Краевая научно-практическая конференция

учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Векторный метод решения задач

Деркач Юлия,

11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,

Степанькова Татьяна Николаевна,

учитель математики высшей категории.

Пермь. 2015.

Содержание

Приложение
42

ВВЕДЕНИЕ

Как подготовиться к экзамену по математике?

Анализ результатов ЕГЭ показывает, что основные трудности вызывают геометрические задачи. Почему? Очевидно, что в алгебре, тригонометрии, началах математического анализа разработана целая серия решения типовых заданий. Так как самое трудное в решении любой задачи – планирование своих действий, то если есть алгоритм, значит, есть программа действий, а потому трудности, если они имеют место, носят чаще всего технический, а не принципиальный характер.

При решении геометрических задач, как правило, алгоритмов нет, и выбрать наиболее подходящую к данному случаю теорему из их большого количества трудно

А еще это связано с тем, что редко какая задача в геометрии может быть решена с использованием определенной формулы. При решении большинства задач не обойтись без привлечения разнообразных фактов теории, доказательства тех или иных утверждений, справедливых лишь при определенном расположении элементов фигур. Но и при хорошем значении теории приобрести навык в решении задач можно лишь решив достаточно много задач, начиная с простых и переходя к более сложным, а самое главное, владея различными методами решения задач..

Гипотеза: овладение векторным методом позволит найти эффективный путь к решению геометрических задач.

Поэтому нами была выбрана тема: «Векторный метод в стереометрии».

Цель работы: рассмотрение понятийного аппарата векторного метода решения задач, применение его к решению различных типов задач.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1.Изучить научно-методическую литературу по данной теме;

2.Освоитьвекторный метод как один из эффективных методов решения различных геометрических задач (как аффинных, так и метрических) и доказательства теорем;

3. Классифицировать задачи решаемые векторным методом.

4. Использовать векторный метод при решении задач;

5. Познакомиться с широким применением векторного аппарата в других областях знаний: технике, физике, химии.

ГЛАВА I. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА, ПОНЯТИЙНЫЙ АППАРАТ.

Многие геометрические и физические величины полностью определяются, если задана их числовая характеристика. Такими величинами являются длина линии, объем тела, масса, работа, температура и т. д. Число, характеризующее ту или иную величину, получается в результате сравнения ее с выбранным эталоном, принятым за единицу измерения. Такие величины в математике называются скалярными величинами или просто скалярами.

Однако иногда встречаются величины более сложной природы, которые не могут быть полностью охарактеризованы их числовым значением. К подобным величинам относятся сила, скорость, ускорение и т. д. Для полной характеристики указанных величин, кроме числового значения, необходимо указать их направление. Такие величины в математике называются векторными величинами или векторами.

Для графического изображения векторов пользуются направленными отрезками прямой. В элементарной геометрии, как известно, отрезком называется совокупность двух различных точек А и В вместе со всеми точками прямой, лежащими между ними. Точки A и B называются концами отрезка, при этом порядок, в котором они берутся, не существен. Однако если отрезок AB используется для графического изображения векторной величины, то порядок, в котором указаны концы отрезка, становится существенным. Пары точек AB и B A задают один и тот же отрезок, но различные векторные величины.

В геометрии вектором называется направленный отрезок, т. е. отрезок, для которого указано, какая из концевых его точек считается первой, какая — второй. Первая точка направленного отрезка называется началом вектора, а вторая точка — концом.

Направление вектора на чертеже отмечается стрелкой, обращенной острием к концу вектора.

В тексте вектор записывается двумя заглавными буквами латинского алфавита со стрелкой наверху. Так, на рисунке 1.1.,а изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$, причем A, C, E, G — соответственно начала, а B, D, F, H — концы данных векторов. В некоторых случаях вектор обозначается также - одной строчной буквой, например, $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$(рис. 1,б)

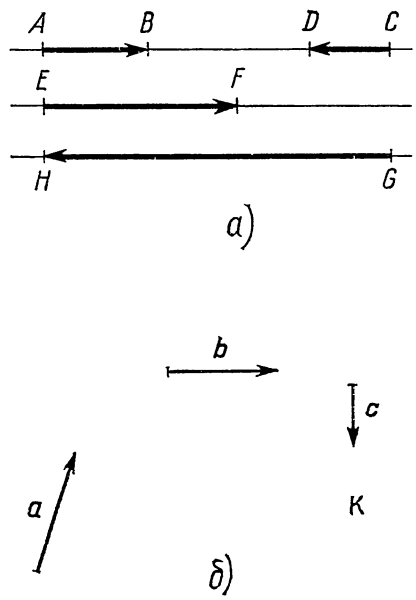


Рис.1.1.

Понятийный аппарат и умения, которыми должен овладеть, чтобы научиться решать аффинные задачи векторным методом:

- основные понятия: вектор, начало вектора, конец вектора, одинаково направленные векторы, противоположно направленные векторы, абсолютная величина вектора (модуль вектора), равные векторы, нулевой вектор, неколлинеарные векторы;
- основные действия, умение выполнять которые должно быть сформулировано у учащихся: сложение векторов (пользуясь «правилом треугольника», «правилом параллелограмма» и «правилом параллелепипеда»); вычитание векторов; умножение векторов на число; представление вектора в виде суммы, разности двух векторов, в виде произведения вектора на число; замена вектора ему равным при помощи параллельного переноса; представление вектора в виде его разложения по

двум неколлинеарным векторам; переход от соотношения между векторами к соотношению между их длинами и выполнение обратного действия;

- действия для овладения компонентами метода: перевод геометрических терминов на язык векторов и решение обратной задачи; перевод условия задачи на язык векторов, т.е. составление системы векторных равенств по условию задачи; выбор базисных векторов, разложение всех введенных в рассмотрение векторов по базисным векторам; упрощение системы векторных равенств; замена векторных равенств алгебраическими.

1.2. СИСТЕМА КОМПЛАНАРНЫХ ВЕКТОРОВ

По аналогии с предыдущим введем следующее определение: конечная или бесконечная система векторов называется компланарной, если в пространстве существует плоскость, которой параллельны все векторы системы. На рисунке1.2 векторы$\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$,$\overrightarrow{A_3A}$,$\overrightarrow{A_2B}$ образуют компланарную систему. Векторы$\overrightarrow{OE_1}$,$\overrightarrow{OE_2}$,$\overrightarrow{OE_3}$ не образуют компланарной системы.

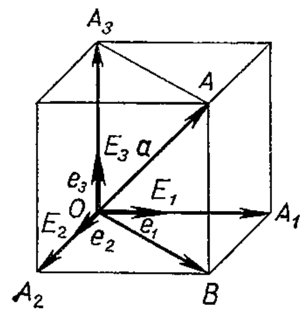


Рис.1.2.

Легко видеть, что любая система, состоящая из двух векторов, всегда компланарна. Далее, если некоторая система компланарна, то любая ее часть также компланарна. Если все векторы компланарной системы перенести в одну точку О пространства, то, очевидно, их концы А вместе с точкой О будут лежать в одной плоскости. Этим по существу объясняется термин «компланарность», что означает принадлежность одной и той же плоскости.

Рассмотрим один частный, но весьма важный случай бесконечной системы компланарных векторов. Возьмем в пространстве некоторую плоскость π и рассмотрим множество всех векторов пространства, параллельных этой плоскости. Это множество, очевидно, образует компланарную систему векторов, которая называется двумерным векторным подпространством. Итак, двумерное векторное подпространство — это совокупность всех векторов пространства, параллельных некоторой плоскости

π. Отметим, что любое двумерное подпространство, так же как и одномерное, содержит нуль-вектор.

1.3. БАЗИС СИСТЕМЫ КОМПЛАНАРНЫХ ВЕКТОРОВ

Если конечная или бесконечная система компланарных векторов содержит хотя бы два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$ и $\overrightarrow{\mathrm{e}_2}$, то любой вектор $\vec{\boldsymbol{a}}$ этой системы линейно выражается через $\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$ и $\overrightarrow{\mathrm{e}_2}$, т. е. $\vec{a}= \alpha\overrightarrow{\mathrm{e}_1} +\beta\overrightarrow{\mathrm{e}_2}$, где α и β — действительные числа.

Любая конечная система компланарных векторов, состоящая более чем из двух векторов, линейно зависима.

Доказательство. Пусть $\vec{a}$ — произвольный вектор системы. Перенесем векторы $\vec{a}$,$\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$ и $\overrightarrow{\mathrm{e}_2}$в произвольную точку O пространства и обозначим через A, E_1, E_2 их концы. В силу компланарности данной системы точки O, E_1,E_2 и A лежат в одной плоскости. Но векторы$\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$ и $\overrightarrow{\mathrm{e}_2}$не коллинеарны, поэтому O, E_1 и E_2 не лежат на одной прямой (рис. 1.3.).

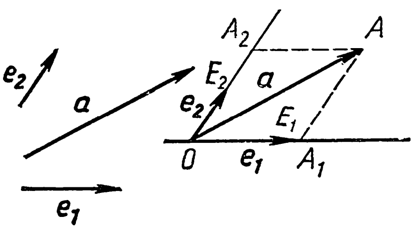


Рис.1.3.

Проведем через точку A прямые, параллельные векторам $\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$ и$\overrightarrow{\mathrm{e}_2}$. Обозначим через A_1 иA_2 точки пересечения этих прямых соответственно с прямыми $0E_1$ и $0\mathrm{E}_2$. Очевидно, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} =\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$. С другой стороны, векторы $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$и$\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$ и $\overrightarrow{\mathrm{e}_2}$ коллинеарны и $\overrightarrow{\mathrm{e}_1} \neq 0$, $\overrightarrow{\mathrm{e}_2} \neq 0$, поэтому существуют такие $\alpha \neq 0, \beta \neq 0,$ что $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = \beta\overrightarrow{\mathrm{e}_2}$. Подставив эти выражения в предыдущее соотношение, получим (3).

Теперь докажем вторую часть теоремы. Пусть данная система и $k > 2$. Если векторы $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ коллинеарны, то они линейно зависимы, поэтому согласно лемме система линейно зависима. Если $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$не коллинеарны, то согласно первой части теоремы имеем: $\vec{a}_3 =\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \beta_1\overrightarrow{a_2}$. Мы видим, что часть системы линейно зависима, следовательно, согласно лемме вся система линейно зависима.

Введем следующее определение: базисом системы компланарных векторов называется совокупность любых двух неколлинеарных векторов этой системы, взятых в определенном порядке.

Предыдущая теорема показывает, что любой вектор компланарной системы линейно выражается через базис.

Легко видеть, что каждое двумерное векторное подпространство содержит хотя бы два неколлинеарных вектора, т. е. базис. Известно, что любой вектор $\vec{a}$ этого подпространства линейно выражается через $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$. В случае подпространства, в отличие от общего случая системы компланарных векторов, вектор $\vec{a}$, имеющий вид, при любых действительных α и β принадлежит подпространству. Таким образом, если $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ — базис двумерного подпространства, то это подпространство есть множество векторов $\vec{a}$ при всевозможных действительных значениях α и β.

Для того чтобы три вектора $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы.

Доказательство. В самом деле, если система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$ компланарна, то она линейно зависима.

Обратно, пусть система линейно зависима: $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2}+\alpha_3\overrightarrow{a_3} = 0$

Если, например, $\alpha_3 \neq 0$, то из данного соотношения получаем:

$\overrightarrow{a_3} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \cdot \overrightarrow{a_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \cdot \overrightarrow{a_2}$. Если π — некоторая плоскость, параллельная векторам $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$, то отсюда видно, что $\overrightarrow{a_3}$ является вектором, параллельным той же плоскости.

1.4. ОСНОВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ВЕКТОРНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Для решения задач необходимоовладеть следующими умениями, которые и являются компонентами векторного метода:

1) перевод условия задачи на язык векторов, в том числе:
   - введение в рассмотрение векторов;
   - выбор базисных векторов;

- разложение всех введенных векторов

2) составление системы векторных равенств (или одного равенства).

3) упрощение векторных равенств

4) замена векторных равенств алгебраическими уравнениями и их решения

5) объяснение геометрического смысла полученного решения этой системы (или одного уравнения).

II. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ВЕКТОРНЫМ МЕТОДОМ

2.1 РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ТРЁМ ДАННЫМ НЕКОМПЛАНАРНЫМ ВЕКТОРАМ

Решение любой геометрической задачи на вычисление сводится, в сущности, к нахождению величин двух типов: расстояний и углов. Если в пространстве задан некоторый базис (в частности, прямоугольный),т.е. тройка некомпланарных векторов, то на основании теоремы любой вектор пространства можно разложить по векторам этого базиса, причём единственным образом. Если известны длины векторов, образующих базис, углы между ними и разложение некоторого вектора по векторам этого базиса, то, используя свойства скалярного произведения, можно определить длину такого вектора и угол, образуемый им с любым другим вектором, разложение которого по векторам этого базиса известно. Таким образом, векторы позволяют находить решения довольно широкого класса геометрических задач, а умение определять разложение вектора по базисным векторам является важнейшим фактором их решения.

Задача 1. Основанием четырёхугольной пирамиды *SABCD*является параллелограмм *ABCD*. Точки *P*и *K* – середины рёбер *SD* и *BC* соответственно. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{SD}$ и $\overrightarrow{PK}$ по векторам $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$.

Решение.(см. рис. 2.1.).

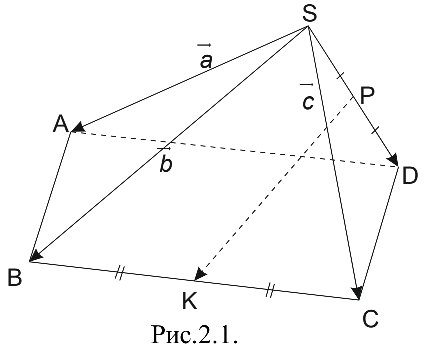


Рис.2.1.

1. $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD}$, но $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}$, поэтому $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

2. Так как K − середина $BC, \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SK}$, но $\overrightarrow{PS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)$,поэтому $\overrightarrow{PK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c} - \left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)\right) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + 0 * \vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

Ответ: $\overrightarrow{SD} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{PK} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

2.2. ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ СДОКАЗАТЕЛЬСТВОМ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ И ОТРЕЗКОВ, ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

При решении этих задач наиболее часто используется признак коллинеарности двух векторов и единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам.

Задача 1. Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям.

Дано:

ABCD– трапеция

AC, BD – диагонали

M– середина AC

N– середина BD

Доказать: MN || AD.

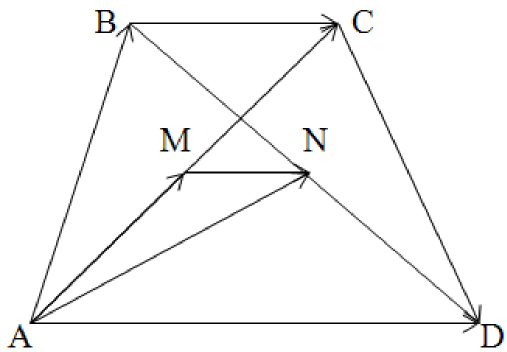


Рис.2.2.

Анализ. Покажем, что *MN* || *AD*. Для этого достаточно показать, что $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен $\overrightarrow{AD}$.

Решение. Так как *M* и *N* – середины отрезков *AC* и *BD*, то(соотношение 3)

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right),$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\right).$$

Но $\overrightarrow{BC}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AD}$, поэтому $\lambda\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Тогда

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \lambda\overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}(1-\lambda)\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AD},$$

Тогда (по соотношению 1) $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен $\overrightarrow{AD}$, что и требовалось доказать.

Задача 2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M— середина диагонали A_1C_1 грани $A_1B_1C_1D_1$, точка K— середина ребра BB_1. Докажите, что прямые A_1B_1, KM и BC_1 параллельны некоторой плоскости.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$– параллелепипед.

M— середина диагонали A_1C_1.

K— середина ребра BB_1.

Доказать A_1B_1, KM и $BC_1 \parallel \boldsymbol{\gamma}$.

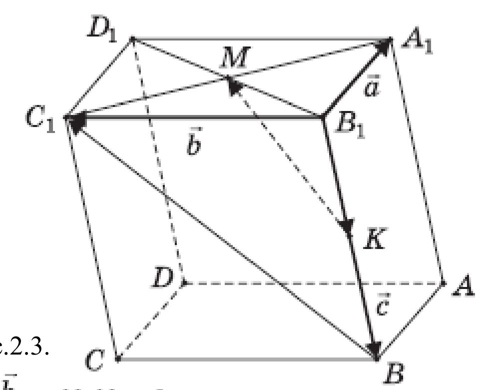


Рис.2.3.

Решение. Введем векторы: $\overrightarrow{B_1A_1} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{B_1C_1} = \vec{b}, \quad B_1B = c$

Тройку $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ некомпланарных векторов примем в качестве базиса. Разложим векторы $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{KM}$ по векторам этого базиса.

Имеем: $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{B_1C_1} - \overrightarrow{B_1B} = \vec{b} - \vec{c};$

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{B_1M} - \overrightarrow{B_1K} = 0,5\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - 0,5\vec{c} = 0,5\vec{a} + 0,5b - 0,5\vec{c};$$

$$\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{BC_1} = \vec{a} + \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \Rightarrow \mathbf{0,5}\left(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{BC_1}\right) = 0,5\vec{a} + 0,5\vec{b} - 0,5\vec{c}.$$

Тогда $\overrightarrow{KM} = 0,5\left(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{BC_1}\right) = 0,5\overrightarrow{B_1A_1} + 0,5\overrightarrow{BC_1}.$

Это означает, что векторы $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{KM}$ компланарны, следовательно, они параллельны некоторой плоскости $\boldsymbol{\gamma}$, тогда этой плоскости параллельны и прямые A_1B_1, KM и BC_1, для которых векторы являются направляющими.

2.3. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДЕЛЕНИЯ НЕКОТОРОГО ОТРЕЗКА В ЗАДАННОМ ОТНОШЕНИИ ИЛИ НА НАХОЖДЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ, В КОТОРОМ ТОЧКА ДЕЛИТ ОТРЕЗОК

Следующая группа задач – это задачи об отношениях отрезков. Это распространенный тип задач в котором требуется определить в каком отношении данная плоскость делит тот или иной отрезок. Как правило, такая плоскость является секущей плоскостью некоторого многогранника, а отрезком, упомянутым выше служит одно из рёбер этого многогранника.

При решении подобных задач следует выбрать тройку базисных векторов(обычно связанных с многогранником, например, выходящих из какой-либо его вершины). Затем необходимо ввести подлежащие определению неизвестные: их в большинстве случаев три, - одно позволяет найти искомое отношение , а два других – коэффициенты в условии компланарности некоторых трёх векторов, принадлежащих данной плоскости. После этого, получив двумя способами разложение какого-либо вектора по базисным нужно, используя единственность разложения (т.е. теорему). Приравнять коэффициенты в разложениях и получить три уравнения с тремя введёнными неизвестными. Рассмотрим несколько характерных задач.

Задача 1. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$на рёбрах AB и BB_1взяты точки P и K соответственно, причём $AP = 3 * PB, B_1K = 4 * BK.$ Пусть O является точкой пересечения диагоналей грани BB_1C_1C. Найдите, в каком отношении плоскость PKOделит ребро AC.

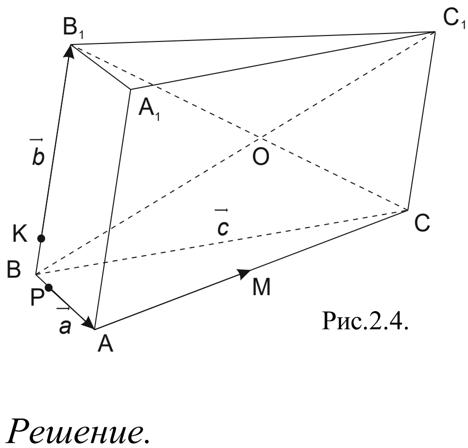


Рис.2.4.

Решение.

1. Пусть плоскость PKO пересекает ребро AC в точке M и пусть $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BB_1} = \vec{b}, \overrightarrow{BC} = \vec{c}$ − базисные векторы. Так как векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, $\overrightarrow{AM} = x * \overrightarrow{AC}$, где x −некоторое число. Поэтому $\overrightarrow{AM} = x * \overrightarrow{AC} = x * (\vec{c} - \vec{a})$.

Итак, $\overrightarrow{AM} = -x * \vec{a} + x * \vec{c}$.

2. С другой стороны, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KM} = -\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \overrightarrow{KM}$. Так как точки K, O, M, P принадлежат одной плоскости, то векторы $\overrightarrow{KO}, \overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{KP}$ компланарны. Поэтому, в силу теоремы,$\overrightarrow{KM} = y * \overrightarrow{KP} + z * \overrightarrow{KO} = y * \left(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BP}\right) + z * \left(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BO}\right) == y * \left(-\frac{1}{5}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a}\right) + z * (-\frac{1}{5}\vec{b} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right))$,где y и z −некоторые числа. Итак,

$$\overrightarrow{AM} = \left(-1 + \frac{1}{4}y\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}y + \frac{3}{10}z\right)\vec{b} + \frac{1}{2}z\vec{c}.$$

3. В силу единственности разложения вектора $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, получаем следующую систему уравнений $\begin{cases} -1 + \frac{1}{4}y = -x, \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5}y + \frac{3}{10}z = 0, \\ \frac{1}{2}z = x. \end{cases}$

   Из первого уравнения получаем $y = 4 - 4x$, из третьего – что $z = 2x$. Подставив эти выражения во второе уравнение, получим: $\frac{1}{5} - \frac{1}{5}(4 - 4x) + \frac{3}{5}x = 0$, откуда $x = \frac{3}{7}$, т. е. $AM : AC =$

$$= 3 : 7, \text{а значит}, AM : MC = 3 : 4\,.$$

   Ответ:3:4.

Для того чтобы точка Cделила отрезок ABтак, что$\left|\overrightarrow{AC}\right| : \left|\overrightarrow{CB}\right| = m : n$,необходимо и достаточно, чтобы для произвольной точки О выполнялось равенство:$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{OB}$

Задача 2. На стороне АСтреугольника АВСвзята точка Мтак, что $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right|$, а на продолжении стороны ВСтакая точка Nчто $\left|\overrightarrow{BN}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$. В каком отношении точка Рпересечения АВи MN делит каждый из этих отрезков.

Дано:

ABC– треугольник

$$|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BN}| = |\overrightarrow{BC}|$$

$N \in BC$

$MN \cap AB = P$

Найти: $\frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{PN}|}, \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$

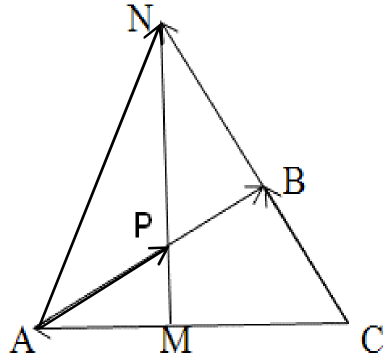


Рис.2.5.

Решение:

Пусть $\frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{PN}|} = x$ и $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$ =y

Выберем базисные векторы $\overline{CB} = \vec{a}, \overline{CA} = \vec{b}$.

Разложим вектор $\overrightarrow{AP}$ по базисным двумя различными способами

а) $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$ =y, тогда $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{y}{y+1}$, т.к. векторы $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AB}$ сонаправлены

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{y}{y+1} \cdot (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{y}{y+1} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1} \cdot \vec{a} - \frac{y}{y+1} \cdot \vec{b}$$

б) $\frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{PN}|} = x, \overrightarrow{AP} = \frac{1}{x+1} \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{x}{x+1} \cdot \overrightarrow{AN}$

Но $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{4}\vec{b},\ \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CA} = 2\vec{a} - \vec{b}$. Поэтому

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{x+1} \cdot \left(-\frac{1}{4}\vec{b}\right) + \frac{x}{x+1} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = \frac{2x}{x+1} \cdot a - \frac{1+4x}{4(x+1)} \cdot b$$

Учитывая единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам(соотношение 7) , получим систему

$$\begin{cases} y/(y+1) = 2x/(x+1), \\ y/(y+1) = (1+4x)/(4(x+1)), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/4, \\ y = 2/3. \end{cases}$$

Следовательно, $\frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{PN}|} = \frac{1}{4}$ и $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{2}{3}$

Задача 3. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней AA_1B_1B и BB_1C_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки соответственно H и M так, что отрезки MH и A_1C параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

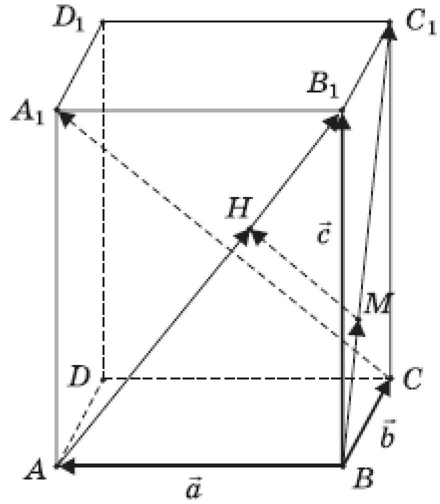


Рис.2.6.

Решение.

Введем векторы: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{c}$

Тройку $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ примем в качестве базиса и разложим векторы $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{CA_1}$ по векторам этого базиса. Имеем: $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA} = \vec{c} - \vec{a}$; $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} = \vec{b} + \vec{c}$;

$$\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

Так как точка H лежит на диагонали AB_1, то векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{AB_1}$ коллинеарны, поэтому (соотношение 7) существует такое число x, что $\overrightarrow{AH} = x \cdot \overrightarrow{AB_1} = x(\vec{c} - \vec{a})$. Аналогично, в силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ существует такое число y, что $\overrightarrow{BM} = y \cdot \overrightarrow{BC_1} = y(\vec{b} + \vec{c})$.

По правилу ломаной находим:

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} =$$

$$= -y(\vec{b} + \vec{c}) + \vec{a} + x(\vec{c} - \vec{a}) =$$

$$= (1 - x)\vec{a} - y\vec{b} + (x - y)\vec{c}.$$

По условию MH $\parallel A_1C$, значит, существует такое число t, что $\overrightarrow{MH} = t \cdot \overrightarrow{CA_1}$, то есть выполняется равенство:

$$\mathbf{(1 - x)\vec{a} - y\vec{b} + (x - y)\vec{c} = t(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow (1 - x - t)\vec{a} + (t - y)\vec{b} + (x - y - t)\vec{c} = \vec{0}.}$$

Вследствие некомпланарности векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и единственности разложения вектора по базису, приходим к выводу: 1– x–t =0, t–y=0, x–y–t = 0.

Решением этой системы уравнений является: $y = t = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$. Тогда значит, МН:СА$_1$ = 1 : 3.

2.4. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ИЛИ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ТРЁХ ТОЧЕК ПРЯМОЙ

Задача 2.4.1.. Точки *M* и *N* лежат соответственно на сторонах *AD* и *BC* четырехугольника *ABCD*, причем *AM*:*MD*=*BN*:*NC*== 3:4.

Докажите, что середины отрезков *AB*, *MN* и *CD* лежат на одной прямой.

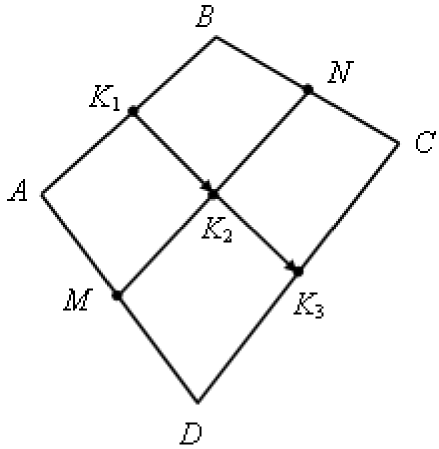


Рис.2.7.

Доказательство. Пусть K_1 – середина *AB*, K_2 – середина *MN*, K_3 – середина *CD*. Согласно соотношению 8 имеем

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}),\ \overrightarrow{K_1K_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Из условия следует, что $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$,

поэтому $\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{7}\overrightarrow{K_1K_3}$.

Таким образом, векторы $\overrightarrow{K_1K_2}$ и $\overrightarrow{K_1K_3}$ коллинеарны, и, значит, точки K_1, K_2 и K_3 лежат на одной прямой.

2.5 ДЛИНА ОТРЕЗКА И УГОЛ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Как уже отмечалось, еслив пространстве задан некий базис, т.е. тройка некомпланарных векторов$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$, то любой вектор $\vec{p}$можно единственным способом разложить по векторам базиса так, что$\vec{p} = x_1 * \vec{a} + y_1 * \vec{b} + z_1 * \vec{c}$,где x_1, y_1, z_1-коэффициенты разложения. Если при этом известны длины векторов $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$, и углы между ними, то, определив скалярные произведения $\overrightarrow{a^2}$,$\overrightarrow{b^2}$,$\overrightarrow{c^2}$, $\vec{a} * \vec{b}, \vec{b} * \vec{c}, \vec{a} * \vec{c}$ («таблицу умножения» векторов базиса), можно вычислить скалярный квадрат вектора $\vec{p}$: $\overrightarrow{p^2} = \left(x_1 * \vec{a} + y_1 * \vec{b} + z_1 * \vec{c}\right) * \left(x_1 * \vec{a} + y_1 * \vec{b} + z_1 * \vec{c}\right)$, который равен квадрату его длины, а затем и саму длину вектора $\vec{p}$: $|\vec{p}| = \sqrt{\overrightarrow{p^2}}$.То же 0самое справедливо для любого другого вектора $\overrightarrow{q} = x_1 * \vec{a} + y_1 * \vec{b} + z_1 * \vec{c}$. Кроме того, вычислив с помощью таблицы умножения векторов базиса скалярное произведение $\vec{p} * \vec{q}$, можем определить угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$: $\cos(\widehat{\overrightarrow{p}, \vec{q}}) = \frac{|\vec{p}*\vec{q}|}{|\vec{p}|*|\vec{q}|}$.Заметим, что в геометрических задачах часто приходится вычислять не угол между векторами $\vec{p}$и $\vec{q}$, а угол между прямыми l_1 и l_2, содержащими эти векторы($\vec{p} \in l_1, \vec{q} \in l_2$).Угол между прямыми обычно считается не превосходящим $\frac{\pi}{2}$, а косинус такого угла положителен. В силу того, что $|\cos \mu| = |\cos(\pi - \mu)|$,в таких случаях, чтобы сразу получить для косинуса угла между прямыми положительное значение, будем пользоваться формулой

$$\cos(\widehat{l_1, l_2}) = \frac{|\vec{p} * \vec{q}|}{|\vec{p}| * |\vec{q}|}.$$

Прежде чем переходить к решению задач, вспомним формулу квадрата трех чисел:

$$(l + m + n)^2 = l^2 + m^2 + n^2 + 2lm + 2ln + 2mn$$

Если заменить числа векторами, то согласно свойствам скалярного произведения, получим $\left(\vec{l} + \vec{m} + \vec{n}\right)^2 = \vec{l}^2 + \vec{m}^2 + \vec{n}^2 + 2\vec{l} * \vec{m} + 2\vec{l} * \vec{n} + 2\vec{m} * \vec{n}$, *и если* $\vec{l} = x\vec{a}, \vec{m} = y\vec{b}, \vec{n} = z\vec{c}$,*то* $\left(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}\right)^2 = x^2\vec{a}^2 + y^2\vec{b}^2 + z^2\vec{c}^2 + 2xy\vec{a} * \vec{b} + 2xz\vec{a} * \vec{c} + 2yz\vec{b} * \vec{c}$.

Во всех задачах, рассмотренных ниже, в качестве базисной выбиралась тройка векторов, выходящих из одной вершины. Однако такой выбор не всегда является предпочтительным. Вычисления тем проще, чем больше попарных скалярных произведений базисных векторов равны нулю. Ещё раз напомним, что за базис можно принимать любые три некомпланарных вектора, причем при выборе базиса следует, по возможности, руководствоваться тремя основными критериями : возможно более полной определенностью базиса (таблицы умножения векторов базиса), относительной простотой разложения искомых векторов по базисным, количеством нулей в таблице умножения базисных векторов.

Задача 2.5.1. В треугольной пирамиде DABCизвестны длины рёбер DA=1,DB=2,DC=4 и углы $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} = \frac{\pi}{3}, \widehat{ADC} = \frac{\pi}{2}$. Точки $K, P, T -$ середины рёбер соответственно, точка $M -$ точка пересечения медиан треугольника BDC. Вычислите:
а) AT, б) AM, в) KP, г) угол медлу прямыми KP и AM.

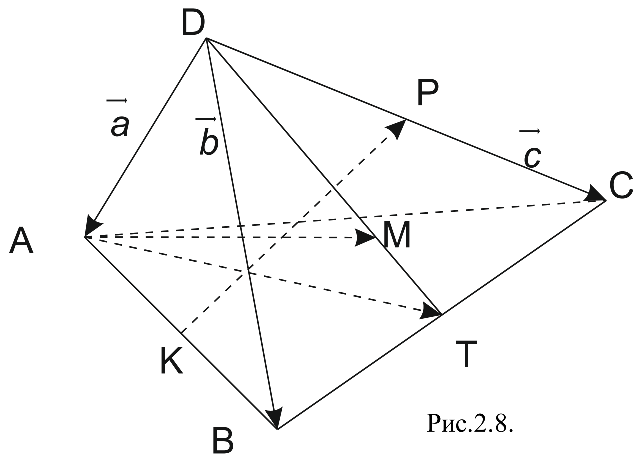


Рис.2.8.

Решение. В данном случае выбор базиса очевиден: пусть $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$. Тогда из условия следует, что $\overrightarrow{a^2} = 1, \overrightarrow{b^2} = 4, \overrightarrow{c^2} = 16, \vec{a} * \vec{b} = 1 * 2 * \cos\frac{\pi}{3} = 1, \vec{b} * \vec{c} = 2 * 4 * cos\frac{\pi}{3}$=4, $\vec{a} * \vec{b} = 0$.

Для наглядности будем в дальнейшем оформлять подобные вычисления в виде таблицы:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	1	1	0
$\vec{b}$	1	4	4
$\vec{c}$	0	4	16

Чтобы найти по этой таблице, например, скалярное произведение $\vec{a} * \vec{b}$,берём горизонталь с вектором $\vec{a}$ и вертикаль с вектором $\vec{b}$, и в их пересечении находим искомую величину $\vec{a} * \vec{b}$.

Далее, так как $\overrightarrow{AT} = |\overrightarrow{AT}|, \overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{AM}|, \overrightarrow{KP} = |\overrightarrow{KP}|$, сначала найдем разложения векторов$\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{KP}$ по векторам базиса. При этом подробные комментарии будем опускать, а при вычислениях длин и искомого угла – пользоваться таблицей умножения векторов базиса и формулой.

а)$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DT} = -\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Тогда AT=

$$= |\overrightarrow{AT}| = \sqrt{\overrightarrow{AT^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 4\vec{a}\vec{b} - 4\vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4 + 16 - 4 + 8} == \frac{1}{2}\sqrt{28} = \sqrt{7}.$$

б) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} - \vec{a} + \vec{c} - \vec{a}\right) = \frac{1}{3}\left(-3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$

Тогда AM=$|\overrightarrow{AM}|$=$\sqrt{\overrightarrow{AM}^2} = \frac{1}{3}\sqrt{9\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 6\vec{a}\vec{b} - 6\vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c}} =$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{9 + 4 + 16 - 6 + 8} == \frac{1}{3}\sqrt{31}.$$

в) $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} =$

$$= -\frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right).$$

Тогда $KP = \left|\overrightarrow{KP}\right| = \sqrt{\overrightarrow{KP}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{c} - 2\vec{b}\vec{c}}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4 + 16 + 2 - 8} = \frac{1}{2}\sqrt{15}.$$

г) Теперь подсчитаем $\cos(\widehat{AT, KP})$:

$$\cos(AT, KP) = |\cos(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{KP}})| = \frac{\left|\overrightarrow{AT} * \overrightarrow{KP}\right|}{\left|\overrightarrow{AT}\right| * \left|\overrightarrow{KP}\right|} =$$

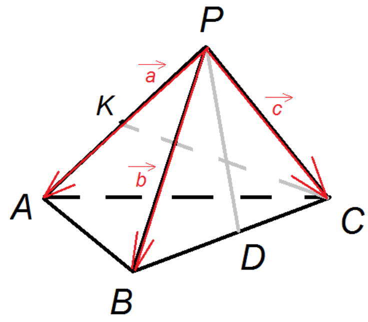
$= \frac{\left|\frac{1}{2}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)*\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\right|}{\sqrt{7}*\frac{1}{2}\sqrt{15}} = \frac{\left|-\left(-2\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+2+\vec{b}\vec{a}+\vec{b}^2-\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}+\vec{c}\vec{b}-\vec{c}^2\right)\right|}{2\sqrt{7}\sqrt{15}} =$

$\frac{|-2-2+1+4-4+4-16|}{2\sqrt{7}\sqrt{15}} =$

$$= \frac{15}{2\sqrt{7}\sqrt{15}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{7}}.$$

Таким образом, угол между прямыми AT и KPравен $\arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{7}}\right)$.

Ответ: а) $\sqrt{7}$, б) $\frac{\sqrt{31}}{3}$, в) $\frac{\sqrt{15}}{2}$, г) $\arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{7}}\right)$.



Задача 2.5.2. В треугольной пирамиде KABC $\widehat{APB}=\widehat{BPC}=\frac{\pi}{2}$, $\widehat{APC}=\frac{\pi}{4}$, *PA=PB=PC. Точки P и D – соответственно середины ребер PA и BC. Найти угол между прямыми CP и KD.*

Решение: Введем базисные векторы: $\overrightarrow{PC}=\vec{c}$; $\overrightarrow{PA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{PB}=\vec{b}$ и составим таблицу умножения векторов базиса:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\vec{b}$	0	1	0
$\vec{c}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1

$$\cos(\widehat{PD,KC}) = |\cos(\widehat{\overrightarrow{PD},\overrightarrow{KC}})| = \frac{|\overrightarrow{PD}*\overrightarrow{KC}|}{|\overrightarrow{PD}|*|\overrightarrow{KC}|}$$

$$\overrightarrow{KC}=\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}(2\vec{c}-\vec{a})$$

$$\overrightarrow{PD}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{KC}*\overrightarrow{PD}=\frac{1}{4}\left(2\vec{b}\vec{c}+2\overrightarrow{c^2}-\vec{a}\vec{b}-\vec{a}\vec{c}\right)=\frac{1}{4}\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)$$

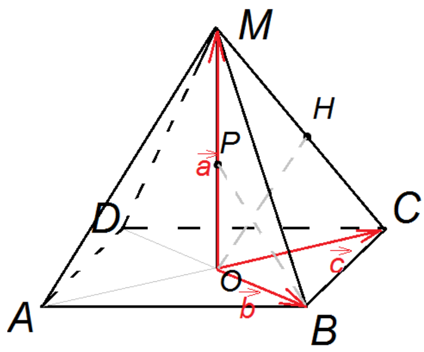
$$|\overrightarrow{KC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4\overrightarrow{c^2}+\overrightarrow{a^2}-4\vec{c}\vec{a}}=\frac{1}{2}\sqrt{4+1-\frac{4\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{2}}$$

$$|\overrightarrow{PD}|=\frac{1}{2}\sqrt{1+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{PD},\overrightarrow{KC}})=\frac{\left|\frac{1}{4}\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)\right|}{\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{2}}\sqrt{2}\frac{1}{2}}=\frac{4-\sqrt{2}}{2\sqrt{10-4\sqrt{2}}}$$

Ответ: $\cos(\widehat{\overrightarrow{PD},\overrightarrow{KC}}) = \frac{4-\sqrt{2}}{2\sqrt{10-4\sqrt{2}}}$

Задача 2.5.3. В правильной четырехугольной пирамиде MABCD с вершиной M угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\frac{\pi}{4}$. Точка O - центр основания пирамиды, точки P и H - середины отрезков MO и MC соответственно. Найдите угол между прямыми BP и BD.



Решение: Введем базисные векторы: $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Так как ABCD – квадрат, то AC=BD , ΔMOC – равнобедренный и OC=OM. Пусть $|\vec{a}| = 1$, тогда $|\vec{a}| = |\mathrm{b}| = |\vec{c}| = 1$. Составим таблицу умножения векторов базиса:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	1	0	*0*
$\vec{b}$	0	1	0
$\vec{c}$	0	0	1

$$\cos(\widehat{PB,OH}) = |\cos(\widehat{\overrightarrow{PB},\overrightarrow{OH}})| = \frac{|\overrightarrow{PB} * \overrightarrow{OH}|}{|\overrightarrow{PB}| * |\overrightarrow{OH}|}$$

$$\overrightarrow{PB} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(2\vec{b} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{PB} * \overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(2\vec{b} - \vec{a}) * \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{4}\left(2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} - \overrightarrow{a^2} - \vec{a}\vec{c}\right)$$

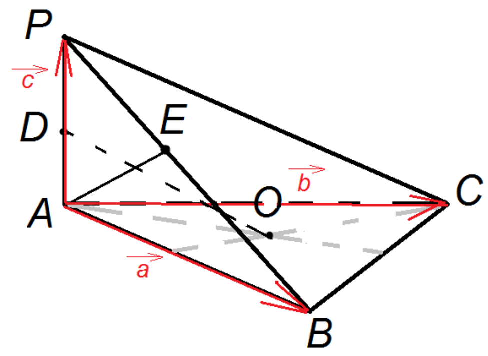
$$= \frac{1}{4}(0 + 0 - 1) = -\frac{1}{4}$$

$$|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{\overrightarrow{PB^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(2\vec{b} - \vec{a}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\overrightarrow{b^2} + \overrightarrow{a^2} - 4\vec{a}\vec{b}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{OH}| = \frac{1}{2}\sqrt{(\vec{a} + \vec{c})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{a^2} + \overrightarrow{c^2} + 2\vec{a}\vec{c}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{PB},\overrightarrow{OH}}) = \frac{\left|\frac{1}{4}\right|}{\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Ответ: $\cos(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{PB}}, \overrightarrow{\mathrm{OH}}}) = \frac{1}{\sqrt{10}}$.



Задача 2.5.4. Боковое ребро PA тетраэдра PABC перпендикулярно плоскости основания ABC. Известно, что AP=AB=AC, $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$. *Точки D и E - середины ребер PA и PB соответственно, O – точка пересечения медиан треугольника ABC . Найдите угол между прямыми OD и CE.*

Решение: Введем базисные векторы: $\overrightarrow{AP} = \vec{c}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Пусть $|\mathrm{\vec{a}}| = 1$, тогда $|\vec{a}| = |\mathrm{b}| = |\vec{c}| = 1$. Составим таблицу умножения векторов базиса:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	1	0	0
$\vec{b}$	0	1	0
$\vec{c}$	0	0	1

$$\cos(\widehat{OD, EC}) = |\cos(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{OD}}, \overrightarrow{\mathrm{EC}}})| = \frac{|\overrightarrow{OD} * \overrightarrow{\mathrm{EC}}|}{|\overrightarrow{OD}| * |\overrightarrow{\mathrm{EC}}|}$$

$$\overrightarrow{DO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(-3\vec{c} + 2\vec{a} + 2\vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c} + \vec{a} + \vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}\left(-\vec{a} - \vec{c} + 2\vec{b}\right)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DO}}| = \frac{1}{6}\sqrt{\left(-3\vec{c} + 2\vec{a} + 2\vec{b}\right)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{9\vec{c}^2 + 4\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 - 12\vec{a}\vec{c} - 12\vec{b}\vec{c} + 8\vec{a}\vec{b}}$$

$$=$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{9 + 4 + 4} = \frac{1}{6}\sqrt{17}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{EC}}\right| = \sqrt{\overrightarrow{EC}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(2\vec{b} - \vec{a} - \vec{c}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\overrightarrow{b^2} + \overrightarrow{a^2} + \overrightarrow{c^2} + 2\vec{a}\vec{c} - 4\vec{a}\vec{b} - 4\vec{a}\vec{c}}$$

$$=$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4+1+1} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{OD} * \overrightarrow{EC} = \frac{1}{6}\left(2\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}\right) * \frac{1}{2}\left(2\vec{b} - \vec{a} - \vec{c}\right) =$$

$$= \frac{1}{12}(4\vec{a}\vec{b} - 2\overrightarrow{a^2} - 2\vec{a}\vec{c} + 4\overrightarrow{b^2} - 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}\vec{c} - 6\vec{b}\vec{c} + 3\vec{a}\vec{c} + 3\overrightarrow{c^2} =$$

$$= \frac{1}{12}(-2+4+3) = \frac{1}{12} * 5 = \frac{5}{12}$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{OD}}, \overrightarrow{\mathrm{EC}}}) = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{6}\sqrt{17}\frac{1}{2}\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{102}}$$

Ответ: $\cos(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{OD}}, \overrightarrow{\mathrm{EC}}}) = \frac{5}{\sqrt{102}}$

2.6. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Для того чтобы найти расстояние MHот некоторой точки M до прямой l, достаточно знать разложение векторов $\overrightarrow{PM}(P \in l)$и $\vec{d}(d \in l)$по некоторому базису с известной таблицей умножения векторов базиса. Так как векторы $\overrightarrow{PH}$и $\vec{d}$ коллиниарны,$\overrightarrow{PH} = x * \vec{d}$, но тогда $\overrightarrow{MH}$: $\overrightarrow{MH} * \vec{d} = 0$, или $\left(x * \vec{d} - \overrightarrow{PM}\right) * \vec{d} = 0$. Найдя из этого уравнения x,мы тем самым найдем разложение вектора $\overrightarrow{MH}$по векторам выбранного базиса с известной таблицей умножения,и по формуле $\left|\overrightarrow{MH}\right| = \sqrt{\overrightarrow{MH}^2}$определим искомое расстояние аналогично тому, как это делалось при решении задач предыдущего параграфа.

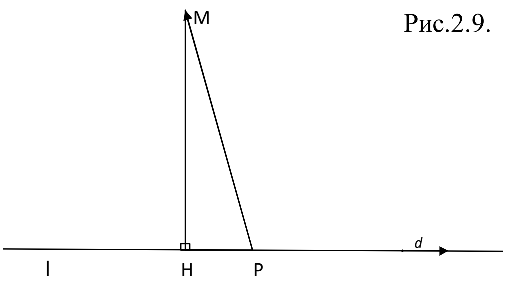


Рис.2.9.

Задача 2.6.1. Все плоские углы при вершите *D*треугольной пирамиды *DABC*равны $\frac{\pi}{3}$,*DA=2,DB=4,DC=3.* Точки *P,M,K* являются серединами рёбер*DA*,*DA*и *BC* соответственно. Найдите расстояние от точки*M*до прямой *PK*.

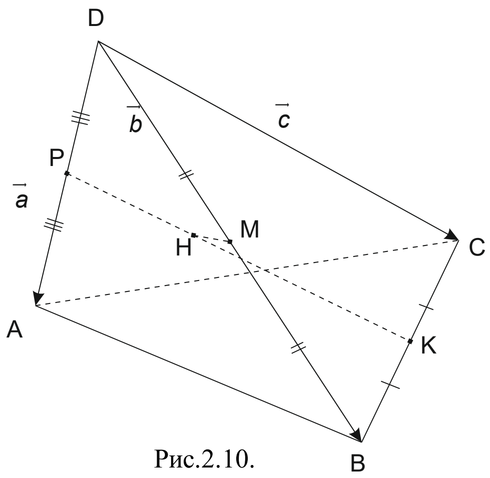


Рис.2.10.

Решение.

1. Выберем в качестве базисных векторы $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$ и составим таблицу умножения векторов базиса:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	4	4	3
$\vec{b}$	4	16	6
$\vec{c}$	3	6	9

2. Пусть $MH \perp PK, H \in PK$. В силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{PH}$и $\overrightarrow{PK}$ имеем: $\overrightarrow{PH} = x * \overrightarrow{PK}$. Но $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{DK} - \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, поэтому $\overrightarrow{PH} =$

$$= \frac{1}{2}x(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}). \text{Далее}, \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{\mathrm{DM}} + \overrightarrow{PH}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} +$$

$+\frac{1}{2}x(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\left((1 - x)\vec{a} + (x - 1)\vec{b} + x\vec{c}\right)$. Так как векторы $\overrightarrow{MH}$и$\overrightarrow{PK}$ взаимно перпендикулярны, то $\overrightarrow{MH} * \overrightarrow{PK} = 0$, откуда $\frac{1}{2}\left[(1 - x)\vec{a} + (x - 1)\vec{b} + x\vec{c}\right] *$
$* \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$. Умножив на 4 и раскрыв скобки, получим $-\vec{a}^2(1 - x) + (1 - x)\vec{a} * \vec{b} + (1 - x)\vec{a} * \vec{c} - (x - 1)\vec{b} * \vec{a} + (x - 1)\vec{b}^2 + (x - 1)\vec{b} * \vec{c} - x\vec{c} * \vec{a} + x\vec{c} * \vec{b} + x\vec{c}^2 = 0$. Воспользовавшись таблице умножения векторов базиса и вынося за скобку общий множитель, приходим к уравнению $(1 - x)(-4 + 4 + 3 + 4 - 16 - 6) +$

$x(-3+6+9)=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{9}$. Поэтому $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\vec{a}-\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{5}{9}\vec{c}\right)=$

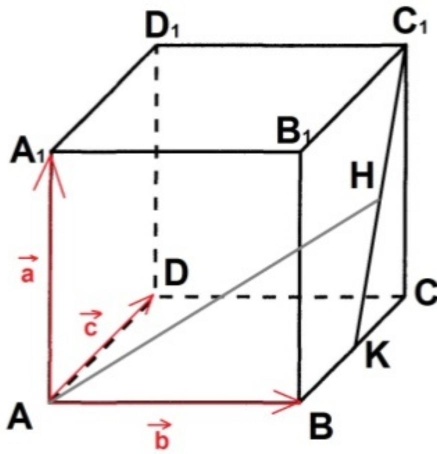
$\frac{1}{18}\left(4\vec{a}-4\vec{b}+5\vec{c}\right)$ и $\left|\overrightarrow{MH}\right|=\sqrt{\overrightarrow{MH}^2}=$

$\frac{1}{18}\sqrt{16\vec{a}^2+16\vec{b}^2+25\vec{c}^2-32\vec{a}*\vec{b}+40\vec{a}*\vec{c}-40\vec{b}*\vec{c}}=$

$$=\frac{1}{18}\sqrt{16*4+16*16+25*9-32*4+40*3-40*6}=\sqrt{\frac{11}{12}}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{11}{12}}$.

Задача 2.6.2. Все ребра четырехугольной призмы имеют длину 2, а в основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$. Боковое ребро AA_1 образует равные углы с ребрами AB и AD, причем величина каждого из этих угол равна $\frac{\pi}{3}$. Найдите расстояние от точки A до прямой C_1K, если точка K – середина ребра BC.



Решение: Введем базисные векторы $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AD}=\vec{c}$.

Тогда AH⊥C_1K; $\overrightarrow{KH}$=x*$\overrightarrow{KC_1}$, $\overrightarrow{KC_1}=\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CC_1}$. Составим таблицу умножения векторов базиса:

	a	b	c
a	4	1	1
b	1	4	0
c	1	0	4

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KH}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\overrightarrow{KH}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+x*(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a})$

Известно, что AH⊥C_1K, значит $\overrightarrow{AH}*\overrightarrow{C_1K}=0$

$(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+x\times(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a}))\times(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a})=0$

$$\frac{1}{2}\left(2\,\vec{b}+\vec{c}+x\vec{c}+2\,\vec{a}\,x\right)*\frac{1}{2}(\vec{c}+2\vec{a})=0$$

$$2\overrightarrow{bc}+\overrightarrow{c^2}+x\overrightarrow{c^2}+2x\,\overrightarrow{ac}+4\,\overrightarrow{ab}+2\,\overrightarrow{ac}+2x\,\overrightarrow{ac}+4x\,\overrightarrow{a^2}=0$$

$$8+4+4x+16x+4+4x+4x=0$$

$$28x+16=0$$

$$x=-\frac{4}{7};$$

$$\overrightarrow{AH}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+x*(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a})=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{4}{7}*(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a})=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{2}{7}\vec{c}-\frac{4}{7}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AH}=\vec{b}+\frac{3}{14}\vec{c}-\frac{4}{7}\vec{a}=\frac{1}{14}(14\vec{b}+3\vec{c}-8\vec{a})$$

$$|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{AH^2}=\frac{1}{14}\sqrt{(14\vec{b}+3\vec{c}-8\vec{a})^2}$$
$$=\frac{1}{14}\sqrt{196*4+9*4+64*4+84*0-14*16*2-6*8*2}=$$

$$=\frac{1}{14}\sqrt{4(196+9+64-56*2-24)}=\frac{1}{7}\sqrt{133}=\sqrt{\frac{133}{49}}=\sqrt{\frac{19}{7}}.$$

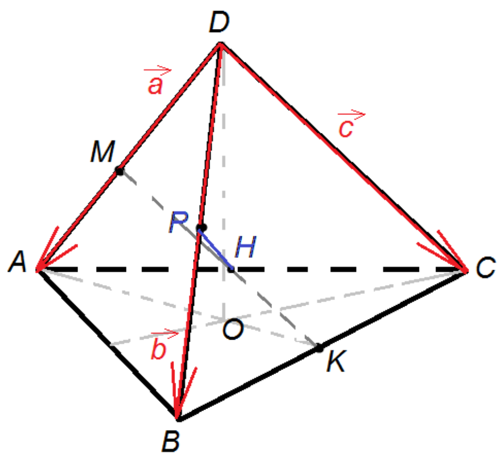
Ответ: AH=$\sqrt{\frac{19}{7}}$

Задача 2.6.3. Все плоские углы при вершине D треугольной пирамиды DABC равны $\frac{\pi}{3}$, *DA*=$\sqrt{2}$, *DB*=$2\sqrt{2}$, $DC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$*. Точки M, P и K являются серединами ребер DA, DB и BC соответственно. Найдите расстояние от точки P до прямой MK.*

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	2	2	$\frac{3}{2}$
$\vec{b}$	2	8	3

Решение: Введем базисные векторы: $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$. Составим таблицу умножения векторов базиса:

$\vec{c}$	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{9}{2}$



Пусть PH⊥MK, тогда $\overrightarrow{PH} * \overrightarrow{MK} = 0$. $\overrightarrow{MH} = x * \overrightarrow{MK}$

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \left(\vec{b} - \vec{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}x(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + \frac{1}{2}x\left(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b} + x\vec{b} + x\vec{c} - x\vec{a}\right) = \frac{1}{2}((1-x)\vec{a} + (x-1)\vec{b} + x\vec{c})$$

$$\overrightarrow{PH} * \overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\left((1-x)\vec{a} + (x-1)\vec{b} + x\vec{c}\right)\frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big((1-x)\vec{a}\vec{b} + (1-x)\vec{a}\vec{c} - (1-x)\overrightarrow{a^2} + (x-1)\overrightarrow{b^2} + (x-1)\vec{b}\vec{c}$$
$$- (x-1)\vec{b}\vec{a} + x\vec{c}\vec{b} + x\vec{c}^2 - x\vec{c}\vec{a}\Big) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\vec{a}\vec{b}(1 - x - x + 1) + \vec{a}\vec{c}(1 - x - x) + \vec{b}\vec{c}(x - 1 + x) - (1-x)\overrightarrow{a^2}$$
$$+ (x-1)\overrightarrow{b^2} + x\overrightarrow{c^2}\Big) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2(2-2x) + \frac{3}{2}(1-2x) + 3(2x-1) - 2(1-x) + 8(x-1) + \frac{9}{2}x\right) =$$

$$=\frac{1}{4}\left(4-4x+\frac{3}{2}-3x+6x-3-2+2x+8x-8+\frac{9}{2}x\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(13{,}5x-7{,}5)$$

$$13{,}5x-7{,}5=0$$

$$x=\frac{7{,}5}{13.5}=\frac{5}{9}$$

$$\overrightarrow{PH}=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{5}{9}\right)\vec{a}+\left(\frac{5}{9}-1\right)\vec{b}+\frac{5}{9}\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\vec{a}-\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{5}{9}\vec{c}\right);$$

$$\left|\overrightarrow{PH}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{81}\left|\vec{a}^2\right|+\frac{16}{81}\left|\vec{b}^2\right|+\frac{25}{81}\left|\vec{c}^2\right|-\frac{32}{81}\vec{a}\vec{b}+\frac{40}{81}\vec{a}\vec{c}-\frac{40}{81}\vec{b}\vec{c}}=$$

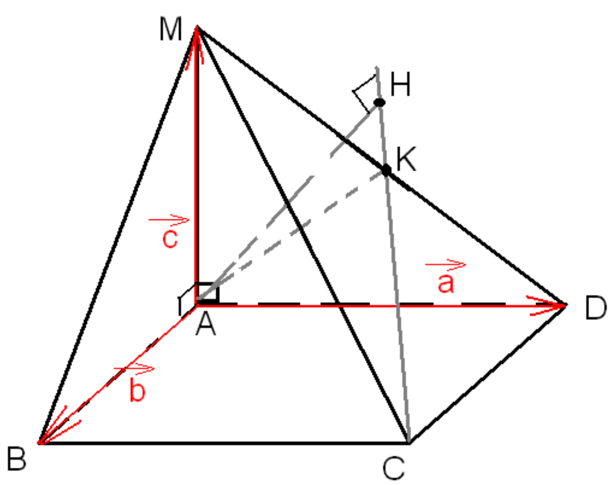
$$=\frac{1}{2*9}\sqrt{16*2+16*8+25*\frac{9}{2}-2*32+40*\frac{3}{2}-40*3}=$$

$$=\frac{1}{18}\sqrt{160-60-64+\frac{225}{2}}=\frac{1}{18}\sqrt{\frac{297}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{297}{18*18*2}}=\sqrt{\frac{11}{24}}$$

Ответ: расстояние от точки P до прямой MK равно $\sqrt{\frac{11}{24}}$

Задача 2.6.4. В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник ABCD, в котором AB=1, BC=4. Боковое ребро MA перпендикулярно плоскости снования. Известно, что расстояние от точки A до прямой CK, где точка K – середина ребра MD, равно $\frac{13}{\sqrt{29}}$*. Найдите объем пирамиды.*



Решение: Введем базисные векторы: $\overrightarrow{AM}=\vec{c}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Составим таблицу умножения векторов базиса:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	16	0	0
$\vec{b}$	0	1	0
$\vec{c}$	0	0	c^2

Пусть AH⊥CK, H∈CK

$\overrightarrow{CK}$ *и* $\overrightarrow{CH}$ – колинеарны, т*о* $\overrightarrow{CH} = x * \overrightarrow{CK}$; $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DK} = -\vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a})$

$$\overrightarrow{CH} = x * \left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{1}{2}(x\vec{c} - x\vec{a} - 2x\vec{b})$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CH} - (\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{CH} + \vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{2}x(\vec{c} - \vec{a} - 2\vec{b}) + \vec{a} + \vec{b} =$$

$$= \frac{1}{2}x\vec{c} - \frac{1}{2}x\vec{a} - x\vec{b} + \vec{a} + \vec{b} = \vec{a}\left(1 - \frac{1}{2}x\right) + \vec{b}(1 - x) + \frac{1}{2}x\vec{c} =$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a}(2 - x) + \vec{b}(2 - 2x) + x\vec{c})$$

$\overrightarrow{AH} * \overrightarrow{CK} = 0,$ значит $\overrightarrow{AH} * \overrightarrow{CH} = 0$

$$\frac{1}{2}\left(x\vec{c} - x\vec{a} - 2x\vec{b}\right) * \frac{1}{2}\left(\vec{a}(2 - x) + \vec{b}(2 - 2x) + x\vec{c}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\vec{a}(2 - x)x\vec{b} - \overrightarrow{a^2}(2 - x)x - 2x(2 - x)\vec{a}\vec{b} + \vec{b}(2 - 2x)x\vec{c} - \vec{a}\vec{b}x(2 - 2x)$$
$$- 2x(2 - 2x)\overrightarrow{b^2} + x^2\overrightarrow{c^2} - x^2\vec{c}\vec{a} - 2x^2\vec{c}\vec{b}\Big)$$
$$= \frac{1}{4}(-16x(2 - x) - 2x(2 - 2x) + x^2c^2)$$
$$= \frac{1}{4}(-32x + 16x^2 - 4x + 4x^2 + x^2c^2) = \frac{1}{4}((20 + c^2)x^2 - 36x)$$

$$(20 + c^2)x^2 - 36x = 0$$

$$x((20 + c^2)x - 36) = 0$$

$x \neq 0,$ значит $(20 + c^2)x - 36 = 0$

$$x = \frac{36}{20 + c^2}$$

$|AH| = \frac{13}{\sqrt{29}}$

$|\overrightarrow{AH}| = \frac{1}{4}\sqrt{\overrightarrow{a^2}(2 - x)^2 + \overrightarrow{b^2}(2 - 2x)^2 + x^2\overrightarrow{c^2}} =$
$\frac{1}{4}\sqrt{16(2 - x)^2 + (2 - 2x)^2 + x^2c^2}$

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = 4$

Ответ: 4

2.7. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Для того чтобы найти расстояние MH от точки M до плоскости α, достаточно знать разложение по некоторому базису любых двух неколлинеарных векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, лежащих в плоскости α, и вектора $\overrightarrow{KM} = \vec{r}$, где K- некоторая точка плоскости α. В самом деле, в силу компланарности векторов $\overrightarrow{KH}, \vec{q}$ и $\vec{p}$ и неколлинеарности двух последних имеем :

$\overrightarrow{KH} = x\vec{p} + y * \vec{q}$.Но $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{KH} - \overrightarrow{KM} = x * \vec{p} + y * \vec{q} - \vec{r}$.

Так как $\overrightarrow{MH} \perp \alpha$,

получаем$\overrightarrow{MH} \perp \vec{p}$ и $\overrightarrow{MH} \perp \vec{q}$, а значит, $\begin{cases} (x * \vec{p} + y * \vec{q} - \vec{r}) * \vec{p} = 0, \\ (x * \vec{p} + y * \vec{q} - \vec{r}) * \vec{q} = 0. \end{cases}$

Определив из этой системы неизвестные коэффициенты x и y, мы найдем затем разложение вектора $\overrightarrow{MH}$ по выбранному базису, а следовательно, сможем вычислить его длину. Кроме того, в этом случае не составляет труда найти угол μ между прямыми KM и KH, поэтому $\cos \mu = \frac{|\vec{r}(x*\vec{p}+y*\vec{q}|}{|\vec{r}|*|x*\vec{p}+y*\vec{q}|}$.Можно найти его и так : $\cos \mu = \frac{|\overrightarrow{KH}|}{|\vec{r}|}, \sin \mu = \frac{|\overrightarrow{MH}|}{|\vec{r}|}$.

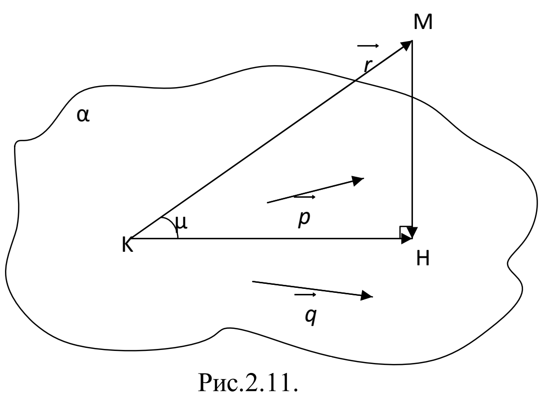


Рис.2.11.

Задача 2.7.1. Основание пирамиды DABC – прямоугольный треугольник ABC, катеты AB и AC которого равны соответственно 2 и 4. Найдите расстояние от середины ребра AB до плоскости BDC, если каждый из углов DABи DACравен $\frac{\pi}{3}$, а ребро DAравно 6. *Решение.*Обозначим середину ребра AB через M, введем базисные векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$и составим таблицу умножения векторов базиса:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	1	0	3
$\vec{b}$	0	6	12
$\vec{c}$	3	12	36

Пусть H – основание перпендикуляра, проведенного из точки M к плоскости BDC, и пусть $\overrightarrow{BH} = x * \overrightarrow{BD} + y * \overrightarrow{BC}$.

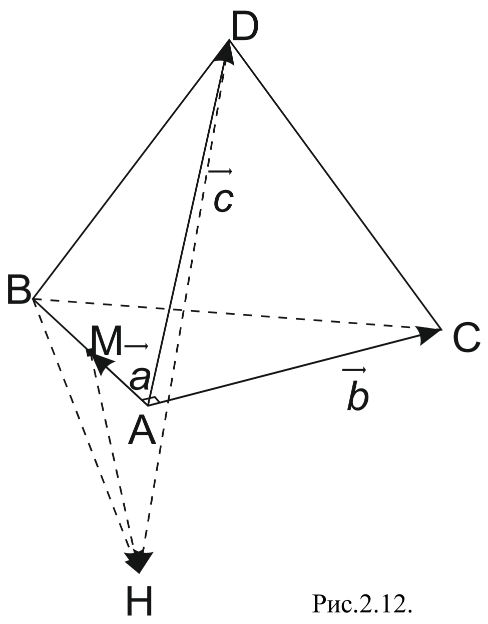


Рис.2.12.

$$\overrightarrow{BD} = -2\vec{a} + \vec{c};\ \overrightarrow{BC} = \vec{b} - 2\vec{a}.$$

$$\overrightarrow{BH} = -2x\vec{a} + x\vec{c} + y\vec{b} - 2y\vec{a} = -2(x+y)\vec{a} + y\vec{b} + x\vec{c}.$$

Тогда$\overrightarrow{MH} * \overrightarrow{BD} = 0, \overrightarrow{MH} * \overrightarrow{BC} = 0$, и эти условия позволяют найти неизвестные x и yкак решение соответствующей системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Составим эту систему, используя таблицу умножения базисных векторов и свойства скалярного произведения векторов. При этом учтем, что

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BH} = \vec{a} - 2(x+y)\vec{a} + y\vec{b} + x\vec{c} = (1 - 2x - 2y)\vec{a} + y\vec{b} + x\vec{c},$$

$$\overrightarrow{BD} = \vec{c} - 2\vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b} - 2\vec{a}.$$

Получим

$$\begin{cases} 3(1 - 2x - 2y) + 12y + 36x - 2(1 - 2x - 2y) - 6x = 0, \\ 16y + 12x - 2(1 - 2x - 2y) - 6x = 0, \end{cases}$$

откуда, после раскрытия скобок и приведения подобных:

$$\begin{cases} 28x + 10y = -1, \\ 5x + 10y = 1. \end{cases}$$

Решив систему, находим, что

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{23}, \\ y = \dfrac{33}{230}, \end{cases}$$

и значит, $|\overrightarrow{MH}| = \frac{1}{230}\sqrt{\left(204\vec{a} + 33\vec{b} - 20\vec{c}\right)^2} =$

$$= \frac{1}{230}\sqrt{204^2 + 33^2 * 16 + 20^2 * 36 - 2 * 204 * 20 * 3 - 2 * 33 * 20 * 12.}$$

При решении таких задач приходится сталкиваться с определенными вычислительными трудностями, которые можно обойти, используя рациональные методы вычислений. В данном случае, например, можно воспользоваться тем, что

$$204^2 - 2 * 204 * 20 * 3 = 204(204 - 120) = 204 * 84 = 3^2 * 4^2 * 7 * 17,$$

$$\begin{aligned} 33^2 * 16 - 2 * 33 * 20 * 12 &= 33(33 * 16 - 2 * 20 * 12) \\ &= 33(11 * 48 - 10 * 48) = 33 * 48 == 3^2 * 4^2 * 11, \end{aligned}$$

$$20^2 * 36 = 3^2 * 4^3 * 5^2.$$

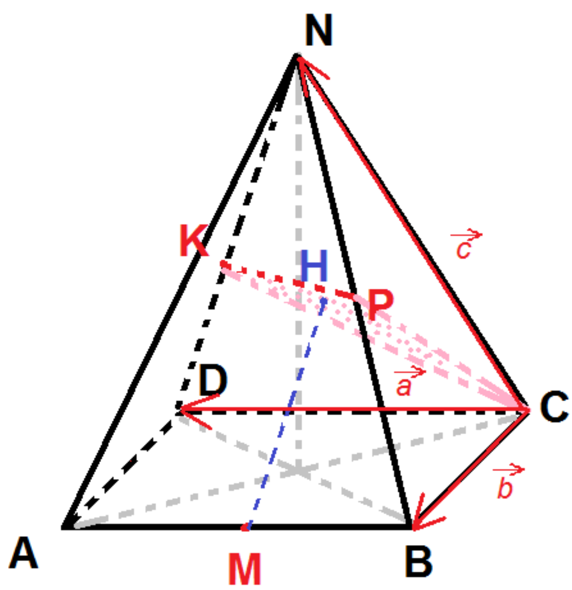
Тогда в подкоренном выражении можно вынести за скобки общий множитель $3^2 * 4^2$,после чего получим

$$|\overrightarrow{MH}| = \frac{3 * 4}{230}\sqrt{7 * 17 + 11 + 4 * 5^2} = \frac{6\sqrt{230}}{115}.$$

Ответ: $\frac{6\sqrt{230}}{115}$.

Задача 2.7.2. Пусть KABCD – правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние от середины ребра AB до плоскости, проходящей через вершину C и середины ребер KB и KD.

Решение: Введем базисные векторы: $\overrightarrow{CN} = \vec{c}$; $\overrightarrow{CD} = \vec{a}$; $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Составим таблицу умножения векторов базиса:



$\overrightarrow{PH} \perp (CPK)$, значит $\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{CN}$; $\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{CM}$;

$\overrightarrow{PH} * \overrightarrow{CN} = 0$; $\overrightarrow{PH} * \overrightarrow{CM} = 0$; $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CH}$

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

$\overrightarrow{CH}; \overrightarrow{CM}; \overrightarrow{CN}$ – *некомпланарны, значит*

$$\overrightarrow{CH} = x * \overrightarrow{CM} + y * \overrightarrow{CN}$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\,;\ \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{CH} = x\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) * +y * \left(\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)$$
$$= \frac{1}{2}y\vec{a} + \frac{1}{2}(x+y)\vec{c} + \frac{1}{2}x\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PH} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}y\vec{a} + \frac{1}{2}x\vec{b} + \frac{1}{2}(x+y)\vec{c}$$
$$= \frac{1}{2}(y-1)\vec{a} + \frac{1}{2}(x-2)\vec{b} + \frac{1}{2}(x+y)\vec{c}$$

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	1	0	$\frac{1}{2}$
$\vec{b}$	0	1	$\frac{1}{2}$
$\vec{c}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(y-1)\vec{a} + \frac{1}{2}(x-2)\vec{b} + \frac{1}{2}(x+y)\vec{c} * \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}) = 0 \quad (1) \\ \frac{1}{2}(y-1)\vec{a} + \frac{1}{2}(x-2)\vec{b} + \frac{1}{2}(x+y)\vec{c} * \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b}) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $(y-1)\vec{a}\vec{c}+(y-1)\overrightarrow{a^2}+(x-2)\vec{b}\vec{c}+(x-2)\vec{b}\vec{a}+(x+y)\overrightarrow{c^2}+(x+y)\vec{a}\vec{c}=0$

$$(y-1)\frac{1}{2}+(y-1)+(x-2)\frac{1}{2}+(x+y)+(x+y)\frac{1}{2}=0$$

$$y-1+2y-2+x-2+x-2+2x+2y+x+y=0$$

$$4x+6y-5=0$$

$$2x+3y-\frac{5}{2}=0$$

(2) $(y-1)\vec{a}\vec{b}+(y-1)\vec{a}\vec{c}+(x-2)\overrightarrow{b^2}+(x-2)\vec{b}\vec{c}+(x+y)\vec{c}\vec{b}+(x+y)\overrightarrow{c^2}=0$

$$(y-1)\frac{1}{2}+x-2+(x-2)\frac{1}{2}+(x+y)\frac{1}{2}+x+y=0$$

$$y-1+2x-4+x-2+x+y+2x+2y=0$$

$$4y+6x-7=0$$

$$2y+3x-\frac{7}{2}=0$$

$$\begin{cases}2x+3y-\frac{5}{2}=0\\2y+3x-\frac{7}{2}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}6x+9y=\frac{15}{2}\\-6x-4y=-7\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=-\frac{1}{10}\\x=\frac{11}{10}\end{cases}$$

$$\overrightarrow{PH}=\frac{1}{2}(y-1)\vec{a}+\frac{1}{2}(x-2)\vec{b}+\frac{1}{2}(x+y)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PH}=-\frac{1}{2}*\frac{9}{10}\vec{a}+\frac{1}{2}\left(-\frac{9}{10}\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\left(\frac{12}{10}\right)\vec{c}=-\frac{1}{20}\left(9\vec{a}+9\vec{b}-12\vec{c}\right)$$

$$=-\frac{3}{20}(3\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c})$$

$$\left|\overrightarrow{PH}\right| = \sqrt{PH^2} = \frac{3}{20}\sqrt{9\overrightarrow{a^2} + 9\overrightarrow{b^2} + 16\overrightarrow{c^2} + 12\vec{a}\vec{b} - 24\vec{a}\vec{c} - 24\vec{b}\vec{c}}$$
$$= \frac{3}{20}\sqrt{9 + 9 + 16 - 12 - 12} =$$
$$= \frac{3}{20}\sqrt{18 + 16 - 24} = \frac{3}{20}\sqrt{10}$$

2.8. РАССТОЯНИЕМЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯПРЯМЫМИ

Расстоянием между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2называется длина их общего перпендикуляра РН. Как известно, такой перпендикуляр существует и является единственным для двух данных скрещивающихся прямых. Для того чтобы найти его длину, достаточно знать разложение по некоторому базису(с известной таблицей умножения векторов) трёхследующих векторов: $\vec{p}(\vec{p} \in l_1), \vec{q}(\vec{q} \in l_2), \overrightarrow{KM}(K \in l_1, M \in l_2)$,т.е. двух векторов, принадлежащих соответственно двум данным прямым, и третьего вектора, начало которого принадлежит одной из прямых, а конец – другой. В самом деле,

$\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MH}$,но векторы $\overrightarrow{PK}$и $\vec{p}, \overrightarrow{MH}$ и $\vec{q}$коллиниарны, поэтому

$$\overrightarrow{PK} = x * \overrightarrow{p},$$

$\overrightarrow{MH} = y * \vec{q}$.Следовательно, $\overrightarrow{PH} = x * \vec{p} + y * \vec{q} + \overrightarrow{KM}$.

Таким образом,разложение вектора $\overrightarrow{PH}$содержит две переменные величины x, y, которые определяются из условия перпендикулярности: $\overrightarrow{PH} \perp l_1, \overrightarrow{PH} \perp l_2$,откуда $\overrightarrow{PH} * \vec{p} = 0, \overrightarrow{PH} * \vec{q} = 0$ или $\begin{cases} \left(x\vec{p} + y\vec{q} + \overrightarrow{KM}\right)\vec{p} = 0, \\ \left(x\vec{p} + y\vec{q} + \overrightarrow{KM}\right)\vec{q} = 0. \end{cases}$

Определив из этой системы x и y, мы сможем получить разложение вектора $\overrightarrow{PH}$ в базисе с известной таблицей умножения, после чего найти его длину по формуле $\left|\overrightarrow{PH}\right| = \sqrt{\overrightarrow{PH}^2}$.

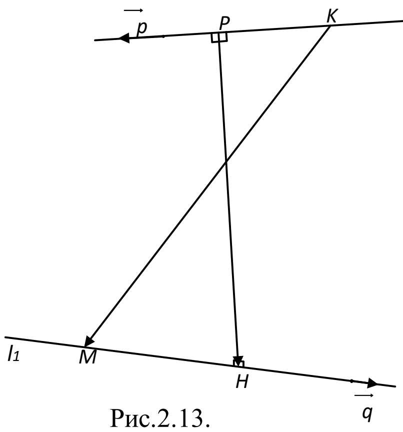


Рис.2.13.

Задача 2.8.1. В треугольной пирамиде *DABC*известны длины рёбер *DA*=1, *DB*=2,*DC*=3 и углы $\widehat{ADB}=\frac{\pi}{2},\widehat{ADC}=\frac{2\pi}{3},\widehat{BDC}=\frac{\pi}{3}$.На ребре DCвзята точка *M* так, что *CM:MD*=1:2. Найдите расстояние между прямыми *DA* и *BM*.

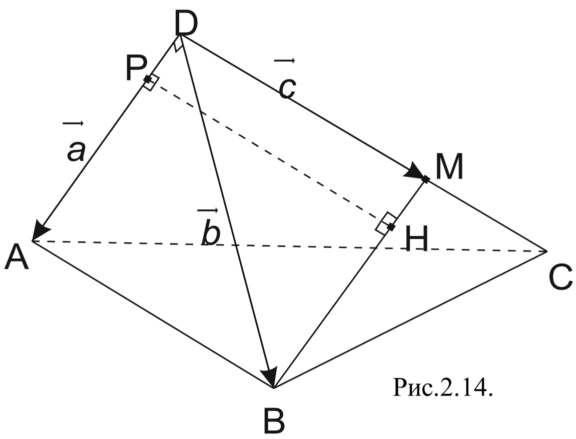


Рис.2.14.

Решение.

1.Введём базисные векторы$\overrightarrow{DA}=a$,$\overrightarrow{DB}=\vec{b}$,$\overrightarrow{DM}=\vec{c}$ и составим таблицу умножения векторов базиса:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	1	0	-1
$\vec{b}$	0	4	2
$\vec{c}$	-1	2	4

2.Пусть $\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{DA},\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{BM}(P\in DA, H\in BM)$.

Тогда $\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MH}$. Так как векторы $\overrightarrow{PD}$и$\vec{a}$, $\overrightarrow{MH}$и$\overrightarrow{MB}$коллиниарны, то$\overrightarrow{PD}=x*\vec{a},\overrightarrow{MH}=y*\overrightarrow{MB}=y*\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DM}\right)=y*\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$. Поэтому $\overrightarrow{PH}=x*\vec{a}+\vec{c}+y*\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=x*\vec{a}+y*\vec{b}+(1-y)\vec{c}$. Поскольку $\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{BM}$, то $\overrightarrow{PH}*\overrightarrow{DA}=0$ и $\overrightarrow{PH}*\overrightarrow{MB}=0$или

	a	b	c
a	a^2	0	0
b	0	a^2	0
c	0	0	a^2

$$\begin{cases} \left(x * \vec{a} + y * \vec{b} + (1-y)\vec{c}\right) \overline{* \vec{a}} = 0, \\ \left(x * \vec{a} + y * \vec{b} + (1-y)\vec{c}\right) * \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 4y + 2 - 2y + x - 2y - 4 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}, \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\left|\overrightarrow{PH}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{\left(2 * \vec{a} + \vec{b} + 2 * \vec{c}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{4 + 4 + 16 - 8 + 8} = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Задача 2.8.2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$с ребром, равным а. Точка – середина ребра DD_1. Найдите угол и расстояние между прямыми CK и A_1D.

Решение:

1. Введем базисные векторы: $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$ и составим таблицу умножения векторов базиса:

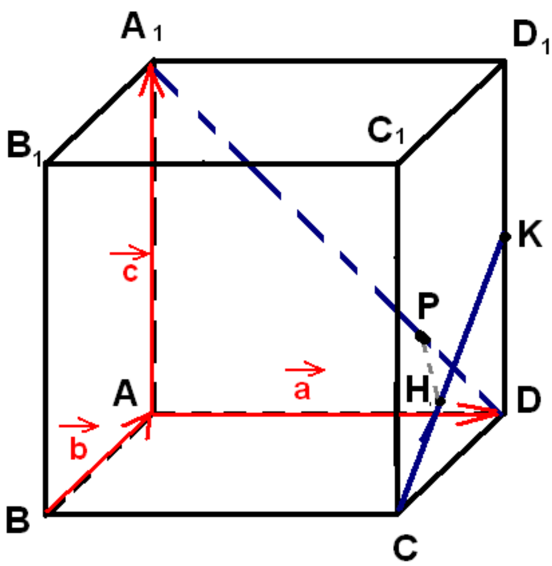
$$a^2 = b^2 = c^2$$

2. Пусть $\overrightarrow{HP} \perp \overrightarrow{A_1D}, \overrightarrow{HP} \perp \overrightarrow{KC}$ (P$\in KC, H \in A_1D$). $\overrightarrow{PH}$ - искомое расстояние.

Поэтому $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KH} = x\overrightarrow{A_1D} + \frac{1}{2}\vec{c} + y\overrightarrow{CK} = x * (\vec{a} - \vec{c}) + \frac{1}{2}\vec{c} + y * \left(\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b}\right) = x\vec{a} - x\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{c} + y\vec{b} + \frac{1}{2}y\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} + \frac{1}{2}(1 - 2x + y)\vec{c}.$

3. Поскольку $\overrightarrow{HP} \perp \overrightarrow{A_1D}, \overrightarrow{HP} \perp \overrightarrow{KC}$, то и

$\overrightarrow{HP} * \overrightarrow{A_1D} = 0,\ \ \overrightarrow{HP} * \overrightarrow{KC} = 0.$



$$\begin{cases} x\vec{a} + y\vec{b} + \frac{1}{2}(1 - 2x + y)\vec{c} *\ (\vec{a} - \vec{c}) = 0 \\ x\vec{a} + y\vec{b} + \frac{1}{2}(1 - 2x + y)\vec{c} * \left(\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xa^2 - \frac{1}{2}(1 - 2x + y)a^2 = 0 \\ ya^2 + \frac{1}{4}(1 - 2x + y)a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xa^2 - (1 - 2x + y)a^2 = 0 \\ 4ya^2 + (1 - 2x + y)a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xa^2 - a^2 + 2a^2x - a^2y = 0 \\ 4ya^2 + a^2 - 2a^2x + a^2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a^2y + a^2 - 2a^2x = 0 \\ 4a^2x - a^2 - a^2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 1 - y = 0 \\ -2x + 5y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10y - 4x = -2 \\ -y + 4x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{9} \\ x = \frac{2}{9} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PH} = \frac{2}{9}\vec{a} - \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{9}\right)\vec{c} = \frac{2}{9}\vec{a} - \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c} = \frac{1}{9}(2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})$$

Таким образом, $|\overrightarrow{PH}| = \sqrt{PH^2} = \frac{1}{9}\sqrt{4a^2 + b^2 + 4c^2} = \frac{1}{9}\sqrt{9a^2} = \frac{1}{3}|a|$

4. $\cos(\widehat{\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{A_1D}}) = \frac{|\overrightarrow{CK} * \overrightarrow{A_1D}|}{|\overrightarrow{CK}| * |\overrightarrow{A_1D}|}$

$$\overrightarrow{CK} * \overrightarrow{A_1D} = \left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)(\vec{a} - \vec{c}) = \vec{b}\vec{a} - \vec{b}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{c}\vec{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{c^2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a^2}$$

$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}(2\vec{b} + \vec{c})$

$|\overrightarrow{CK}|$=$\sqrt{CK^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2\vec{b} + \vec{c})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\overrightarrow{b^2} + \overrightarrow{c^2} + 4\vec{b}\vec{c}} = \frac{1}{2}\sqrt{5a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$

$|\overrightarrow{A_1D}|$=$\sqrt{\overrightarrow{A_1D^2}} = \sqrt{(\vec{a} - \vec{c})^2} = \sqrt{\overrightarrow{a^2} + \overrightarrow{c^2} - 2\vec{a}\vec{c}} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

$\cos(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{CK}}, \overrightarrow{\mathrm{A_1D}}})$=$\frac{\frac{1}{2}a^2*2}{a\sqrt{5}a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Ответ: $(\widehat{CK; A_1D}) = arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$*; расстояние между прямыми* $\overrightarrow{CK}$ *и* $\overrightarrow{A_1D}$ *равно* $\frac{1}{3}a$.

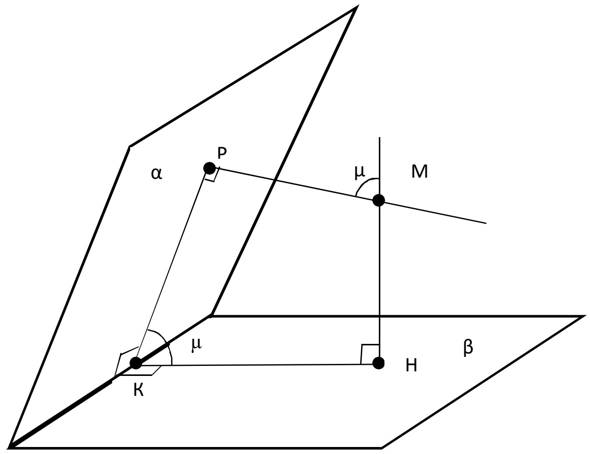
2.9. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

Прежде чем переходить к описанию методики решения задач по теме угол между двумя плоскостями установим один факт.

Пусть нам дан двугранный угол, образованный двумя плоскостями α и β и их общей границей – прямой*l*. Выберем внутри угла произвольную точку M и опустим из неё перпендикуляры *MP* и *MH* на α и β соответственно(P ∈⊥ α, H ∈β). Рис2.15.

Две пересекающиеся прямые MP и MH определяют единственную плоскость ¥. Поскольку *MP*⊥*α*, то *MP*⊥*l*. Поскольку *MH*⊥*β*, то *MH*⊥*l*. Таким образом, прямая *l* перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости ¥*,* а значит, в силу признака перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярна этой плоскости. Поэтому *l*⊥ *PK, l*⊥*KH*. Следовательно, угол $\widehat{PKH}$(его величину обозначим буквой μ) является линейным углом рассматриваемого двугранного угла.

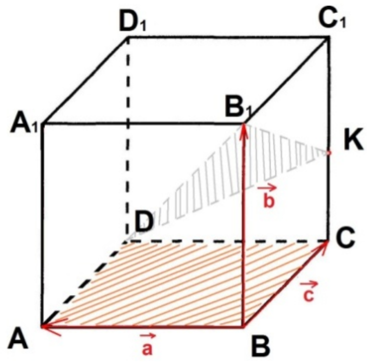
Но тогда, очевидно, что $\widehat{PMH}$=*π-μ,* и, следовательно, угол между прямыми *PM* и *HM* равен *μ*(если *μ≤π/2*) либо *π-μ*(если *μ≥π/2*). В силу того, что угол между прямыми не меняется при их параллельном переносе, оказывается справедлива следующая теорема.



Теорема!

Угол между двумя плоскостями равен углу между двумя прямыми, одна из которых перпендикулярна первой плоскости, а другая – второй.

Задача 2.9.1. Точка K – середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями B_1DK и ABC.



Решение:

Введем базисные векторы: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ и составим таблицу умножения векторов базиса:

	a	b	c
a	1	0	0
b	0	1	0
c	0	0	1

Найдем какой-нибудь вектор $\vec{p}$, перпендикулярный плоскости (DB_1K).

Пусть $\vec{p} = x * \vec{a} + y * \vec{b} + z * \vec{c}$. Так как $\vec{p} \perp DB_1$, $\vec{p} \perp B_1K$. Но $\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = -\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{B_1K} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} = -\vec{b} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} = \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Поскольку $\vec{p} \perp DB_1$, $\vec{p} \perp B_1K$, имеем $\vec{p} * \overrightarrow{DB_1} = 0$, $\vec{p} * \overrightarrow{B_1K} = 0$ или

$$\begin{cases} \left(x * \vec{a} + y * \vec{b} + z * \vec{c}\right) * (-\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}) = 0, \\ \left(x * \vec{a} + y * \vec{b} + z * \vec{c}\right) * \left(\vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{b}\right) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -zc^2 - xa^2 + yb^2 = 0, \\ 2zc^2 + yb^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z, \\ y = -2z. \end{cases}$$

Пусть z=1, тогда x=1, y=3. Поскольку вектор $\vec{b}$ перпендикулярен плоскости основания куба, то в силу теоремы достаточно найти модуль косинуса угла между векторами $\vec{p}$ и. Итак, $\cos((DKB_1);(ABC)) = |\cos(\vec{b};\vec{p})\,| = \frac{|\vec{p}*\vec{b}|}{|\vec{p}|*|\vec{b}|} =$ $\frac{|(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c})*\vec{b}|}{\sqrt{(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c})^2}*\sqrt{b^2}}=\frac{-2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вектор – одно из фундаментальных понятий современной математики и широко используется в различных её областях. В работах Г. Бесселя, Ж. Аргана и К. Гаусса по теории комплексных чисел установлена связь между арифметическими операциями над векторами в двумерном пространстве. В работах В. Гамильтона, Г. Грассмана, Ф. Мёбиуса понятие вектора нашло широкое применение при изучении свойств трёхмерного пространства. В настоящее время на векторной основе излагаются линейная алгебра, аналитическая и дифференциальная геометрия, функциональный анализ.

К понятию вектора как направленного отрезка приводят многие задачи механики и других областей физики: теории упругости, теории электромагнитных полей.

Векторный аппарат используется при доказательстве некоторых теорем и решении многих задач. Сила векторного метода заключается в том, что он позволяет легко делать обобщения, роль которых в математике трудно переоценить.

Понятие вектора является одним из фундаментальных понятий современной математики, а векторный метод является одним из широко употребляемых, красивых и современных методов решения задач.

Многообразие возможностей применения векторного аппарата и его роль в повышении и развитии математической культуры учащихся трудно переоценить. Векторное решение задач аффинной геометрии зачастую проще их решения средствами элементарной геометрии. При этом можно обойтись без тех дополнительных построений, которые иногда затрудняют поиск решения задачи.

В процессе работы я познакомилась с рядом новых источников методической и научной литературы, систематизировала и углубила знания о линейных операциях над векторами, убедилась что векторный метод позволяет эффективно решать задачи по стереометрии даже при недостаточно развитом пространственном воображении.

Хотя векторный метод нельзя считать универсальным, т.к. его основным минусом являются слишком громоздкие вычисления, мы все-таки полагаем, что многим выпускникам он будет по силам.

Векторный метод может быть использован при решении широкого круга геометрических задач. Для решения задач, касающихся взаимного расположения двух прямых, принадлежности трех точек одной прямой, вычисления отношения отрезков параллельных прямых, требуются лишь операции сложения и вычисления векторов, умножения вектора на число. Операция скалярного умножения векторов(в сочетании с предыдущими операциями) позволяет вычислить длины отрезков и величины углов, а значит, находить расстояния, площади и объемы геометрических фигур.

Если необходимо найти длину отрезка, то в качестве базисных векторов выбирают такие векторы, для которых известны их длины и углы между ними. Если в задаче требуется найти величину угла между прямыми, то в качестве базисных выбирают векторы с известными отношениями длин и известными углами между ними.

Поэтому, итогом работы является разработка элективного курса «Векторный метод в стереометрии» (приложение)

Список литературы:

1. Шестаков С.А. Векторы на экзаменах. Векторный метод в стереометрии. –М.:МЦНМО,2005.-112с.:ил.
2. Атанасян Л.С. Геометрия. 10—11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. — 18-е изд. — М. : Издательство «Просвещение», 2009. - 255 с. : ил.
3. Некоммерческое партнерство Региональный Научно-образовательный центр «Логос» - «Векторы в физике», Ярославль, 2009
4. Кущнир А.И. «Векторные методы решения задач», 1994
5. Материалы из интернета.

Примерное планирование элективного курса «Векторный метод в стереометрии» (17часов)

	Тема занятия	Рекомендуемые задания
1. (1 час)	Основные теоретические сведения	Понятия: вектор, начало вектора, конец вектора, одинаково направленные векторы, противоположно направленные векторы, абсолютная величина вектора (модуль вектора), равные векторы, нулевой вектор, неколлинеарные векторы; основные действия, умение выполнять которые должно быть сформулировано у учащихся: сложение векторов (пользуясь «правилом треугольника», «правилом параллелограмма» и «правилом параллелепипеда»); вычитание векторов; умножение векторов на число; представление вектора в виде суммы, разности двух векторов, в виде произведения вектора на число; замена вектора ему равным при помощи параллельного переноса; представление вектора в виде его разложения по двум неколлинеарным векторам; переход от соотношения между векторами к соотношению между их длинами и выполнение обратного действия; действия для овладения компонентами метода: перевод геометрических терминов на язык векторов и решение обратной задачи; перевод условия задачи на язык векторов, т.е. составление системы векторных равенств по условию задачи; выбор базисных векторов, разложение всех введенных в рассмотрение векторов по базисным векторам; упрощение системы векторных равенств; замена векторных равенств алгебраическими.
2. (1 час)	Применение признаков коллениарности и компланарности векторов, теоремы о разложении вектора по трем некомпланарным векторам	Задача 2.1. а) Пусть M- точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ б) В пространстве расположены два треугольника – $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Точки M_1 и M_2 – соответственно точки пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Разложите вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ по векторам $\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{B_1B_2},\overrightarrow{C_1C_2}$. Ответ: а) указание. Достроить треугольник MBC до параллелограмма MBDC и доказать, что векторы $\overrightarrow{MD}$ и $\overrightarrow{MA}$ противоположные, б) $\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1A_2}+\frac{1}{3}\overrightarrow{B_1B_2}+\frac{1}{3}\overrightarrow{C_1C_2}$ Задача 2.2. Точка K – середина ребра DA тетраэдра DABC, M - точка пересечения медиан треугольника ABC, точка P принадлежит ребру BC, причем BP:CP=1:2. Разложите по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{DA},\vec{b}=\overrightarrow{DB},\vec{c}=\overrightarrow{DC}$ векторы $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CM},\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KP},\overrightarrow{AP},\overrightarrow{PM}$. Ответ: $\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$, $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$, $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$ $$\overrightarrow{KM}=-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c},\overrightarrow{KP}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c},\overrightarrow{AP}=-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$ $$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$$ Задача 2.3. Дана усеченная треугольная пирамида $ABCA_1B_1C_1$, в которой $AB:A_1B_1=5:2$. На ребрах AA_1,AB,BC взяты соответственно точки K, M, P, причем $AK=KA_1,AM:AB=2:7$,

		$BP: BC = 5:12$. Разложите по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AA_1},\ \vec{b} = \overrightarrow{AB},\ \vec{c} = \overrightarrow{AC}$ векторы $\overrightarrow{C_1C}, \overrightarrow{CK}, \overrightarrow{C_1M}, \overrightarrow{KP}, \overrightarrow{B_1P}$. Ответ: $\overrightarrow{C_1C} = -\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{c},\ \overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c},\ \overrightarrow{C_1M} = -\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{c},$ $\overrightarrow{KP} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{7}{12}\vec{b} + \frac{5}{12}\vec{c}, \qquad \overrightarrow{B_1P} = -\vec{a} + \frac{11}{60}\vec{b} + \frac{5}{12}\vec{c}$ Домашнее задание: Задача 2.4. Точка K – середина ребра C_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M – точка пересечения диагоналей грани BB_1C_1C точка P принадлежит диагонали AC_1 параллелепипеда, причем $C_1P: AP = 2:1$. Разложите по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AA_1}, \vec{b} = \overrightarrow{AB}, \vec{c} = \overrightarrow{AD}$ векторы $\overrightarrow{B_1D}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BK}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{KM}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{C_1P}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{DP}, \overrightarrow{D_1P}, \overrightarrow{PA_1}, \overrightarrow{PB_1}, \overrightarrow{P}$ Ответ: $\overrightarrow{B_1D} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{BD_1} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{BK} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{AK} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c},\ \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c},$ $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}, \overrightarrow{D_1M} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}, \overrightarrow{KM} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}, \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ $\overrightarrow{C_1P} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}, \overrightarrow{PB} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}, \overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}, \overrightarrow{D_1P} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$ $\overrightarrow{PA_1} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}, \overrightarrow{PB_1} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}, \overrightarrow{PK} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}, \overrightarrow{MP} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$
3. (1 час)	Задачи об отношениях отрезков	Задача 3.1. На ребрах DA, AB, BC тетраэдра $DABC$ взяты точки M, P,K соответственно, причем DM:DA=13:27, BP:BA=3:5, CK:CB=1:4. Плоскость MPK пересекает ребро DC в точке T.Найдите отношение CT:TD. Ответ:7:13 Задача 3.2. В основании усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм ABCD. Известно, что $A_1B_1: AB = 1:2$. На ребре DD_1 взята точка K так, что $D_1K: DK = 2:1$. Найдите, в каком отношении плоскость, проходящая через вершину B_1, середину ребра AA_1 и точку K, делит ребро CC_1 пирамиды. Ответ: 1:13 считая от вершины C_1 Задача 3.3. В основании усеченной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC, $A_1B_1: AB = 3:5$. На ребрах AA_1 и BC взяты точки K и P соответственно, причем $A_1K: KA = 1:2, BP: PC = 3:2$. Найдите, в каком отношении плоскость KPC_1 делит ребро AB. Ответ: 4:11, считая от вершины A Домашнее задание: Задача 3.4. В основании усеченной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC. Известно, что $A_1B_1: AB = 3:5$. На ребре AB взята точка K, на ребре BC – точка M, причем AK:KB=3:2, BM:MC=5:3. Найдите, в каком отношении делит ребро CC_1 плоскость A_1KM. Ответ: 1:11
4.	Нахождение длины отрезка	Задача 4.1.Основани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$– квадрат ABCD. Известно, что $AB = AA_1 = 5, \widehat{A_1AB} = \widehat{A_1AD} = \frac{\pi}{3}$. Найдите длину диагоналей BD_1

(2 часа)		Ответ: $5\sqrt{3}$ Задача 4.2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$равна а, точки О и O_1 – центры оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Длина ортогональной проекции отрезка AO_1 на прямую B_1O равна $\frac{5}{6}a$. Найдите высоту призмы. Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ Задача 4.3.Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. На ребрах BB_1 и DD_1 взяты точки К и Рсоответственно, причем $BK:B_1K=1:3, DP=PD_1$. Плоскость АКР пересекает диагонали A_1D и B_1C куба в точках М и Т соответственно. Найдите длину отвезка МТ. Ответ: $\sqrt{\frac{19}{18}}$ Домашнее задание: Задача 4.4. Все ребра правильной треугольной призмы равны а. Прямая, перпендикулярная плоскости BA_1C_1 данной призмы $ABCA_1B_1C_1$ пересекает прямые BC_1 и AB_1 в точках М и Р соответственно. Найдите длин отрезка МР. Ответ: $\sqrt{\frac{7}{3}}a$
5. (2 часа)	Нахождение угла между скрещивающимися прямыми	Задача 5.1. В треугольной пирамиде КАВС $\widehat{APB}=\widehat{BPC}=\frac{\pi}{2}$, $\widehat{APC}=\frac{\pi}{4}$, PA=PB=PC. Точки Р и D – соответственно середины ребер РА и ВС. Найти угол между прямыми СР и KD. Ответ: $\arccos\frac{1}{4}$ Задача 5.2. В правильной четырехугольной пирамиде МАВСD с вершиной М угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\frac{\pi}{4}$. Точка О - центр основания пирамиды, точки Р и Н - середины отрезков МО и МС соответственно. Найдите угол между прямыми ВР и ВD. Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$. Задача 5.3. Боковое ребро РА тетраэдра PABC перпендикулярно плоскости основания АВС. Известно, что АР=АВ=АС, $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{2}$. Точки D и E - середины ребер РА и РВ соответственно, О – точка пересечения медиан треугольника АВС . Найдите угол между прямыми OD и СЕ. Ответ: $\arccos\frac{5}{\sqrt{102}}$ Домашнее задание: Задача 5.4. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб с острым углом, равным $\frac{\pi}{3}$. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом $\frac{\pi}{4}$. Найдите углы, которые образует высота боковой грани с диагоналями основания. Ответ: $arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$
6. (2часа)	Расстояние от точки до прямой	Задача 6.1. Все ребра четырехугольной призмы имеют длину 2, а в основании призмы $\mathrm{ABCDA_1B_1C_1D_1}$лежит квадрат ABCD. Боковое ребро $\mathrm{AA_1}$образует равные углы с ребрами АВ и AD, причем величина каждого из этих угол равна $\frac{\pi}{3}$. Найдите расстояние от точки А до прямой $\mathrm{C_1K}$, если точка К – середина ребра ВС.

		Ответ: $\sqrt{\frac{19}{7}}$ Задача 6.2. Все плоские углы при вершине D треугольной пирамиды DABC равны $\frac{\pi}{3}$, DA=$\sqrt{2}$, DB=2$\sqrt{2}$, $DC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Точки M, P и K являются серединами ребер DA, DB и BC соответственно. Найдите расстояние от точки P до прямой MK. Ответ: $\sqrt{\frac{11}{24}}$ Задача 6.3. В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник ABCD, в котором AB=1, BC=4. Боковое ребро MA перпендикулярно плоскости снования. Известно, что расстояние от точки A до прямой CK, где точка K – середина ребра MD, равно $\frac{13}{\sqrt{29}}$. Найдите объем пирамиды Ответ: 4 Домашнее задание: Задача 6.4. В основании пирамиды MABCD лежит ромб ABCD, длина стороны которого равна $\sqrt{5}$, а длина диагонали равна 4. Основанием высоты пирамиды, проведенной из вершины M,является точка пересечения диагоналей ромба. Известно, что расстояние от точки C до прямой DK, где точка K – середина ребра MA, равно $3\sqrt{\frac{13}{17}}$. Найдите объем пирамиды Ответ: 4
7. (2 часа)	Расстояние от точки до плоскости	Задача 7.1. Пусть KABCD – правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние от середины ребра AB до плоскости, проходящей через вершину C и середины ребер KB и KD. Ответ: $\frac{3\sqrt{10}}{20}$ Задача 7.2. В правильной четырехугольной пирамиде KABCD с вершиной K сторона основания равна 6, высота равна 4.Найдите расстояние от точки A до плоскости KCD Ответ: $\frac{24}{5}$ Домашнее задание: Задача 7.3. Через диагональ нижнего основания куба, ребро которого равно а, и середину одной из сторон верхнего основания проведена плоскость. Найдите расстояние от центра куба до этой плоскости. Ответ: $\frac{1}{6}$a
8. (2 часа)	Угол между прямой и плоскостью	Задача 8.1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$с ребром, равным а. Точка – середина ребра DD_1. Найдите угол и расстояние между прямыми CK и A_1D. Ответ: $\frac{1}{3}a, \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$ Задача 8.2. Основанием пирамиды DABC является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Ребро DC перпендикулярно плоскости основания, DC=2. Найдите величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми DK и CT, если K – середина ребра BC, а T – середина ребра AB. Ответ: $\frac{\pi}{6}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ Домашнее задание:

		Задача 8.3. Основанием пирамиды DABC является равнобедренный т прямоугольный треугольник ABC, длина гипотенузы AB которого равна 4 $\sqrt{2}$. Ребро DC перпендикулярно плоскости основания, DC=2.Найдите величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми DK и CT, если K-середина ребра AC, а E –середина ребра AB. Ответ: $\frac{\pi}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}$
9. (2часа)	Расстояние между скрещивающими ся прямыми	Задача 9.1. Основание пирамиды MABCD – прямоугольник ABCD, в котором AB:BC=1:2. Каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом $\frac{\pi}{3}$. Точки P и K – середины ребер MA и MC соответственно. Найдите углы, которые образуют прямые DP и DK с плоскостью MAC. Ответ: $arc\cos\frac{7}{\sqrt{65}}$ Задача 9.2. В правильной треугольной пирамиде KABC двугранный угол при ребре основания ABC равен $\frac{\pi}{3}$, точка D – середина ребра KA. Найдите угол между прямой CD и плоскостью KAB Ответ: $arc\cos\sqrt{\frac{11}{29}}$ Домашнее задание: Задача9.3 Дан куб ABCD A_1 $B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой CD_1 и плоскостью BDC_1. Ответ: arccos $\frac{1}{\sqrt{3}}$
10. (2 часа)	Угол между плоскостями	Задача 10.1. Точка K – середина ребра $\mathrm{CC_1}$ куба $\mathrm{ABCDA_1B_1C_1D_1}$. Найдите угол между плоскостями $\mathrm{B_1DK}$ и ABC. Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$ Задача10.2. В основании пирамиды KABCD , все боковые ребра которой одинокого наклонены к плоскости основания, лежит параллелограмм ABCD. Известно, что $\mathrm{AB:AD:AK} = 1:\sqrt{3}:2$. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и плоскостью, проходящей через середины ребер AB, AD и KC. Ответ: $\frac{\pi}{4}$ Домашнее задание: Задача 10.3. В правильной треугольной пирамиде сторона основания в три раза больше бокового ребра. Найдите двугранный угол при боковом ребре. Ответ: arccos $\sqrt{\frac{17}{35}}$