2(2+\sqrt{3})}{2}$

II способ.



Решение:

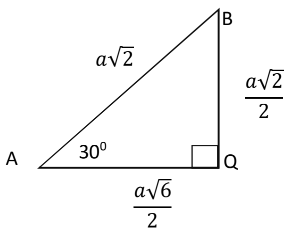
1) ΔABC; по теореме синусов

$\frac{BC}{\sin 30^0} = \frac{AC}{\sin 105^0}$;

$AC = \frac{BC \sin 105^0}{\sin 30^0} = 2a(\frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC * BD = \frac{a^2(2+\sqrt{3})}{2}$

III способ.



Решение: $S_{ABQ} = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2} * \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

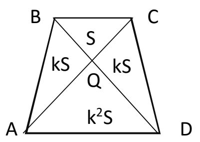
$S_{CQD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$S_{AQD} = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{6}}{2} * \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^2}{4}$

$S_{BQC} = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2} * \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{4}$

$S_{ABCD} = \frac{a^2(2+\sqrt{3})}{2}$

IV способ.



1) Диагонали трапеции рассекают ее на 4 треугольника.

Пусть $S_{BQC}=S$, тогда $S_{AQD}=k^2S$; $S_{ABQ}=S_{CQD}=kS$, где k – коэффициент подобия; $k=\sqrt{3}$

Решение: $S_{BQC} = \frac{1}{2} BQ * QC = \frac{1}{2} * \frac{a}{\sqrt{2}} * \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4}$

$S_{AQD} = (\sqrt{3})^2 * \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

$S_{ABQ} = S_{CQD} = \sqrt{3} * \frac{a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

$S_{ABCD} = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} + 2 * \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^2(2+\sqrt{3})}{2}$

V способ. т.к трапеция равнобедренная, то можно описать окружность

$\Delta ABC; R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{a}{2\sin 30^0} = a$

$R = \frac{AB*BC*AC}{4S} => S_{ABC} = \frac{AB*BC*AC}{4R} = \frac{a\sqrt{2}*a*a\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{8a} = \frac{a^2(\sqrt{3}+1)}{4}$

$S_{ACD} = \frac{AC*CD*AD}{4R} = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)*a\sqrt{2}*a\sqrt{3}}{8a} = \frac{a^2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4}$

$S_{ABCD} = \frac{a^2(\sqrt{3}+1)}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{a^2(2+\sqrt{3})}{2}$

VI способ. По теореме косинусов найти углы при вершине О и, используя формулу для площади треугольника $S = \frac{1}{2}a * b * \sin C$, найти сумму площадей треугольников, равную площади трапеции.

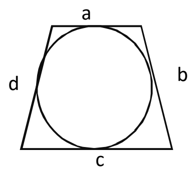
Вывод: Задача решена несколькими способами. Использованы различные формулы для вычисления площади трапеции. Тем она и интереснее. Наиболее рациональный способ –второй.

3.4.2. Трапеция, описанная вокруг окружности

Если трапеция описана около окружности, то у нее также есть ряд хороших свойств, которые используются при решении задач.

1) Окружность можно вписать в трапецию тогда и только тогда, когда сумма оснований трапеции равна сумме боковых сторон.

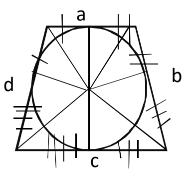
a+c=b+d



2) Средняя линия равна полусумме боковых сторон

$$MN = \frac{a+b}{2}$$

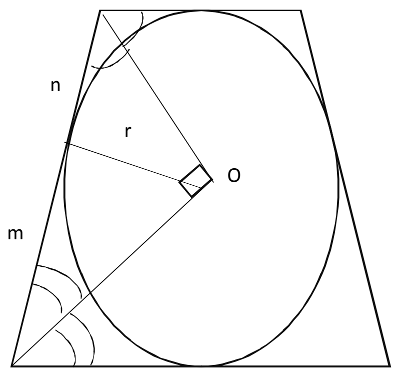
3) Радиус вписанной окружности равен половине высоты трапеции



1) $r = \frac{h}{2}$

4) Площадь трапеции равна произведению полупериметра на радиус

$$S = \frac{a + c}{2} * 2r = (a + c) * r = \frac{1}{2} P * r = p * r$$



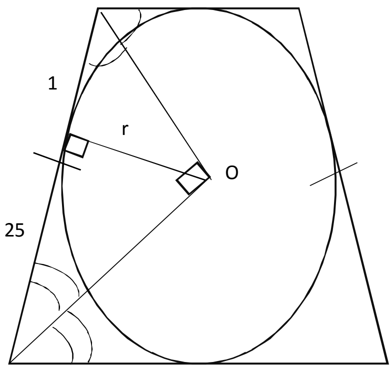
5) центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис

6) Боковая сторона трапеции видна из центра вписанной окружности под прямым углом

7) Радиус равен среднему пропорциональному отрезков боковой стороны

$$r = \sqrt{mn}$$

Задача 1. *В равнобедренную трапецию вписана окружность. Отрезки, высекаемые на боковой стороне точкой касания, равны 1 и 25. Найти площадь трапеции.*



Решение: r^2=1*25, r=5

S=p*r=26*5=130

<u>Ответ:</u> 130

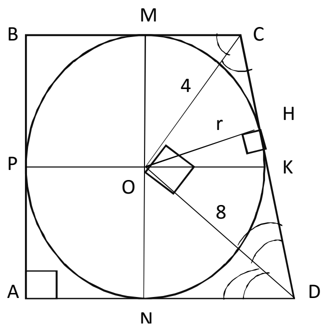
Задача 2. *Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстоянии 8 см и 4 см. Найти среднюю линию трапеции.*

Решение:

1) Из центра вписанной окружности боковая сторона видна под углом 90^0
2) $\Delta\mathrm{COD}, \angle\mathrm{O} = 90^0, OC = 4, OD = 8$

По теореме Пифогора CD=$4\sqrt{5}$

3) r=OH= $\frac{OC*OD}{CD} = \frac{4*8}{4\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$



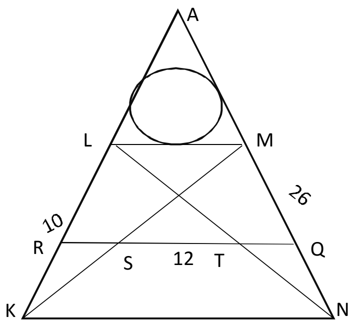
4) AB= $\frac{16\sqrt{5}}{5}$
5) PK= $\frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2}(\frac{16\sqrt{5}}{5} + \frac{8\sqrt{5}}{5} =$
$= \frac{1}{2} * \frac{36\sqrt{5}}{5} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$

<u>Ответ:</u> $\frac{18\sqrt{5}}{5}$

ГЛАВА 4. Задачи ЕГЭ

Задача 1. *Боковые стороны KL и MN трапеции KLMN равны 10 и 26 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 24. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.*

Решение: Возможные варианты



а) ΔKLM, RS – средняя линия треугольника

$$RS = \frac{LM}{2} => RS \parallel LM; KS = SM =>$$ по теореме Фалеса $KR = RL$

1) Аналогично в ΔNLM $QT = \frac{LM}{2}$
2) RQ= RS+ST+TQ=LM+ST
   24=LM+12
   LM=24-12=12

KN=2RT=2*(RS+ST)=2*($\frac{LM}{2}$+ST)=2*(6+12)=36

3) $\Delta ALM \sim \Delta AKN$(по трем углам)

$\frac{KN}{LM} = \frac{AK}{AL} = \frac{AN}{AM}$

$\frac{KN}{LM} = \frac{AK}{AL}$ $\qquad$ $\frac{KN}{LM} = \frac{AN}{AM}$

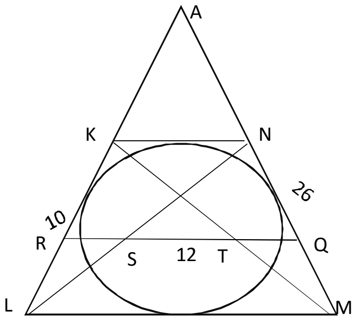
$3 = \frac{AL+LK}{AL}$ $\qquad$ $3 = \frac{AM+MN}{AM}$

$3 = \frac{AL+10}{AL}$ $\qquad$ $3 = \frac{AM+26}{AM}$

3AL=AL+10 $\qquad$ 3AM=AM+26

2AL=10 $\qquad$ 2AM=26

AL=5 $\qquad$ AM=13



4) $\Delta ALM -$ прямоугольный т.к AL=5, AM=13, LM=12 (тройка Пифагора)

S=$\frac{AL*LM}{2} = 30$ $\qquad$ P=30, p=15

$$r = \sqrt{\frac{(p-AL)(p-LM)(p-AM)}{p}} = 2$$

<u>б)</u> 1) Аналогично KN=12, LM=36

2) $\Delta AKN \sim \Delta ALM$

$\frac{LM}{KN} = \frac{AL}{AK} = \frac{AM}{AN}$

$\frac{LM}{KN} = \frac{AL}{AK}$ $\qquad 3 = \frac{10+AK}{AK} \quad 2AK = 10 \quad AK = 5$

Аналогично AN=13

AL=15, AM=39

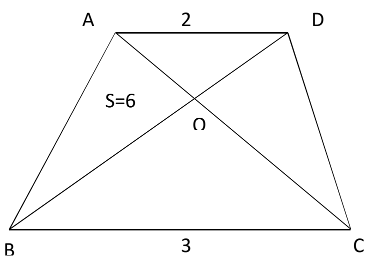
1) $\Delta ALM -$ прямоугольный т.к AL=15,AM=39,LM=36 (тройка Пифагора)

S=$\frac{AL*LM}{2}=270$ P=90, p=45

$$r=\sqrt{\frac{(p-AL)(p-LM)(p-AM)}{p}}=6$$

Ответ: 2 или 6

Задача 2. *Диагонали AC и BD трапеции ABCD пересекаются в точке O, основание AD трапеции равно 2, BC=3, площадь треугольника AOB равна 6. Найти площадь трапеции.*



Решение:

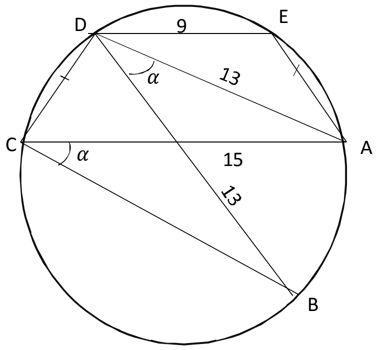
1) Треугольники, прилежащие к боковым сторонам трапеции, равновелики => $S_{AOB}=S_{DOC}=6$
2) $\Delta AOD \sim \Delta BOC$ с коэффициентом подобия $k=\frac{2}{3}$
3) $\Delta ABO \sim \Delta ABD$ имеют общий угол B => $\frac{S_{AOB}}{S_{ABD}}=\frac{AB*BO}{AB*BD}=\frac{BO}{BD}=\frac{3}{5}$ $=> S_{ABD}=6:\frac{3}{5}=10$, тогда S_{AOD}=4
4) $\frac{S_{AOD}}{S_{BOC}}=k^2=\frac{4}{9} => S_{BOC}=4:\frac{4}{9}=9$
5) $S_{ABCD}=6+6+4+9=25$

Ответ: 25

При решении задач использованы свойства:

- площадей треугольников, на которые трапецию разбивают её диагонали
- площадей треугольников, имеющих общий угол

Задача 3. *В трапеции CDEA основание CA=15, основание DE=9, DA=13. На описанной около трапеции CDEA окружности взята отличная от A точка B так, что DB=13. Найдите длину отрезка CB и площадь пятиугольника ABCDE.*



Решение:

1) по условию около трапеции CDEA можно описать окружность, поэтому CDEA – равнобедренная трапеция

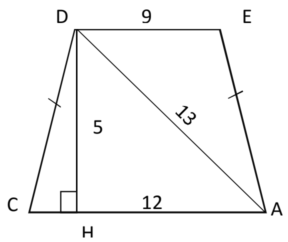
2) равные хорды стягивают равные дуги CD=EA=>$\cup\, CD = \cup\, EA$

DA=DB=>$\cup\, AED = \cup\, BCD =>$

$=> \cup\, EA + \cup\, DE = \cup\, BC + \cup\, CD =>$

$=> \cup\, DE = \cup\, BC => BC = DE = 9$

3) в равнобедренной трапеции высота, проведённая к основанию, делит его на два отрезка, больший из которых равен средней линии



HA=$\frac{1}{2}(DE + AC) = \frac{1}{2}(9 + 15) = 12$

DH=5

4) $S_{CDEA} = \frac{1}{2}(DE + AC) * DH = 60$

5) $\angle BCA = \angle BDA = \frac{1}{2} \cup AB$

6) ΔBDA: $AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD * AD * \cos\alpha$

ΔBCA: $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC * AC * \cos\alpha$

=>13^2+13^2 – 2*13*13$\cos\alpha$=9^2+15^2 – 2*9*15$\cos\alpha$

2*169 – 2*169$\cos\alpha$=306—270$\cos\alpha$, 68$\cos\alpha$=32, $\cos\alpha = \frac{8}{17} => \sin\alpha = \frac{15}{17}$

7) $S_{BCA} = \frac{1}{2} BC * CA \sin\alpha = \frac{1}{2} * 9 * 15 * \frac{15}{17} = \frac{2025}{34}$

8) $S_{BCDEA} = 60 + \frac{2025}{34} = \frac{4065}{34}$

<u>Ответ:</u> 9; $\frac{4065}{34}$

При решении задачи использованы:

- Свойства вписанных углов
- Свойства дуг, стягивающимися равными хордами
- Теорема Пифагора
- Теорема косинусов
- Формулы площадей треугольников и трапеции
- Свойства трапеции, вписанной в окружность

Заключение

При решении геометрических задач используются три основных метода: <u>геометрический</u> – когда требуемое утверждение вводится с помощью логических рассуждений из ряда известных свойств, теорем; <u>алгебраический</u>

– когда геометрическая величина вычисляется на основании различных зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений; векторно-координатный.

Какой бы путь решения ни был выбран, успешность его использования зависит от знания определений и свойств геометрических фигур, от знания теорем и умения их применять.

Обучение математике происходит в процессе решения задач. Знание особых приемов и подходов к и х решению позволяют решать их правильно, просто и оригинально.

Тема учебно-исследовательской работы «Геометрия трапеции» выбрана не случайно. Ключевые задачи планиметрии составляют основу для решения стереометрических задач. И те и другие ежегодно содержатся в задачах ЕГЭ. Таким образом, выбранная тема актуальна и перспективна.

В данной работе систематизированы ранее известные свойства трапеции, доказаны и проведены исследования других свойств, сформулированы ключевые задачи. Рассмотрены основные подходы к решению задач о трапециях: подобие и пропорциональность, дополнительные построения в трапециях, трапеции и площадь, трапеции и окружности. Решение задач с помощью дополнительных построений не только быстрей и проще, но и намного интересней, чем решение привычными способами. Это мощный метод решения задач о трапециях.

В ходе работы решено большое количество задач различными способами и разных уровней сложности. Это позволило осмыслить и создать целостное представление о трапеции и ее свойствах, усвоить на практике приобретенные знания.

Таким образом, цель работы достигнута. Выдвинутая гипотеза подтвердилась.

Новизна работы заключается в углубленном изучении теоретического материала по данной теме, заключительным этапом которой является составление банка ключевых задач о трапециях.

Практическая значимость:

- Приобретен определенный опыт решения планиметрических задач
- Знания приемов и подходов к решению задач о трапециях позволяют успешно решать задачи ЕГЭ, конкурсные и олимпиадные задачи
- Возможность использования материалов исследования, компьютерной презентации при повторении курса и при подготовке к экзаменам.
- Решение задач – практическое искусство. Учит думать, развивать логическое мышление

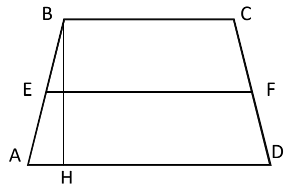
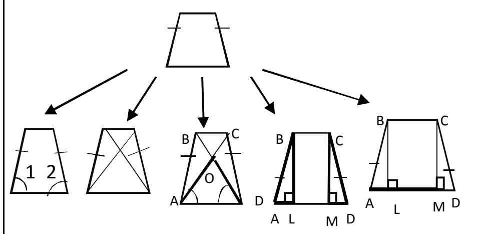
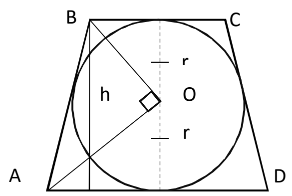
Список использованной литературы

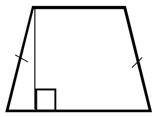
1. Гордин Р.К ЕГЭ 2010. Математика. Задача С4/ Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2012 -148 с.

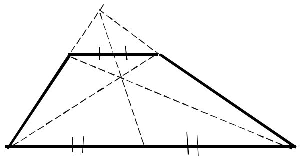
2. Готман Э.Г. задачи по планиметрии и методы их решения: Пособие для учащихся. – М.: Просвещение: АО «Учеб.лит.», 1996. – 240 с.
3. ЕГЭ 2014. Математика. Типовые тестовые задания/ Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010
4. Единый государственный экзамен 2014. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся/ ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2014
5. Корянов А.Г. математика. ЕГЭ 2010. Задания типа С4. Многовариантные задачи по планиметрии http://www.alexlarin.narod.ru/ege/2010/C4agk/pdf
6. Шарыгин И.Ф. сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами/ И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордин. – М.: ООО «Издательство Астрель»»: ООО «Издательство АСТ», 2001. – 400 с.: ил.

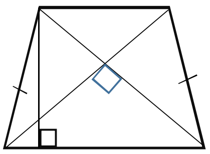
ПРИЛОЖЕНИЕ

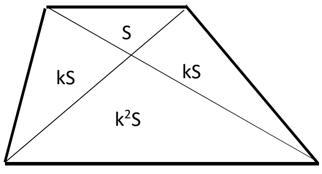
Ключевые задачи на трапецию

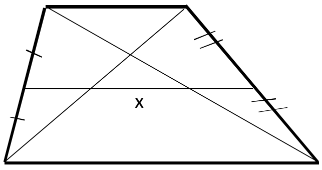
AD‖ BC; AD и BC – основания; E – середина AB F – середина CD EF=ι – средняя линия BH – высота	EF=$\iota =$  $\frac{1}{2}(AD + BC)$ S=$\frac{1}{2}(AD + BC) * BH$ S=$\iota * BH$
В равнобедренной трапеции: • Углы при основании равны ($\angle 1 = \angle 2$) • Диагонали равны (d_1=d_2) • ΔAOD – равнобедренный • Если BL $\perp$ AD, CM $\perp$ AD, То $\Delta ABL = \Delta DCM$ AL=MD=$\frac{a-b}{2}$ • Если BL$\perp$ AD, CM$\perp$ AD, То AM=LD=ι ι – средняя линия	
Если окружность вписана в трапецию, то: • Суммы противоположных сторон AB+CD=AD+BC • Центр окружности – точка пересечения биссектрис, проведенных из углов, прилежащих к одной боковой стороне трапеции (AO; BO – биссектрисы) • $\angle \mathrm{BOA} = 90^0$ • Высота трапеции равна удвоенному радиусу вписанной окружности h=2r $S = \frac{1}{2}(AD + BC) * h = \frac{1}{2}(AB + CD) * h$	








S
kS
kS
k²S


x