Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Математическая природа музыки

Еленская Наталия Витальевна,
11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,
Лурье Михаил Леонидович,
к.п.н., доцент.

Пермь. 2015.

Оглавление

Введение

Музыка – одно из главных проявлений культуры человечества, охватывающее все страны и эпохи. Она волнует и дарит наслаждение. Но далеко не все знают, что основы музыки – математика и физика, сама по себе, отдельно от них она не существует. Математика используется при анализе музыки и описывает множество ее аспектов: отношение между звуками в аккорде, резонанс, секреты партитуры и даже музыкальные игры. Конечно же, музыку не создать без вдохновения и труда композитора. Ценность математики заключается в том, что она дает возможность понять и восхититься произведением искусства «из-за кулис», позволяет по-новому взглянуть на произведение.

С древнейших времен люди стремились добиться наибольшего благозвучия музыкального инструмента. В разное время были разработаны и введены различные строи инструментов.

Цель данной работы – взглянуть на математическую природу музыки, продемонстрировать музыку с малоизвестной стороны.

Актуальность работы:

С каждым годом музыка все больше и больше входит в нашу жизнь, все больше времени человечество проводит за прослушиванием песен. Музыка стала неотъемлемой частью нашей повседневной жизни. Трудно представить свой день без нее, а забыть дома наушники становится кошмаром для многих молодых людей.

Но мало кто знает, что основой музыки является математика. Издревле люди искали гармонию, многие ученые посвятили свою жизнь не только науке, но и поиску идеального музыкального строя. Первым был Пифагор, его строй стал основой музыки, но он не был идеален. Годами люди пытались усовершенствовать его, добиться идеального звучания и, в конце концов, был открыт диатонический строй[1], который используется и по сей день. Вместе с тем ни он, ни придуманный относительно недавно равномерно-темперированный[2] строй не совершенны, хотя и приближают человечество к искомому идеалу.

Многие когда-то изучали основы гармонии в музыкальных школах и в школах искусств, но для большинства людей музыка остается тайной за семью печатями. Данная работа призвана разобраться в математической природе музыкального строя. Эта тема без сомнения является актуальной, ведь, хотя идеальный музыкальный строй до сих пор не найден, в нашем современном мире, где музыка обрела популярность среди всех слоев населения, нужно разбираться хотя бы в основах гармонии, чтобы в полной мере насладиться музыкой.

---

[1] Арбонес Х. и Милруд П. Числа – основа гармонии. Музыка и математика. М.: Де Агостини. 2014. С. 26

[2] Аллон С.М. Фадеев И.Г. Ремонт роялей и фортепиано. М.: Легкая индустрия. 1968. С. 189

Задачи:

- Разобраться с типами настройки, изучить историю их происхождения, выявить недостатки;
- Опираясь на интервальные коэффициенты, посчитать частоты гаммы C dur (до мажор) при чистом строе;
- Опираясь на результаты предыдущих расчетов рассмотреть гамму D dur (ре мажор), рассчитать получившиеся коэффициенты, выявить отличия;
- Опираясь на интервальные коэффициенты, посчитать частоты гаммы D dur (ре мажор), взяв за основу частоту ноты «ре», полученную в гамме C dur (до мажор), сравнить получившиеся частоты, выявить отличия;
- Посчитать частоты гаммы C dur (до мажор) при равномерно-темперированном строе, сравнить с предыдущими результатами;
- Используя результаты расчетов частот нот гамм C dur и D dur при натуральном (диатоническом) строе, посчитать частоты нот в гаммах E dur (ми мажор) и Fis dur (фа-диез мажор). С помощью статистического сравнения через критерий Фридмана определим наличие либо отсутствие значимых различий между данными гаммами (до мажор, ре мажор, ми мажор и фа мажор);
- Используя статистический критерию U Вилкоксона-Манна-Уитни выяснить, сильно ли тип настройки влияет на кол-во колебаний нот в гамме;
- Используя t-критерий Стьюдента выяснить, являются ли значимыми различия между частотами нот гамм C dur (до мажор) и D dur (ре мажор).

Гипотеза:

- Математическая природа музыки позволяет проверить и проанализировать музыкальный строй путем расчётов.

Глава 1

§1 Связь между математикой и музыкой.

Начиная исследования музыкального строя, обратимся к страницам истории, а именно – к истории Древней Греции. В Элладе зародились такие понятия как мелодия и ритм, гамма и лад, тембр и гармония. Именно в Греции жил выдающийся ученый Пифагор – великий математик, творец акустики, основоположник теории музыки. Выдающаяся личность этого ученого дала начало тому, что ныне популярно среди всех слоев общества – музыке. Именно математика является тем пифагорейским музыкальным стартом, что определил на столетия вперед судьбу европейской музыки. После Пифагора многие музыканты и ученые посветили себя поиску идеального звучания инструмента. В XVIII веке была создана музыкальная акустика. Теперь музыку невозможно отделить от математики, ведь математическая теория струны доказывает, что любой музыкальный инструмент всего лишь «физико-акустический прибор». Все в музыке можно изучить с помощью точных наук, все подвержено математическому анализу: и тембр, и звук, и лад, и гармония. Каждое настоящее искусство имеет свою теорию, которую можно выразить в терминах математики, и музыка не исключение. Пифагор, слушая звучание медных чаш, создал свою математическую теорию музыки. Начиная с него, математики начали проявлять интерес к музыке. Теория Пифагора была первой у греков. Результатом усердной работы лучших умов стало создание логарифмически-равномерной двенадцатитонной музыкальной школы – это итог современной деятельности учёных и музыкантов. Первым возможности равномерно-темперированного строя продемонстрировал Иоганн Себастьян Бах: он сочинил 48 прелюдий и фуг во всех возможных тональностях и поместил их в два сборника, которые называются «Хорошо темперированный клавир».[3]

Любовь к искусству, в частности к музыке появилась у Пифагора в годы его ученичества у старца Гермодаманта. Молодой Пифагор проводил дни, слушая мелодии кифары и гекзаметры Гомера. Эту любовь к поэзии Гомера и к музыке он сохранил на всю жизнь. Уже в зрелом возрасте, будучи мудрецом и основав собственную школу, ученый прививал любовь к музыке и своим ученикам. Это был один из четырех предметов школы Пифагора. Согласно преданию, сам мудрец обнаружил, что приятные слуху созвучия – консонансы, т. е. созвучия, получаются лишь в том случае, когда длины струн относятся как целые числа первой четверки, т. е. как 1:2, 2: 3, 3:4. Именно это открытие впервые указывало на существование числовых закономерностей в природе.[4]

[3] Клавир – старинное название клавесина.

[4] Диоген Лаэртский. О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. М.: "Мысль". 1986. С. 394.

В основу своей школы Пифагор положил несколько учений, одним из которых было такое: музыка есть отношение чисел в звуках. Именно в его школе получила свое первое оформление математическая теория музыки.

Пифагором был открыт закон целочисленных отношений в консонансах. Это означает, что, если зажать струну в целом соотношении, например, посередине, на треть, на четверть и так далее, то получившийся звук будет более приятен слуху, чем тот, который получился бы при дробном соотношении длин струны.

В основу пифагорейской школы легли два закона:

Закон 1. Две звучащие струны дают консонанс лишь тогда, когда их длины относятся как целые числа, составляющие «треугольное» число.

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4, \text{ т. е. как } 1:2,\ 2:3,\ 3:4.$$

Закон 2. Четверка чисел 1, 2, 3, 4 – тетраэдр – лежит в основе построения различных музыкальных ладов.

В ходе экспериментов с монохордом, Пифагор зажимал струну в различных отношениях. Ученый заметил, что в зависимости от того, делишь ли струну на три, четыре пять и более равных частей, в результате получаешь разные по количеству колебаний, а, следовательно, и по высоте звуки. Ученый расположил их по высоте, а крайние назвал октавой. Внутри октавы выстроились по порядку 8 звуков – ступенек. Этот ряд звуков получил название Пифагоров звукоряд.

К сожалению, система Пифагора не была идеальной, в ней существовали свои изъяны. В попытках добиться идеального звучания, композиторы, музыканты и ученые попытались внести поправки в систему греческого мудреца. Как результат, человечество получило натуральный, или по-другому диатонический строй, а позже перешло к попыткам равномерно темперировать звучание инструментов. Особая необходимость в таком строе появилась тогда, когда появились музыкальные инструменты с закрепленной высотой звука (примером такого инструмента является клавесин, предшественник современного фортепиано). Как следствие долгих трудов и исканий был получен равномерно темперированный строй.[5]

Именно древнегреческие ученые определили два основных интервала (октаву и квинту), на которые долгое время опирались люди при настройке музыкальных инструментов. Учитывая этот факт, нет ничего удивительного, что первый общепринятый музыкальный строй принято приписывать пифагорейской школе, а иногда и самому Пифагору.

[5]Аллон С.М. Фадеев И.Г. Ремонт роялей и фортепиано. М.: Легкая индустрия. 1968. С. 187.

§2 Музыкальная система Пифагора

Последователи пифагорейской школы изучали музыку на основе звуков, издаваемых единственной струной музыкального инструмента, называемого монохордом. Длина струны монохорда изменялась подобно тому, как гитарист зажимает струны при игре на современной гитаре. При изменении длины изменялась звучащая нота: чем короче струна, тем выше нота. Пифагорейцы попарно сравнивали звуки, соответствовавшие различным длинам струны. В своих экспериментах они описывали соотношения длин сторон, выражаемые небольшими числами: они делили струну пополам, в соотношении один к двум, два к одному и так далее.

Результаты оказались удивительными: звуки, издаваемые при колебаниях струн, длины которых выражались небольшими числами, оказывались самыми приятными, то есть самыми гармоничными. На основе этих наблюдений пифагорейцы создали математическую модель физического явления, в которой при этом учитывалась и эстетическая составляющая.

Простейшее соотношение образуется, если зажать струну ровно посередине. Это отношение в численном виде записывается как 2:1 и соответствует интервалу в одну октаву (интервал от ноты « до» до следующей «до»). Еще одно простейшее соотношение образуется, если прижать струну в точке, отстоящей от конца струны на треть ее длины. В численном виде это отношение записывается как 3:2 и соответствует интервалу в одну квинту (интервал от ноты «до» до ноты «соль», к примеру). Если прижать струну в точке, отстоящей от ее конца на четверть длины, что в численном виде записывается как 4:3, получится интервал, известный под названием кварта (интервал от ноты «до» до ноты «фа»).

Таким образом, становится очевидно, что если длины струн удовлетворяют соотношению

$$\frac{n+1}{n}$$

то соответствующие им звуки будут гармоническими, приятными слуху. Пифагорейцы считали это доказательством прямой взаимосвязи между числами и гармонией, красотой.[6]

[6] Арбонес Х. и Милруд П. Числа – основа гармонии. Музыка и математика. М.: Де Агостини. 2014. С. 12.

§3 Пифагорейский строй.

Пифагорейский, или пифагоров строй – один из первых общепринятых музыкальных строев. Обычно его создание приписывают пифагорейской школе, а иногда и самому великому ученому. В основе этого строя лежат простые отношения между различными звуками. В качестве «фундамента» выступают два интервала: квинта, имеющая соотношение 3:2 и октава, с соотношением 2:1.

Представление данного строя в виде квинтовой цепи сложилось в эпоху западноевропейского барокко.

Представить его можно в виде уже упомянутой цепочки квинт:

F — C — G — D — A — E — H – Fis – Cis – Gis – Dis – Ais - Eis

или в виде диатонической гаммы:

C		D		E		F		G		A		H		C^1
1		9\8		81\64		4\3		3\2		27\16		243/128		2
	Целый тон		Целый тон		Лимма		Целый тон		Целый тон		Целый тон		Лимма	
	8\9		8\9		243/256		8/9		8\9		8\9		243/256	
	203,91 ц		203,91 ц		90,22 ц		203,91 ц		203,91 ц		203,91 ц		90,22 ц	

Пифагорейский строй господствовал в музыке вплоть до шестнадцатого века. Ныне он практически не используется, только музыкальные теоретики используют данный строй, когда описывают интервалы. В западной музыке пифагорейскому строю приписывается роль основы не только для античной монодии, но также и для полифонической музыки Средневековья.

Несовершенство пифагорейского строя выражается в так называемой пифагорейской комме. Проблема заключается в следующем: при настройке инструмента пифагоровым строем, неизбежно появляется «волчья» квинта – соотношение звуков, которое меньше квинты на одну пифагорову комму. Это основная причина, по которой пифагоров строй ныне практически не используется.[7] При попытке транспонировать музыкальное произведение также возникали сложности с нечистыми квинтами.

Из-за своих недостатков, пифагорейский строй выходит из употребления в шестнадцатом веке, а человечество, в поисках более чистого звучания музыки, переходит к новому типу строя – к диатонике.

[7] Аллон С.М. Фадеев И.Г. Ремонт роялей и фортепиано. М.: Легкая индустрия. 1968. С. 187.

§4 Диатонический строй

И человеческий голос, и безладовые инструменты допускают использование так называемого натурального строя, в котором ноты более согласованны, гармоничны. И голос, и струнные инструменты допускают незначительное изменение высоты издаваемого звука для наибольшего созвучия. Однако это вызывает некоторые математические затруднения: во-первых, несовместимость квинты и октавы ведет к появлению «волчьей квинты», во-вторых, существует несовместимость между квинтами и большими терциями.

В результате поисков «чистого» натурального строя появилась новая система отношения звуков – диатонический строй. Он имеет более сложную структуру чем пифагорейский.[8]

Начиная от ноты до, соблюдая интервалы в одну квинту, откладываются две следующие основные ноты этого строя: фа и соль. Далее определяются ми, ля и си, отстоящие на чистую терцию от до, фа и соль соответственно.

Последняя нота, ре, отстоит от ноты соль ровно на одну квинту:

фа	⇦	до	⇨	соль	⇨	ре
⇩		⇩		⇩		
ля		ми		си		

Интервалы диатонического строя «чище» и более постоянны. Это проявляется и в том, что соотношения частот звуков диатонического строя относительно просты.

Последовательность, определяющая интервалы диатонического строя, подчиняется структуре тональной музыки.[9] К тональной музыке принадлежит большинство композиций, созданных за последние несколько веков. В ней ноты выстроены в иерархию вокруг главной ноты (тоники). Каждая нота выполняет определенную музыкальную функцию в произведении. Из-за этого некоторые ступени тональности настраиваются в зависимости от контекста. Эти варианты приведены в таблице:

Нота	Ре b	Ми b	Соль b	Ля b	Си b
Отношение частот	16/15	6/5	45/32	8/5	16/9

---

[8] Арбонес Х. и Милруд П. Числа – основа гармонии. Музыка и математика. М.: Де Агостини. 2014. С. 26.

[9] Арбонес Х. и Милруд П. Числа – основа гармонии. Музыка и математика. М.: Де Агостини. 2014. С. 27.

В качестве примера использования диатонического строя можно привести песнопения григорианского хорала и русского распева, а также народные песни разных стран и народов. Этот вид строя используется для настройки таких инструментов как скрипка или виолончель, и других, не имеющих фиксированных нот.

Академические композиторы начиная с XIX века (Григ, Шопен, Мусоргский, Римский-Корсаков и др.) использовали диатонику для придания музыке особого колорита «архаичности», национальной «экзотичности», некой «природной чистоты», нетронутости и т.п. Примеры: Мусоргский. Опера «Борис Годунов». Хор «На кого ты нас покидаешь» Равель. «Павана на смерть инфанты».[10]

Диатонический строй не миновали проблемы, неизбежно возникающие из-за несовместимости основных интервалов – октавы, квинты и терции. Почти для всех квинт соотношение частот звуков равно 3/2, но для квинты ре – ля оно немного меньше – 40/27. При дополнении диатонического строя диезами и бемолями все усложняется еще больше: неизбежно появляется волчья квинта.[11]

[10] 7. Диатоника. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Диатоника

[11] Арбонес Х. и Милруд П. Числа – основа гармонии. Музыка и математика. М.: Де Агостини. 2014. С. 27.

§5 Равномерно темперированный строй

В попытке избежать возникновения волчьих квинт и проблем со сменой тональности, человечество пришло к новому типу строя – равномерно темперированному. Использующиеся ранее строи имели ряд недостатков. Например, произведение нельзя было транспонировать или модулировать, так как в ряде созвучий возникал резкий акустический диссонанс.[12]

Особенность равномерно-темперированного строя в том, что в нем октава делится на двенадцать равных полутонов, каждый из которых равен отношению .[13] Благодаря этому, проблемы фальшивых квинт удалось избежать. Более того, теперь можно было произвольно транспонировать любое музыкально произведение. Минусом такой темперации является то, что для решения проблемы несовместимости основных интервалов пришлось пожертвовать чистотой звучания. Данный строй вошел в употребление в восемнадцатом веке и господствует до сих пор.

Равномерно темперированный строй используют для настройки инструментов с фиксированными звуками. Примером таких инструментов являются фортепиано, любые струнные инструменты, имеющие распределение нот по ладам, как например гитара, и другие.

Невозможно с достоверностью указать, кто именно изобрёл равномерную темперацию. Одним из первых авторов, давших теоретическое обоснование 12-ступенной равномерной темперации, был китайский принц Чжу Цзайюй, в трактате 1584 года.[14]

Вычисление частот звуков.

Частоту любого звука при равномерно темперированном строе можно вычислить с помощью математической формулы:

$$f(i) = f_0 \times 2^{i/12}$$

где f_0 - любая известная частота, а i — количество полутонов между искомой частотой и f_0.

[12] Гельмгольц Г. Учение о слуховых ощущениях как физиологическая основа для теории музыки. Пер. с нем. Издание 3-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2013. С. 445.

[13] Аллон С.М. Фадеев И.Г. Ремонт роялей и фортепиано. М.: Легкая индустрия. 1968.С. 189.

[14] Равномерно-темперированный строй. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Равномерно_темперированный_строй

Глава 2

§1 Расчет частот нот.

Таким образом, исходя из сведений главы 1, можно сделать вывод, что для подсчета частоты гаммы при любой настройке, следует использовать интервальные коэффициенты, соответствующие типу строя[15].

Сначала, начиная с ноты до, частота которой принимается равной 1, рассчитываем частоты нот фа и соль, отстоящих от до на одну чистую квинту. Частота фа принимается равной 4/3, частота соль – 3/2. Далее рассчитываем частоты ноты ми, отстоящей от до на 5/4.

Аналогично определяем частоту ноты ля, которую отделяет от фа одна терция:

Ля = фа*(5/4)=(4/3)*(5/4)=5/3.

Си отстоит на одну терцию от соль:

Си = соль*(5/4)=(3/2)*(5/4)=(15/8).

И наконец, рассчитаем частоту ре, которую отделяет от ноты соль одна чистая квинта со сдвигом на одну октаву:

Ре = соль*(3/2)*(1/2)=(3/2)*(3/2)*(1/2)=(9/8)

Таким образом, полученные коэффициенты можно занести в таблицу:

Нота	до	ре	ми	фа	соль	ля	си	До1
Отношение частот	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Исходя из этого, сосчитаем частоты колебаний, соответствующие нотам гаммы до мажор 1 октавы при чистой настройке. В качестве эталона возьмем частоту ноты «ля» = 440гц. От нее сосчитаем частоту ноты «до», и, основываясь на ней, найдем частоты остальных нот гаммы.

---

[15] Арбонес Х. и Милруд П. Числа – основа гармонии. Музыка и математика. М.: Де Агостини. 2014. С. 27.

$x \times \frac{5}{2} = 440$

$$x = \frac{440 \times 3}{2} = 264 - \text{До}$$

$$\frac{264 \times 9}{8} = 297 - \text{Ре}$$

$$\frac{264 \times 5}{4} = 330 - \text{Ми}$$

$$\frac{264 \times 4}{3} = 352 - \text{Фа}$$

$$\frac{264 \times 3}{2} = 396 - \text{Соль}$$

$$\frac{264 \times 5}{3} = 440 - \text{Ля}$$

$$\frac{264 \times 15}{8} = 475 - \text{Си}$$

Рассмотрим гамму Ре Мажор с этими же частотами и выясним, имеются ли различия между частотами двух гамм.

У гамм до и ре мажора общими нотами являются ре, ми, соль, ля и си. Проверим, сохраняются ли коэффициенты между нотами.

Ре-ми = $\frac{10}{9}$

Ре-соль = $\frac{4}{3}$

Ре-ля = $\frac{40}{27}$

Ре-си = $\frac{5}{3}$

Интервалы сохранились между нотами, кроме нот ре-ля.

Рассчитаем частоты гаммы ре мажор по коэффициентам из таблицы. Частоту ноты ре возьмем полученную ранее в до мажорной гамме.

Ре = 297
Ми = 330
Соль = 396
Ля = 445,5
Фа-диез = $\frac{297 \times 5}{4} = 371{,}25$
До-диез= $\frac{297 \times 15}{8} = 556{,}84$

И, наконец, сосчитаем частоты гаммы до мажор при равномерно-темперированном строе. Интервальный коэффициент равен $\sqrt[12]{2}$.[16]

Эталоном берем полученную ранее частоту ноты до = 264. Исходя из этого, получаем результат:

Ре = 296,329968
Ми = 332,619128541
Фа = 352,397659781
Соль = 395,552981993
Ля = 443,993191274
Си = 498,365464

Таким образом, мы рассчитали частоты гамм при чистой и равномерно-темперированной настройке через интервальные коэффициенты. Основываясь на них, любой человек может настроить инструмент, если воспользуется прибором, считающим частоты.

Но математическая природа музыки позволяет не только вычислить частоты нот, но и проанализировать полученные результаты. Убедимся в этом, используя методы математической статистики.

---

[16] Аллон С.М., Фадеев И.Г. Ремонт роялей и фортепиано, М.: Легкая индустрия. 1968. С. 189.

§2 Критерий Стьюдента[17]

Данный критерий отбора направлен на оценку различий величин средних $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ двух выборок X и Y. Одно из главных достоинств критерия – широта его применения. В данном случае, используем его для сопоставления средних несвязной выборки, а именно – выборки гамм C Dur и D Dur.

Рассмотрим гаммы C dur и D dur (До Мажор и Ре Мажор). Используя t-критерий Стьюдента, выясним, сильно ли они различаются между собой.

$$t_{\text{эмп}} = \frac{|\bar{X}-\bar{Y}|}{Sd} \qquad Sd = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

n1=n2=n, тогда

$$Sd = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2+\sum(y_i-\bar{y})^2}{(n-1)n}}$$

№	Гаммы		Отклонение от среднего		Квадраты отклонений	
	C dur (x) (До Мажор)	D dur (y) (Ре Мажор)	$\sum(x_i-\bar{x})$	$\sum(y_i-\bar{y})$	$\sum(x_i-\bar{x})^2$	$\sum(y_i-\bar{y})^2$
1	264	297	-103,71	-116,08	10755,76	13474,56
2	297	330	-70,71	-83,08	4999,9	6902,28
3	330	371	-37,71	-41,83	1422,04	1749,74
4	352	396	-15,71	-17,08	246,8	291,72
5	396	445,5	28,29	32,42	800,32	1051,05
6	440	495	72,29	81,92	5225,84	6710,88
7	495	556,62	127,29	143,79	16202,74	20675,56
Сумма	2574	2891,62	0,03≈0	0,06≈0	39653,4	50855,79
Среднее	367,71	413,08				

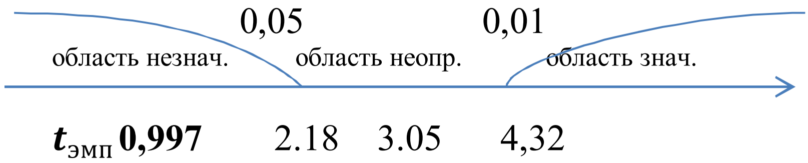
$$Sd = \sqrt{\frac{39653{,}4 + 50855{,}79}{6 \times 7}} = \sqrt{2154{,}9807} = 46{,}42$$

$$|\bar{x}-\bar{y}| = |367{,}71 - 413{,}08| = |-45{,}37| = 45{,}37$$

$$t_{\text{эмп}} = \frac{45{,}37}{46{,}42} = 0{,}9773804$$

[17] Ермолаев О.Ю. Математическая статистика для психологов. М.: Флинта. 2003. С. 169.

$k = n1 + n2 - 2 = 14 - 2 = 12$
$k = 12$



Таким образом, значения попадает в зону незначимости, и, следовательно, гаммы Cdur (До Мажор) и Ddur (Ре Мажор) не имеют больших различий.

§3 Расчет по критерию U Вилкоксона-Манна-Уитни[18]

Для сравнения двух независимых гамм, потребуется независимая выборка. Для этого используем расчет по критерию U Вилкоксона-Манна-Уитни. Это один из наиболее распространенных рядов непараметрических критериев, которые используются для оценки достоверности различий между несвязными выборками. Этот критерий обычно применяют для оценки различий по уровню выраженности какого-либо признака для двух несвязных выборок. При этом выборки могут различаться по числу анализируемых значений. Особо этот критерий хорош, когда количество данных невелико.

Рассмотрим гамму C dur (До Мажор) при чистой настройке и при равномерно-темперированной. Использую критерий отбора U, выясним, сильно ли тип настройки влияет на количество колебаний нот в гамме.

X (C dur чистой настройки)	Y (C dur равн.-темп. настройки)	Ранги X	Ранги Y
264	-	1,5	-
-	264	-	1,5
-	296,33	-	3
297	-	4	-
330	-	5	-
-	332,62	-	6
352	-	7	-
-	352,4	-	8
-	395,55	-	9
396	-	10	-
440	-	11	-
-	443,99	-	12
495	-	13	-
-	498,37	-	14
Сумма рангов:		51,5	53,5

$$51{,}5 + 53{,}5 = 105$$
$$n1 = n2 = 7$$
$$N = n1 + n2$$
$$\frac{N(N+1)}{2} = \frac{14 \times 15}{2} = 105$$
$$R_{max} = 53{,}5$$

[18] Ермолаев О.Ю. Математическая статистика для психологов. М.: Флинта. 2003. С. 101.

$$U = (n1 + n2) + \frac{n_x(n_x + 1)}{2} \Rightarrow k_{max} = 49 + 28 - 53{,}5 = 16{,}5$$

$$\begin{cases} 11 \text{ для } p \leq 0{,}05 \\ 6 \text{ для } p \leq 0{,}01 \end{cases}$$

Значение $U_{\text{эмп}}$ попадает в зону незначимости, из чего можно сделать вывод, что тип настройки практически не меняет количество колебаний нот, следовательно, и их звучание изменяется не сильно.

§4 Критерий Фридмана[19]

Воспользуемся критерием Фридмана, с целью доказать наличие различий между частотами разных гамм. Преимущество этого метода отбора в том, что он позволяет провести выборку за один раз, в то время как другие методы, как например критерий знаков, требуют больших действий для сравнения.

Выявим наличие либо отсутствие значимых различий между гаммами C dur (До Мажор), D dur (Ре Мажор), E dur (Ми Мажор) и Fis dur (Фа ♯ Мажор).

Для данного метода были проведены дополнительные расчеты частот гамм E dur (Ми Мажор) и Fis dur (Фа-диез Мажор) при диатонической настройке. Для этого вновь были использованы интервальные коэффициенты данного строя. Результаты расчетов сразу внесены в таблицу для сравнения.

C dur	Ранги	D dur	Ранги	E dur	Ранги	Fis dur	Ранги
264	1	297	2	330	3	371,25	4
297	1	330	2	371,25	3	412,5	4
330	1	371,25	2	412,5	3	464,06	4
352	1	396	2	440	3	495	4
396	1	445,5	2	495	3	556,8	4
440	1	495	2	550	3	618,75	4
495	1	556,87	2	618,75	3	696,09	4
Сумма рангов:	7	-	14	-	21	-	28

7+14+21+28=70

$$\frac{n \times c(c+1)}{2} = \frac{7 \times 4 \times 5}{2} = 70$$

Всего рангов: 70

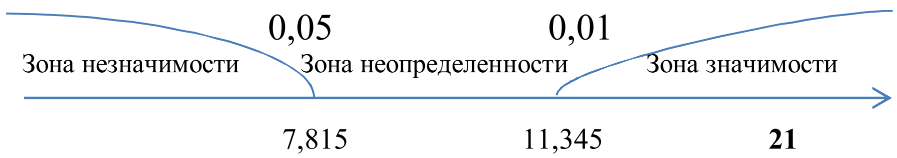
$$X^2_{\text{Фр.эмп}} = \left[\frac{12}{n \times c(c+1)} \times \sum_{i=1}^{c} \left(R_i^2\right)\right] - 3n(c+1)$$

[19] Ермолаев О.Ю. Математическая статистика для психологов. М.: Флинта. 2003. С. 82.

$$X^2_{\text{Фр.эмп}} = \left[\frac{12}{7 \times 4 \times 5} \times (49 + 196 + 441 + 784)\right] - (3 \times 7 \times 5) =$$

$$= \frac{3}{35} \times 1470 - 105 = 3 \times 42 - 105 = 126 - 105 = 21$$

$$X^2_{\text{Фр.эмп}} \begin{cases} 7{,}815 \text{ для } p \leq 0{,}05 \\ 11{,}345 \text{ для } p \leq 0{,}01 \end{cases}$$



Таким образом, полученное эмпирическое значение критерия Фридмана попало в зону значимости. Исходя из этого, можно сделать вывод, что между гаммами C dur, D dur, E dur и Fis dur есть статистически значимые различия.

Заключение

В исследовательской работе было выдвинуто предположение, что с помощью математики можно рассчитать любую ноту, а также можно проанализировать любую аксиому музыки. Используя интервальные коэффициенты и учитывая особенности каждого строя, были получены несколько вариантов одной и той же гаммы, а также рассчитаны частоты нот в гаммах при одной настройке. Полученные результаты удалось проанализировать при помощи статистических методов оценивания, применив несколько критериев отбора. Результаты анализа подтвердили ранее выдвинутое предположение о том, что музыка напрямую связана с математикой. Данная работа продемонстрировала, что в основе музыки лежит математика. Она – фундамент гармонии. Любая нота музыкального строя рассчитывается через интервальный коэффициент, а математическая природа музыки позволяет использовать методы математической статистики для сравнения и анализа результатов расчетов. Результат анализа и сравнения совпадет с теорией музыки.

И, тем не менее, идеального музыкального строя пока что не существует. Возможно, когда-нибудь человечество сделает шаг вперед и добьется идеального звучания инструмента, а пока что остается только пытаться улучшить то, что есть – а в этом нам помогает математика.

Список литературы

1. Аллон С.М. Фадеев И.Г. Ремонт роялей и фортепиано. М.: Легкая индустрия. 1968. 228 с.
2. Арбонес Х. и Милруд П. Числа – основа гармонии. Музыка и математика. М.: Де Агостини. 2014. 160 с.
3. Гельмгольц Г. Учение о слуховых ощущениях как физиологическая основа для теории музыки. Пер. с нем. Издание 3-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2013. 592 с.
4. Диатоника. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Диатоника.
5. Диоген Лаэртский. О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. М.: Мысль. 1986. 454 с.
6. Ермолаев О.Ю. Математическая статистика для психологов. М.: Флинта. 2003. 336 с.
7. Равномерно-темперированный строй. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Равномерно_темперированный_строй.
8. Риман Г. Rimann Music Lexikon. London: Scott&CO.LTD. 1967. 413 с.

Приложения

Таблица интервалов Пифагорова строя[20]

В следующей таблице показаны интервалы Пифагорова строя, не превосходящие октаву, и получаемые не более чем 18-ю квинтовыми шагами.

Сокращения: «м.» — малая; «б.» — большая; «ум.» — уменьшённая; «ув.» — увеличенная.

В колонках Q и O таблицы показаны соответственно количества квинт и октав, откладыванием которых получается данный интервал (при этом положительным числам соответствует откладывание вверх, а отрицательным — вниз). Например, уменьшённой септиме соответствуют значения Q = −9 и O = 6, то есть уменьшенная септима получается откладыванием от данного звука (высоты) 9-ти квинт вниз и 6 октав вверх; таким образом, она имеет отношение частот звуков, равное

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-9} \times \left(\frac{2}{1}\right)^{6} = 2^{15} \times 3^{-9} = \frac{32768}{19683}$$

При этом число O (для интервалов, меньших октавы) однозначно определяется числом Q, находясь от него в функциональной зависимости, определяемой формулой:

$$O = -\lfloor Q \times (\log_2 3 - 1) \rfloor,$$

где $\lfloor x \rfloor$ — целая часть числа.

Далее, каждый из интервалов, указанных в таблице, однозначно представляется как сложенный из T целых тонов (указанных в колонке T), L лимм (колонка L) и K Пифагоровых комм (колонка K), при ограничениях

$$0 \le T \le 6, 0 \le L \le 1, -2 \le K \le 1$$

Как видно из таблицы, для диатонических интервалов имеет место одно из трёх пар равенств: $L = 0$ и $K = 0$, либо $L = 1$ и $K = 0$, либо $L = 0$ и $K = -1$ (то есть диатонический интервал всегда равен либо целому числу тонов, либо целому числу тонов с прибавленной лиммой, либо меньше целого числа тонов на Пифагорову комму). Для хроматических интервалов, сверх того, могут иметь место соотношения $L = 1$ и $K = 1$, либо $L = 1$ и $K = -1$, а «дихроматических» — также $L = 0$ и $K = 1$, либо $L = 0$ и $K = -2$[21]

[20] Риман Г. Rimann Music Lexikon, London: Scott&CO.LTD, 1967, 411 с.

[21] Равномерно-темперированный строй. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Равномерно_темперированный_строй.

Название	Q	O	T	L	K	Отношение	Величина в цетах	Ступень от C	Дополнительные примеры
унисон, прима	0	0	0	0	0	1:1	0,00	C	-
Пифагорова комма (ув. септима без октавы)	12	-7	0	0	1	531441:524288	23,46	His	des—cis, fes—e, a—gisis
дважды ум. терция	-17	10	0	1	-1	134217728:129140163	66,76	eseses	cis—eses, eis—ges
лимма, м. секунда, меньший полутон	-5	3	0	1	0	256:243	90,22	des	e—f, cis—d, des—eses
апотома, ув. прима, больший (хр.) полутон	7	-4	0	1	1	2187:2048	113,69	cis	cis—cisis, des—d, eses—es
ум. терция	-10	6	1	0	-1	65536:59049	180,45	eses	cis—es, e—ges
целый тон, б. секунда	2	-1	1	0	0	9:8	203,91	d	d—e, e—fis, B—c, des—es, cis—dis
дважды ув. прима	14	-8	1	0	1	4782969:4194304	227,37	cisis	ces—cis, deses—d
дважды ум. кварта	-15	9	1	1	-1	16777216:14348907	270,67	feses	cis—fes, fis-b, cisis—f
полудитон, м. терция	-3	2	1	1	0	32:27	294,13	es	d—f, es—ges
ув. секунда	9	2	1	1	0	19683:16384	317,60	dis	des—e, es—fis
ум. кварта	-8	5	2	0	-1	8192:6561	384,36	fes	cis—f, fis—b, dis—ges
дитон, б. терция	4	-2	2	0	0	81:64	407,82	e	d—fis, eis-gisis
дважды ув. секунда	16	-9	2	0	1	43046721:33554432	431,28	disis	ces—dis, es—fisis
дважды ум. квинта	-13	8	2	1	-1	2097152:1594323	474,58	geses	cis—ges, disis—a
кварта	-1	1	2	1	0	4:3	498,04	f	d—g, ces—fes
ув. терция	11	-6	2	1	1	177147:131072	521,51	eis	des—fis, deses—f

дважды ум. секста	-18	11	3	0	-2	536870912:387420489	564,81	aseses	cisis—as, cis—ases
ум. квинта	-6	4	3	0	-1	1024:729	588,27	ges	cis—g, H—f, e—b
тритон, ув. кварта	6	-3	3	0	0	729:512	611,73	fis	f—b, des—g
дважды ув. терция	18	-10	3	0	1	387420489:268435456	635,19	eisis	des—fisis, eses—gis
ум. секста («волчья квинта» Пифагорова строя)	-11	7	3	1	-1	262144:177147	678,49	ases	cis—as, Gis—es
квинта	1	0	3	1	0	3:2	701,96	g	d—a, dis—ais
дважды ув. кварта	13	-7	3	1	1	1594323:1048576	725,42	fisis	des—gis, deses—a
дважды ум. септима	-16	10	4	0	-2	67108864:43046721	768,72	heseses	cis—heses, cisis—b
м. секста	-4	3	4	0	-1	128:81	792,18	as	d—b, dis-h
ув. квинта (тетратон)	8	-4	4	0	0	6561:4096	815,64	gis	des—a, eses—b
ум. септима	-9	6	4	1	-1	32768:19683	882,40	heses	cis—b, Gis—f
б. секста	3	-1	4	1	0	27:16	905,87	a	d—h, Es—c
дважды ув. квинта	15	-8	4	1	1	14348907:8388608	929,33	gisis	des—ais, deses—a
дважды ум. октава	-14	9	5	0	-2	8388608:4782969	972,63	ceses1	Dis—des, Disis—d
м. септима	-2	2	5	0	-1	16:9	996,09	b	G—f, Des—ces
ув. секста (пентатон)	10	-5	5	0	0	59049:32768	1019,55	ais	des—h, deses—b
ум. октава	-7	5	5	1	-1	4096:2187	1086,31	ces1	Cis—c, Des—deses
б. септима	5	-2	5	1	0	243:128	1109,78	h	cis—his
дважды ув. секста	17	-9	5	1	1	129140163:67108864	1133,24	aisis	ces—ais, Eses—cis
ум. нона	-12	8	6	0	-2	1048576:531441	1176,54	deses1	Dis—es, Eis—f
октава	0	1	6	0	-1	2:1	1200,00	C1	

Сравнение равномерно-темперированного строя и натурального строя.

Равномерно темперированный строй очень легко можно отобразить в виде измерения интервалов в центах

Тон	C	C♯	D	Eb	E	F	F#	G	G♯	A	A♯	H	C1
Цент	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

Следующая таблица показывает отличия интервалов равномерно-темперированного ряда с натуральным[22]

Интервал	Равномерно-темперированные интервалы	Натуральные интервалы	Разница в центах
Прима	$\sqrt[12]{2^0} = 1 = 0\ Cent$	$\frac{1}{1} = 1 = 0 Cent$	0
Малая секунда	$\sqrt[12]{2^1} = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}059463 = 100 Cent$	$\frac{16}{15} \approx 1{,}06667 \approx 111{,}73\ Cent$	-11,73
Большая секунда	$\sqrt[12]{2^2} = \sqrt[6]{2} \approx 1{,}122462 = 200\ Cent$	$\frac{9}{8} = 1{,}125 \approx 203{,}91\ Cent$	-3,91
Малая терция	$\sqrt[12]{2^3} = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}189207 = 300\ Cent$	$\frac{6}{5} = 1{,}2 \approx 315{,}64\ Cent$	-15,64
Большая терция	$\sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}259921 = 400\ Cent$	$\frac{5}{4} = 1{,}25 \approx 386{,}31\ Cent$	13.69
Кварта	$\sqrt[12]{2^5} = \sqrt[12]{32} \approx 1{,}334840 = 500\ Cent$	$\frac{4}{5} \approx 1{,}333333 \approx 498{,}04\ Cent$	1,96
Тритон	$\sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2} \approx 1{,}414214 = 600\ Cent$	$\frac{45}{32} \approx 1{,}406250 \approx 590{,}22\ Cent$	9,78
Квинта	$\sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128} \approx 1{,}498307 = 700\ Cent$	$\frac{3}{2} = 1{,}5 \approx 701{,}96\ Cent$	-1,6
Секста малая	$\sqrt[12]{2^8} = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}587401 = 800\ Cent$	$\frac{8}{5} = 1{,}6 \approx 813{,}69\ Cent$	-13,69
Секста большая	$\sqrt[12]{2^9} = \sqrt[4]{8} \approx 1{,}681793 = 900\ Cent$	$\frac{5}{3} \approx 1{,}666667 \approx 884{,}36\ Cent$	15,64
Септима малая	$\sqrt[12]{2^{10}} = \sqrt[6]{32} \approx 1{,}781797 = 1000 Cent$	$\frac{16}{9} \approx 1{,}777778 \approx 996{,}09\ Cent$	3,91
Септима большая	$\sqrt[12]{2^{11}} = \sqrt[12]{2048} \approx 1{,}887749 = 1100\ Cent$	$\frac{15}{8} = 1{,}875 \approx 1088{,}27\ Cent$	11,73
Октава	$\sqrt[12]{2^{12}} = 2 = 1200\ Cent$	$\frac{16}{8} = 2 = 1200\ Cent$	0

[22] Равномерно-темперированный строй. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Равномерно_темперированный_строй.