Краевая научно-практическая конференция

учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Геометрические решения негеометрических задач

Гусев Артём Сергеевич,

11 кл., МБОУ «Ильинская СОШ №1»,

Ильинский район,

Самохина Наталья Александровна,

учитель математики высшей категории.

Пермь. 2015.

Оглавление

Введение

Знание особых приёмов и подходов к решению математических задач позволяют не только правильно их решать, но и решать простым и оригинальным способом.

В данной работе представлен геометрический метод решения задач, который основан на наглядно–геометрических интерпретациях, связанных с геометрическим смыслом модуля, формулой расстояния между двумя точками на плоскости, неравенством треугольника, построением графического образа задачи на координатной плоскости Оху.

Существенными признаками этого метода являются геометрические представления и законы геометрии, в которых отражены свойства геометрических фигур. Геометрические методы используются при решении задач на движение, на работу, в задачах тригонометрии, при вычислении наибольших и наименьших значений выражений, при решении уравнений, неравенств и их систем с параметрами. Задачи таких видов ежегодно содержатся в заданиях ЕГЭ. Таким образом, выбранная тема актуальна и перспективна. Из-за сложности, нестандартности геометрический метод решения задач в школьном курсе математики не изучается. Тем важнее данное исследование.

Проблема: многие задачи алгебры очень трудно решить аналитическим путём.

Гипотеза: решение задач геометрическим методом направляется наглядным представлением условий в виде рисунка или чертежа, что помогает глубже понять условие задачи, делает их более наглядным, очевидным, значительно упрощает решение, ведёт к более быстрому получению ответа.

Цель: изучение геометрического метода решения задач.

Объект исследования: математические задачи.

Предмет исследования: геометрический метод решения задач.

Задачи:

1. Обозначить ключевые положения теории.
2. Определить задачи, которые удобнее решать геометрическим методом.
3. Рассмотреть задачи различной степени сложности с использованием приёмов геометрического метода.

4. Составить алгоритм решения задач геометрическим методом.
5. Создать электронную презентацию.

Структура работы: работа состоит из 4 глав

Глава 1. Геометрические решения текстовых задач (задачи на движение и на совместную работу).

Глава 2. Геометрические решения тригонометрических задач.

Глава 3. Геометрические решения алгебраических задач.

Глава 4. Геометрические решения задач с параметрами.

Геометрические методы решения задач описываются в книге Г.З.Генкеля «Геометрические решения негеометрических задач», - Москва: Просвещение 2007.

1. Геометрические решения текстовых задач

Очень многие текстовые задачи на составление уравнений (или систем уравнений) можно решать графически. К ним относятся задачи на движение и на совместную работу. Изображая графики, можно находить зависимости между величинами, применяя геометрические знания (признаки подобия и равенства треугольников, свойства средней линии треугольника), а можно решать задачу, составляя числовое выражение, уравнение или систему уравнений.

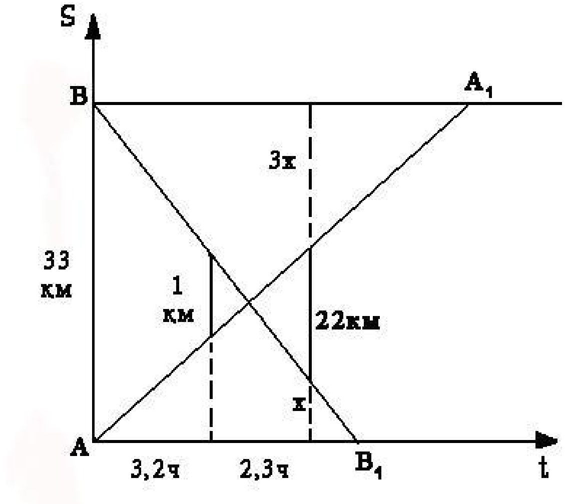
Рассмотрим геометрический метод с использованием графического.

При решении задач на равномерное движение используют графики линейной функции. По оси абсцисс обычно откладывают время, а по оси ординат – расстояние. В таком случае абсцисса любой точки графика движения указывает момент времени, а ордината той же точки - в каком месте пути в этот момент находится тело. Если на одном чертеже построены 2 графика движения, причём эти графики пересекаются, то абсцисса точки пересечения – это время встречи, а ордината – место встречи.

1.1 Задачи на движение

Задача 1. (Встречное движение).

Два туриста отправились одновременно из пунктов А и В, расстояние между которыми 33 км, навстречу друг другу. Через 3ч 12мин расстояние между ними сократилось до 1км (они еще не встретились), а еще через 2ч 18мин первому осталось пройти до В втрое больше расстояния, чем второму до А. Найдите скорости туристов.



Решение: $AA_1 -$ график движения первого туриста

$BB_1 -$ график движения второго

1) (33 – 1) : 3,2 = 10 км/ч – скорость сближения.

2) (10 · 2,3 – 1) = 22 км – расстояние между туристами через 2,3 ч.

Пусть x км осталось пройти второму туристу до А.

3) $x + 3x = 11$

$x = 2,75$

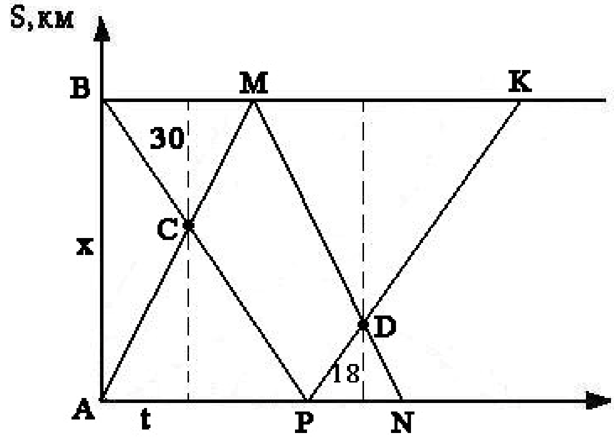
4) (22 + 2,75) : 5,5 = 4,5 км/ч – скорость туриста, вышедшего из А.

5) (22 + 3 · 2,75) : 5,5 = 5,5 км/ч – скорость туриста, вышедшего из В.

Ответ: скорость первого туриста равна 4,5 км/ч; скорость второго – 5,5 км/ч.

Задача 2.

Из пунктов А и В одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились в 30 км от В. Прибыв в А и В, они повернули обратно. Вторая встреча произошла в 18 км от А. Найдите расстояние между А и В.



Решение: Пусть $V_1 -$ скорость одного велосипедиста.

$V_2 -$ скорость другого.

$t -$ время движения велосипедистов до первой встречи.

x км $-$ расстояние между A $и$ B.

AMD−график движения первого велосипедиста до второй встречи.

BPD −график движения второго велосипедиста до второй встречи.

$$V_1 = \frac{x-30}{t};\ \ V_2 = \frac{30}{t};\ \ \frac{V_1}{V_2} = \frac{x-30}{30}$$

1) $V_1 = \frac{x+x-18}{t} = \frac{2x-18}{t};\ \ V_2 = \frac{x+18}{t};\ \ \frac{V_1}{V_2} = \frac{2x-18}{x+18}$

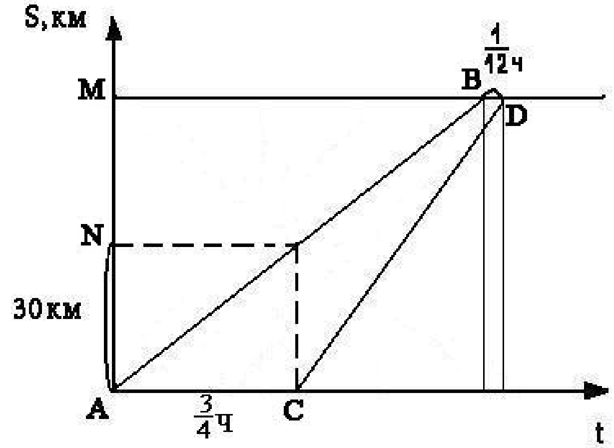
Учитывая 1) и 2) получим: $\frac{x-30}{30} = \frac{2x-18}{x+18}$;

$x = 72$ (км) $-$ расстояние между A и B.

Ответ: расстояние между А и В равно 72 км.

Задача 3. (Движение из одного пункта в одном направлении).

Из пункта А в пункт В выехал автобус со скоростью 40 км/ч. После того как автобус проехал 30 км, из пункта А со скоростью 60 км/ч выехал автомобиль, который прибыл в пункт В на 1/12ч позже автобуса. Найдите расстояние между пунктами.



AB − график движения автобуса.

CD − график движения автомобиля.

Решение: x км – расстояние между пунктами.

$$\frac{x}{40}-\frac{3}{4}=\frac{x}{60}-\frac{1}{12};$$

$$\frac{x}{40}-\frac{x}{60}=\frac{3}{4}-\frac{1}{12};$$

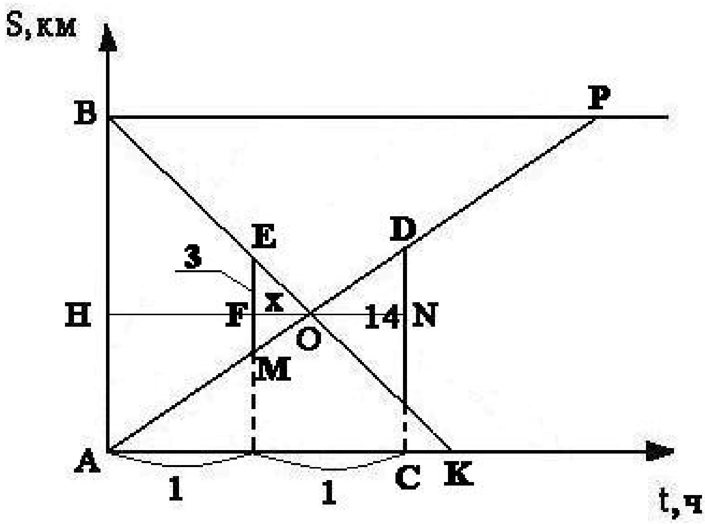
$3x-2x=90-10$, $x=80$ $(км)$.

Ответ: 80 км.

Задача 4. (Задача на сближение).

Из А в В вышел пешеход. Одновременно с ним из пункта В во встречном направлении выехал велосипедист. Они двигались с постоянными скоростями, и через час расстояние между ними равнялось 3 км, а еще через час – 14 км. Найдите расстояние между А и В.

1-й случай:



AP – график движения пешехода

BK – график движения велосипедиста

Решение: $\Delta OME \backsim \Delta ODC$

$$\frac{DC}{EM} = \frac{ON}{OF}$$

$$\frac{14}{3} = \frac{1\text{-}x}{x}$$

14x=3-3x

17x=3

$x = \frac{3}{17}$ ч

$1 - \frac{3}{17} = \frac{14}{17}$ - ON

$1 + \frac{3}{17} = 1\frac{3}{17}$ - OH

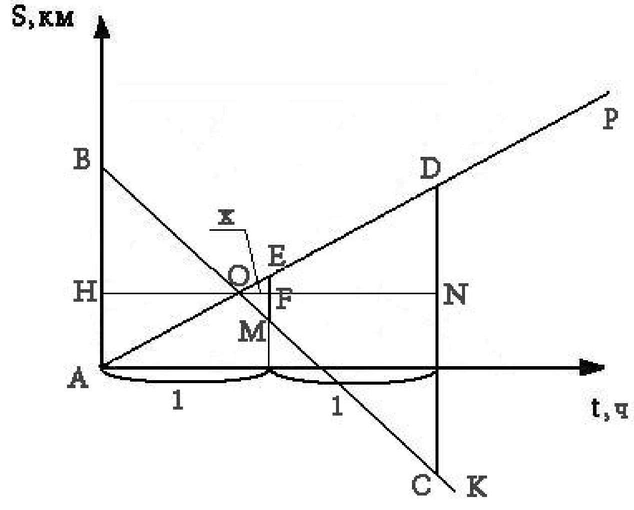
$\Delta ABO \backsim \Delta ODC$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OH}{ON}$$

$$\frac{z}{14} = 14 \cdot 1\frac{3}{17}$$

z =20 км – AB

2-й случай:



AP – график движения пешехода

BK – график движения велосипедиста

Решение: $\Delta OFM \backsim \Delta OCD$

$$\frac{EM}{OF}=\frac{DC}{ON};\quad \frac{3}{x}=\frac{14}{1+x},\quad x=\frac{3}{11}(ч.)$$

$\Delta OAB \backsim \Delta ODC$

$$\frac{AB}{HO}=\frac{CD}{ON};\quad \frac{AB}{1-x}=\frac{14}{1+x};\quad AB=\frac{14(1-x)}{1+x}=\frac{14\left(1-\frac{3}{11}\right)}{1+\frac{3}{11}}=8\,км.$$

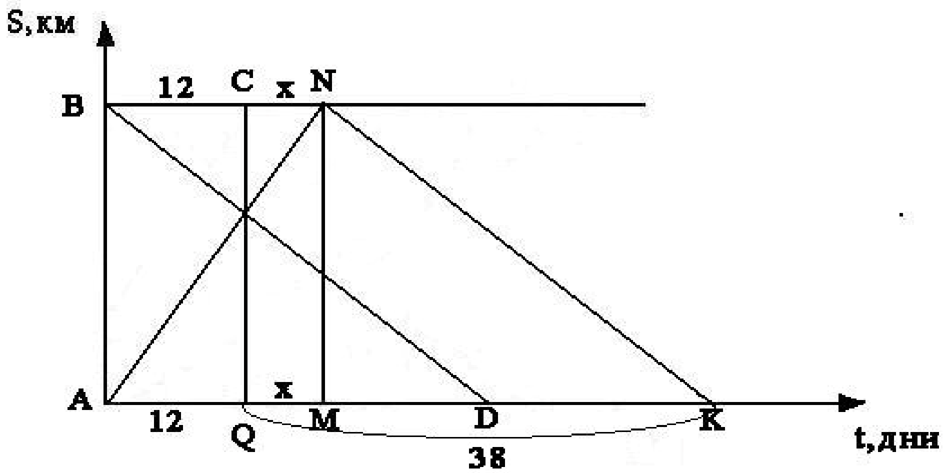
Ответ: 8 км, 20 км.

1.2 Задачи на работу

Задачи этого типа содержат сведения о выполнении несколькими субъектами (рабочими, механизмами и т.д.) определенной работы. Эти задачи схожи с задачами на движение: роль скорости здесь играет производительность, роль расстояния – объем работы.

Задача 5.

Двое рабочих, выполняя задание вместе, могли бы закончить его за 12 дней. Если сначала будет работать только один из них, а когда он выполнит половину всей работы, его сменит второй рабочий, то всё задание будет закончено за 25 дней. За сколько дней каждый рабочий в отдельности может выполнить всё задание?



Решение: Предположим, что первый рабочий работает быстрее, чем второй. Отрезок *AN* – график работы первого рабочего, а отрезок BD – график работы второго рабочего.

AQ изображает время совместной работы; AQ=12 ч.

Проведем NK∥BD, тогда AK=50, QK=38

$\Delta BPN \backsim \Delta APD$

$$\frac{12+x}{x}=\frac{12+38-(12+x)}{12}$$

$$\frac{12+x}{x}=\frac{38-x}{12};$$

$12(12+x)=x(38-x)$

$x^2-26x+144=0$

$x_1=18$ - не подходит, т.к .первый рабочий работает быстрее. Тогда время первого 12+8=20 дней, а второго 38-8=30 дн.

Ответ: первый за 20 дней, а второй за 30 дней.

В этой задаче геометрический метод решения представляет собой интеграцию графического метода, метода подобия треугольников и метода уравнений.

Вывод: решение текстовых задач геометрическим методом основывается на точных геометрических соотношениях. Преимущество геометрического решения в его наглядности.

2. Геометрические решения тригонометрических задач

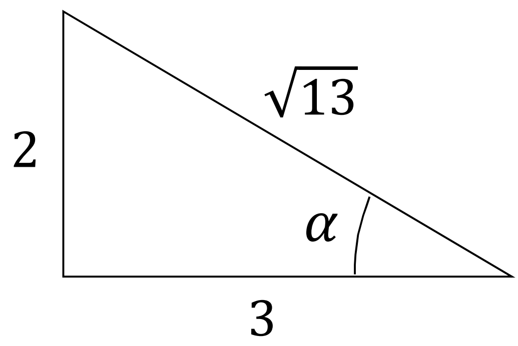
Многие тригонометрические задачи решаются очень сложно, а использование какого-нибудь геометрического приема дает короткое решение.

Прием прямоугольного треугольника.

Пример 1. Вычислить $2\sqrt{13}\cos\left(arctg\frac{2}{3}\right)$.

Решение. Все значения обратных тригонометрических функций от положительных чисел – это углы, лежащие в 1 четверти, то есть острые углы. Поэтому их можно найти в прямоугольном треугольнике.

$arctg\frac{2}{3}$ – это угол в треугольнике, тангенс которого равен $\frac{2}{3}$, то есть противолежащий катет относится к прилежащему как 2:3. По теореме Пифагора находим гипотенузу.



Теперь можно находить значение любой тригонометрической функции арктангенса.

$$\cos arctg\frac{2}{3} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow 2\sqrt{13}\cos arctg\frac{2}{3} = 6.$$

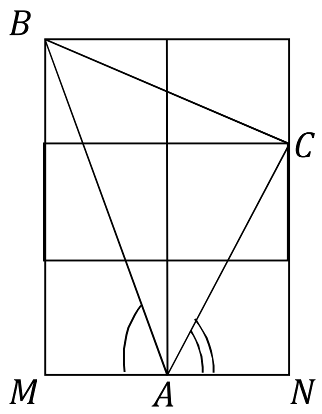
Ответ: 6.

Пример 2. Вычислим $arctg\,1 + arctg\,2 + arctg\,3$.

Решение: 1) $arctg\,3 = \angle BAM$

$arctg\,2 = \angle CAH$

$arctg\,1 = \angle BAC$



$MB = 3$, $\text{AM} = 1$, $AB = \sqrt{10}$

$CN = 2$, $AN = 1$, $AC = \sqrt{5} = BC$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow \angle BCA = 90°, \angle BAC = 45°$.

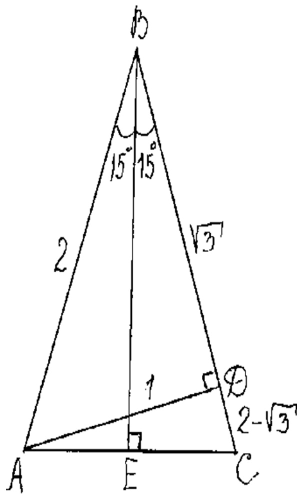
$arctg\, 2 + arctg\, 3 + arctg\, 1 = \pi$.

Ответ: π

Пример 4. Вычислить sin 15°.

Решение: Первый способ (геометрический).

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC (AB=CB)), $\angle$ABC=30° .



1) Проведём в ΔABC высоты AD и BE.

2) В ΔACD $\angle$CAD=15°, sin 15° = $\frac{CD}{AC}$.

3) Если AD = 1, то AB = 2 и BD = $\sqrt{3}$,

тогда CD = 2 - $\sqrt{3}$, AC^2 = 8 - 4$\sqrt{3}$,

AC = $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

sin 15° = $\frac{CD}{AC} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

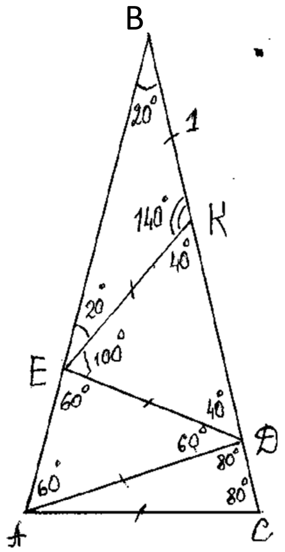
Второй способ (использование формул понижения степени).

$\sin^2 15° = \frac{1-\cos 30°}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$, $\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Пример 5. Доказать тождество: cos 40°+cos 80° = cos 20°.

Решение: Первый способ (приём равнобедренного треугольника)

Рассмотрим равнобедренный треугольник АВС (АВ = ВС), $\angle$ABC=20°



1) Пусть D Є ВС, К Є ВС, Е Є АВ и ВК = КЕ = ЕD = DА =1.

2) ВЕ = 2 cos 20°, АЕ = 1, ВК = 1, КD = 2 cos 40°,

DC = 2 cos 80°.

3) АЕ +ЕВ = СD + DК + КВ.

1 + 2 cos 20° = 2 cos 80° + 2 cos 40° + 1,

cos 40°+cos 80° = cos 20°.

Второй способ (с использованием формулы суммы косинусов)

cos 40°+cos 80° = 2 cos 60° cos20° = 2*0,5*cos 20° = cos 20°.

В последних задачах геометрический способ не является самым простым, но довольно интересным для размышления.

Вывод: Использование геометрического подхода делает решение тригонометрических задач практически устными .

3. Решение алгебраических задач геометрическими методами

Алгебра и геометрия – это составляющие одного целого. «Алгебра – не что иное, как записанная в символах геометрия, а геометрия- это просто алгебра, воплощённая в фигурах» (крылатая фраза замечательного французского математика Софии Жермен (1776-1831)).

Между геометрическими и алгебраическими задачами, между языком алгебры (языком формул) и языком геометрии (языком расстояний) существует очевидная связь.

Алгебраический язык (язык формул)	**Геометрический язык (язык расстояний)**
Числа и буквы	Координаты
Модуль разности двух чисел	Расстояние между двумя точками координатной прямой
Сумма квадратов двух чисел	Квадрат расстояния между двумя точками координатной плоскости
$x^2 + y^2 = R^2$	Окружность с центром в начале координат и радиусом R
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$	Окружность с центром $(a; b)$ и радиусом R
$y = kx + b$	Уравнение прямой

Геометрическим методом хорошо решаются уравнения и неравенства, также их системы. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти наименьшее значение функции: $y = \sqrt{(x-1)^2+4} + \sqrt{(x-5)^2+1}$.

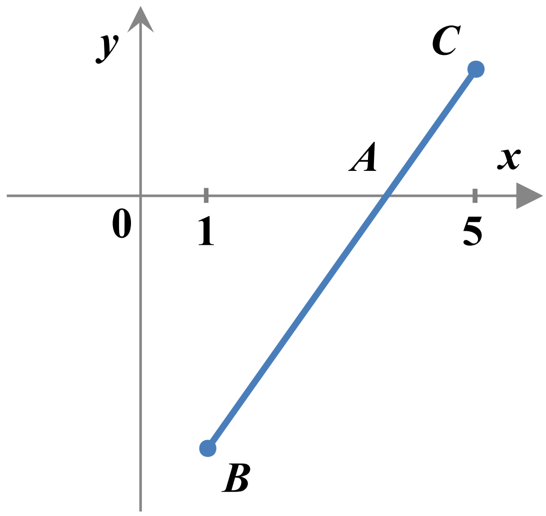
Решение: $y = \sqrt{(x-1)^2+(0\pm 2)^2} + \sqrt{(x-5)^2+(0\pm 1)^2}$

$\sqrt{(x-1)^2+(0\pm 2)^2}$ - расстояние между точками $\mathrm{A}(x;0)$ и $\mathrm{B}(1;\pm 2)$

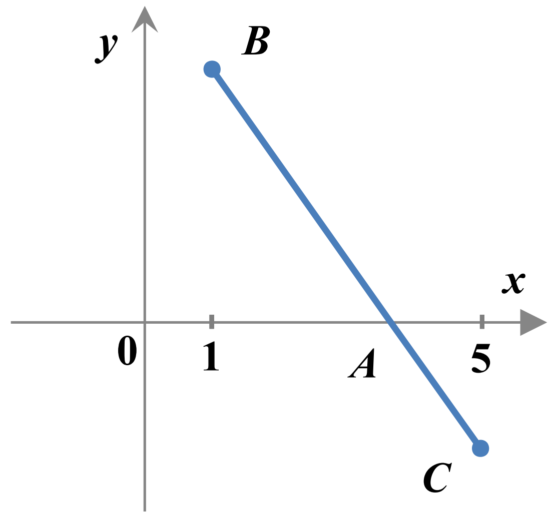
$\sqrt{(x-5)^2+(0\pm 1)^2}$ – расстояние между точками $\mathrm{A}(x;0)$ и $\mathrm{C}(5;\ \pm 1)$

Решить задачу – значит найти такую точку А оси абсцисс, сумма расстояний от которой до двух данных точек минимальна.

Точки В и С должны лежать по разные стороны от оси абсцисс, т.е. $\mathrm{B}(1;-2);\mathrm{C}(5;\ 1)$ или $\mathrm{B}(1;2);\mathrm{C}(5;-1)$.



или



Уравнение BC: $y = kx + b$ $\begin{cases} -2 = k + b \\ 1 = 5k + b \end{cases}$ $4k = 3 \quad k = \frac{3}{4}$ $b = -2\frac{3}{4}$ Уравнение прямой BC: $y = \frac{3}{4}x - 2\frac{3}{4}$ $A \epsilon\ y = \frac{3}{4}x - 2\frac{3}{4}$ $0 = \frac{3}{4}x - \frac{11}{4}$; $x = \frac{11}{3}$	Уравнение BC: $y = kx + b$ $\begin{cases} 2 = k + b \\ -1 = 5k + b \end{cases}$ $4k = -3 \quad k = -\frac{3}{4}$ $b = 2\frac{3}{4}$ Уравнение прямой BC: $y = -\frac{3}{4}x + 2\frac{3}{4}$ $0 = -\frac{3}{4}x + 2\frac{3}{4}$ $x = \frac{11}{3}$

$$y_{\text{наименьшее}} = \sqrt{\left(\frac{11}{3} - 1\right)^2 + 4} + \sqrt{\left(\frac{11}{3} - 5\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{64}{9} + 4} + \sqrt{\frac{16}{9} + 1} =$$

$$= \frac{10}{3} + \frac{5}{3} = 5.$$

Ответ: 5.

Пример 2. Найти наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 16x + 89}$$

Решение: $x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2x + 1) + 4 = (x - 1)^2 + 4$

$$x^2 - 16x + 89 = (x^2 - 2 \cdot 8 + 64) - 64 + 89 = (x - 8)^2 + 25$$

$$y = \sqrt{(x - 1)^2 + 4} + \sqrt{(x - 8)^2 + 25} =$$

$= \sqrt{(x-1)^2 + (0 \pm 2)^2} + \sqrt{(x-8)^2 + (0 \pm 5)^2}$

$\sqrt{(x-1)^2 + 4}$ - расстояние между двумя точками АВ, где $\text{A}(x; 0); \text{B}(1;\ \pm 2)$

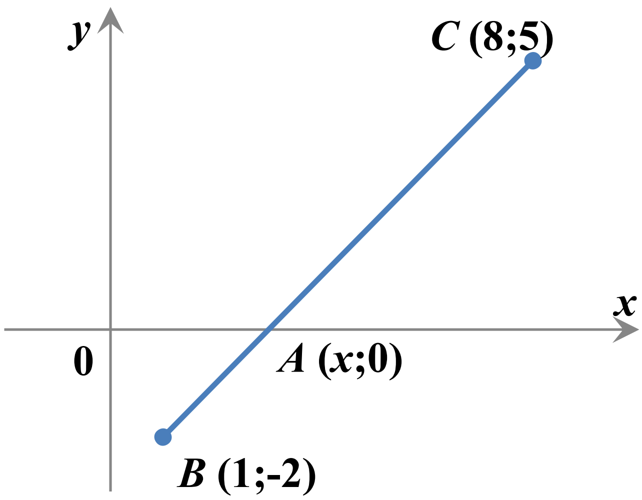
$\sqrt{(x-8)^2 + 25}$ – расстояние между двумя точками АС, где $\text{A}(x; 0); \text{C}(8;\ \pm 5)$

Решить задачу – значит найти такую точку $\text{A}(x; 0)$ оси абсцисс сумма расстояний от которой до двух данных точек минимальна.

Сумма расстояний будет наименьшей, если точки $\text{A}, \text{B}, \text{C}$ будут лежать на одной прямой, пересекающей ось OX.

Значит $\text{B}\ (1; -2); \text{C}\ (8; 5)$ или $\text{B}\ (1; 2); \text{C}\ (8; -5)$.

1) Рассмотрим первый вариант:



Уравнение прямой: $y = kx + b$; $\text{B}, \text{C}\ \in y = kx + b$.

$\begin{cases} -2 = k + b \\ 5 = 8k + b \end{cases}$ $7k = 7, \quad k = 1$

$b = -2 - 1 = -3$

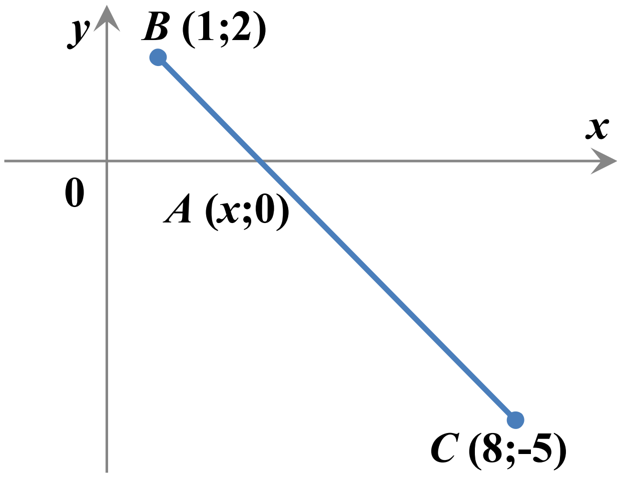
Уравнение прямой ВС: $y = x - 3$; $A \in BC$;

$$0 = x - 3; \qquad x = 3; \quad \text{A}(3; 0)$$

$y_{\text{наименьшее}} = \sqrt{(3-1)^2 + 4} + \sqrt{(3-8)^2 + 25} = \sqrt{2^2 + 4} + \sqrt{5^2 + 25} =$

$= \sqrt{8} + \sqrt{50} = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$.

2) Второй вариант: $\text{B}\ (1; 2), \text{C}(8; -5)$.



Уравнение прямой: $y = kx + b$; $\mathrm{B, C} \in y = kx + b$.

$$\begin{cases} 2 = k + b \\ -5 = 8k + b \end{cases} \quad 7k = -7, \quad , \quad k = -1$$

$b = 2 + 1 = 3;$

Уравнение прямой ВС: $y = -x + 3$; $A \epsilon BC$;

$$0 = -x + 3; \quad x = 3; \quad \mathrm{A}(3; 0)$$

$$y_{\text{наименьшее}} = \sqrt{(3-1)^2 + 4} + \sqrt{(3-8)^2 + 25} =$$

$$= \sqrt{2^2 + 4} + \sqrt{5^2 + 25} = \sqrt{8} + \sqrt{50} = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2}\ .$$

Ответ: $7\sqrt{2}$

Пример 3. Найти наименьшее значение функции

y= $\sqrt{(x-1)^2 + (x-6)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (x-2)^2}$

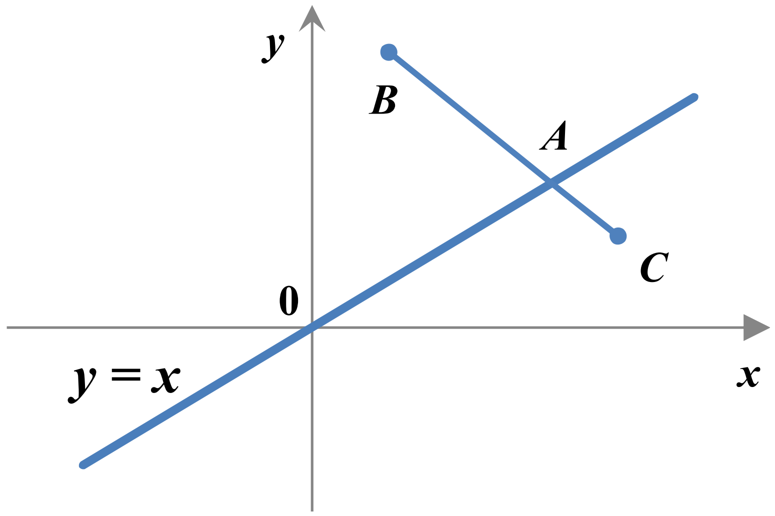
Решение: Переведём условия задачи с языка формул на язык расстояний.

Правая часть функции – сумма расстояния от точки $A(x; x)$ прямой $y = x$ до точек $B(1; 6)$ и $C(4; 2)$.

Первое слагаемое $\sqrt{(x-1)^2 + (x-6)^2}$ – это расстояние от точки $\mathrm{A}(x; x)$ до точки $\mathrm{B}(1; 6)$.

Второе слагаемое $\sqrt{(x-4)^2 + (x-2)^2}$- это расстояние от точки $\mathrm{A}(x; x)$ до точки $\mathrm{C}(4; 2)$.

Решить задачу – значит найти такую точку А прямой $y = x$, сумма расстояний от которой до данных точек минимальна.



Уравнение BC: $y = kx + b$;

$\begin{cases} 6 = k + b \\ 2 = 4k + b \end{cases}$ $3k = -4$ $k = -\frac{4}{3}$ $b = 7\frac{1}{3}$

$y = -\frac{4}{3}x + \frac{22}{3}$ – уравнение BC.

$$A(x; x) \in y = -\frac{4}{3}x + \frac{22}{3}$$

$x = -\frac{4}{3}x + \frac{22}{3}$ $\frac{7}{3}x = \frac{22}{3}$ $x = \frac{22}{7}$

$$y_{\text{наименьшее}} = \sqrt{(\frac{22}{7} - 1)^2 + (\frac{22}{7} - 6)^2} + \sqrt{(\frac{22}{7} - 4)^2 + (\frac{22}{7} - 2)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{225}{49} + \frac{400}{49}} + \sqrt{\frac{36}{49} + \frac{64}{49}} = \frac{25}{7} + \frac{10}{7} = \frac{35}{5} = 5$$

Ответ: 5.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 10x + 29} = 5.$

Решение: $\sqrt{(x^2 - 2x + 1) - 1 + 2} + \sqrt{(x^2 - 10x + 25) - 25 + 29} = 5$

$$\sqrt{(x - 1)^2 + 1} + \sqrt{(x - 5)^2 + 4} = 5$$

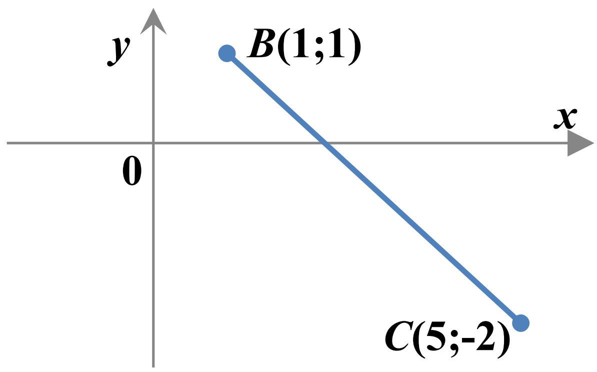
Решим уравнение методом оценки. Для этого докажем, что наименьшее значение левой части равно 5.

Левая часть уравнения – сумма расстояний от точки $A(x;0)$ оси абсцисс до точки $B(1;1)$ и $C(5;-2)$ или до точек $B(1;-1)$ и $C(5;2)$.

Решить уравнение – значит найти такую точку A оси абсцисс, сумма расстояний от которой до данных точек минимальна и равна 5.

Точки B и C должны лежать по разные стороны от оси OX.

1)



Уравнения BC: $y = kx + b$

$$\begin{cases} 1 = k + b \\ -2 = 5k + b \end{cases}$$

$4k = -3 \quad k = -\frac{3}{4}, \quad b = \frac{7}{4}$

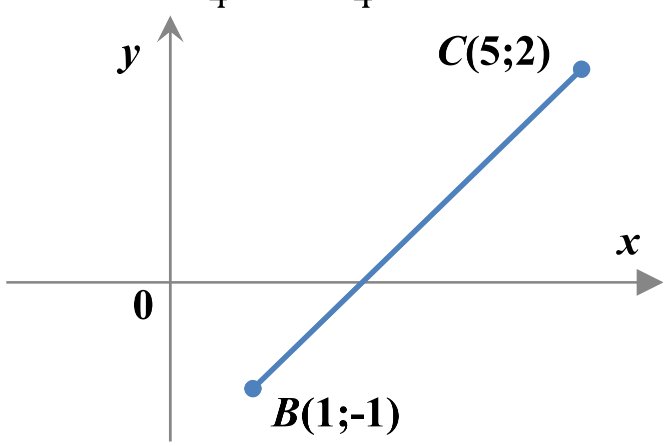
$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ – уравнение BC;

$A \in BC; \quad 0 = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}, \ x = \frac{7}{3}$

2) Уравнение BC: $y = kx + b$

$$\begin{cases} -1 = k + b \\ 2 = 5k + b \end{cases}$$

$4k = 3 \quad k = \frac{3}{4}, b = -\frac{7}{4}$



$y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$ – уравнение BC;

$A \in BC;\ 0 = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}\ ,\ x = \frac{7}{3}.$

A $\left(\frac{7}{3}; 0\right)$. Наименьшее значение левой части уравнения

$$\sqrt{(\frac{7}{3} - 1)^2 + 1} + \sqrt{(\frac{7}{3} - 5)^2 + 4} = \sqrt{\frac{16}{9} + 1} + \sqrt{\frac{64}{9} + 4} = \frac{5}{3} + \frac{10}{3} = 5.$$

Левая часть уравнения больше или равна 5.

Правая часть уравнения равна 5.

Равенство возможно при $x = \frac{7}{3}$.

Ответ: $x = \frac{7}{3}$.

Пример 5. Решить систему уравнений

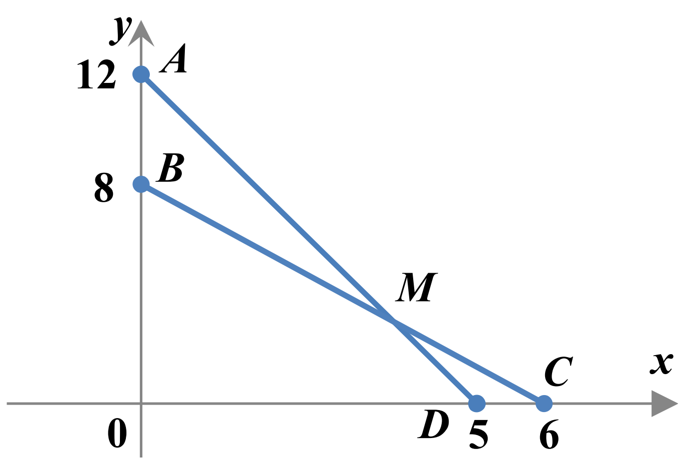
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-8)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 10 \\ \sqrt{(x-5)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-12)^2} = 13 \end{cases}$$

Решение: Левая часть первого уравнения – сумма расстояний от точки $M(x; y)$ до точек B$(0; 8)$ и C$(6; 0)$.

Левая часть второго уравнения – сумма расстояния от точки A$(x; y)$ до точек $D(5; 0)$ и A$(0; 12)$.

Решить систему – значит найти все точки $M(x; y)$, для каждой из которых $\mathrm{MC} + MB = CB,\ MA + MD = AD$.

Уравнение прямой BC: $y = kx + b$



$$\begin{cases} 8 = 0k + b \\ 0 = 6k + b \end{cases}$$

$6k = -8, \qquad k = -\dfrac{4}{3}; \quad b = 8$

$y = -\frac{4}{3}x + 8$ – уравнение BC.

Уравнение прямой AD: $y = kx + b$

$\begin{cases} 0 = 5k + b \\ 12 = 0k + b \end{cases}$ $5k = -12, \; k = -\frac{12}{5}, \; b = 12$

$y = -\frac{12}{5}x + 12$ - уравнение AD

Найдём координаты точки M

$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + 8 \\ y = -\frac{12}{5}x + 12 \end{cases}; \qquad \frac{-4x+24}{3} = \frac{-12x+60}{5};$

$-20x + 120 = -36x + 180$

$16x = 60, \; x = \frac{15}{4}, \; y = -\frac{4}{3} * \frac{15}{4} + 8 = 3, \quad M\left(\frac{15}{4}; 3\right).$

Ответ: $x = \frac{15}{4}, \; y = 3.$

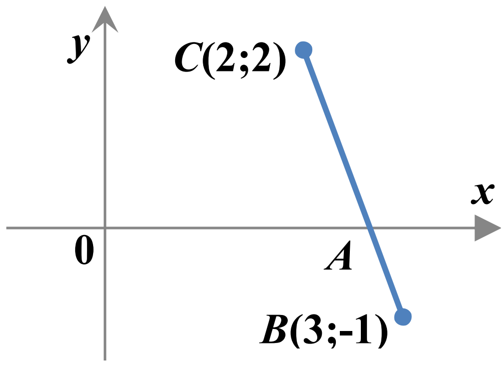
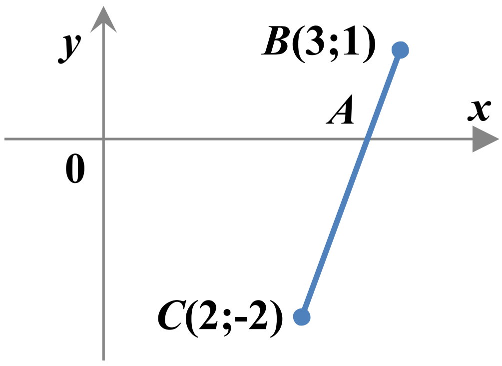
Пример 6. Решить неравенство $\sqrt{(x-3)^2+1} + \sqrt{(x-2)^2+4} \leq \sqrt{10}$

Решение: Для решения неравенства используем метод оценки. Докажем, что наименьшее значение левой части неравенства равно $\sqrt{10}$.

Левая часть неравенства – сумма расстояний от точки A(x;0) оси абсцисс до точек $\mathrm{B}(3;1)$ и $\mathrm{C}(2;-2)$ или до точек $\mathrm{B}(3;-1)$ и $\mathrm{C}(2;2)$

Решить неравенство – значит найти такую точку A оси абсцисс, сумма расстояний от которой до данных точек минимальна и равна $\sqrt{10}$.

Возможны варианты:

1)  2) 

Уравнение прямой BC:

$y = kx + b$

$\begin{cases} -1 = 3k + b \\ 2 = 2k + b \end{cases}$

$k = 3 \quad b = 8$

$y = -3x + 8$ - уравнение BC

$A \epsilon BC$

$0 = -3x + 8$

$x = \frac{8}{3} \quad A\left(\frac{8}{3}; 0\right)$

Уравнение прямой BC:

$y = kx + b$

$\begin{cases} 1 = 3k + b \\ -2 = 2k + b \end{cases}$

$k = 3 \quad b = -8$

$y = 3x - 8$ - уравнение BC

$A \epsilon BC$

$0 = 3x - 8$

$x = \frac{8}{3} \quad A\left(\frac{8}{3}; 0\right)$

Наименьшее значение левой части неравенства равно:

$$\sqrt{(\frac{8}{3} - 3)^2 + 1} + \sqrt{(\frac{8}{3} - 2)^2 + 4} = \sqrt{\frac{1}{8} + 1} + \sqrt{\frac{4}{9} + 4} = \frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{2\sqrt{10}}{3} = \sqrt{10}$$

Левая часть неравенства больше или равна $\sqrt{10}$. Правая часть – равна $\sqrt{10}$. Неравенство может выполняться при условии левой части $\sqrt{10}$. Это возможно при $x = \frac{8}{3}$

Ответ: $\frac{8}{3}$

Вывод: геометрический метод решения алгебраических задач основан на наглядно–геометрических интерпретациях, связанных с формулой расстояния между двумя точками на плоскости, построением графического образа задачи на координатной плоскости Oxy.

Преимущество решения алгебраических задач **геометрическим методам** состоит в следующем:

1. При решении задач чётко определяется начало действия;
2. Графическая иллюстрация облегчает проведения анализа, составление уравнений, помогает найти способ решения.

4. Задачи с параметрами

Изучение многих физических процессов, химических, экономических и многих других закономерностей имеют практическую направленность и часто приводят к решению задач с параметрами, которые бывают весьма сложными и требующими нестандартного подхода к решению.

Аналитические (алгебраические) методы решения задач с параметрами довольно громоздки, требуют аккуратности выкладок, умения не «потерять решение», проверить всевозможные значения параметра. Возникает проблема: найти наиболее простой и наглядный способ решения задач с параметрами, позволяющий сравнительно легко получить ответ. Удобно решать задачи с параметрами путем обращения к наглядно-графическим интерпретациям. Схема, рисунок, график, помогают в поисках решения. Знание свойств элементарных функций, их графиков и простейших способов преобразования ($f(x+a)$; $f(-x)$; $-f(x)$; $rf(x)$; $f(x)+a$) позволяет существенно упростить анализ задачи, быстро найти правильный ответ. А в ряде случаев представляет собой единственный «ключ» к решению.

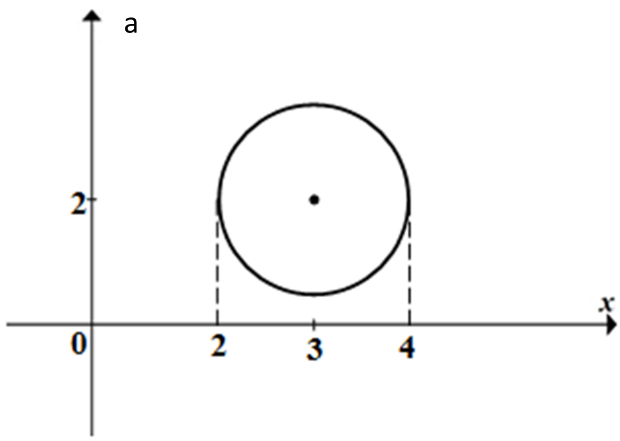
Пример 1. При каких значениях параметра a модуль разности корней уравнения $x^2-6x+12+a^2-4a=0$ принимает наибольшее значение?

Решение: Модуль разности двух чисел – это расстояние между двумя точками координатной прямой.

Выделим полные квадраты в левой части уравнения,

$$(x^2-6x+9)+(a^2-4a+4)=1$$

$(x-3)^2+(a-2)^2=1$. Это уравнение окружности с центром (3;2) и радиусом 1 в системе координат $0xa$.



Корни уравнения равны абсциссам точек пересечения окружности и прямой, параллельной оси абсцисс. Расстояние между точками будет наибольшим, если они являются концами диаметра окружности равного 2.

$x_1 = 2; \quad x_2 = 4; \quad |x_2 - x_1| = 2.$

Найдём значение a: 1) $x = 2;\ (2-3)^2 + (a-2)^2 = 1$

$$1 + (a-2)^2 = 1$$

$$(a-2)^2 = 0$$

$$a = 2$$

$$2)\ x = 4;\ (4-3)^2 + (a-2)^2 = 1$$

$$a - 2 = 0,\ a = 2$$

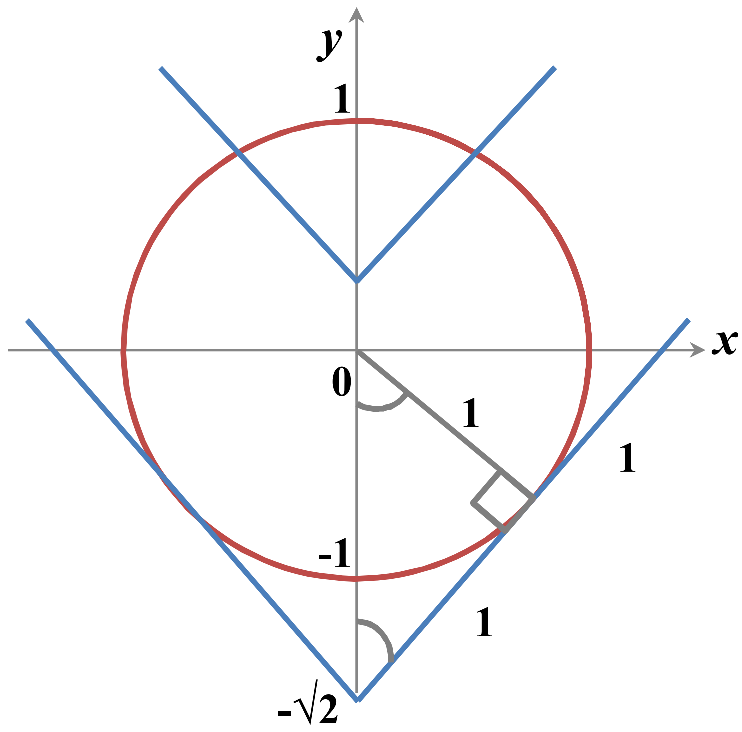
Ответ: $a = 2.$

Пример 2. Найти значение параметра a, при которых система уравнений

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = |x| + a \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение: $x^2 + y^2 = 1$ - окружность с центром в начале координат и радиусом 1.

Уравнение $y = |x| + a$ задаёт семейство «уголков» с вершиной на оси $0y$.



«Уголок» касается окружности при $a = -\sqrt{2}$.

Ответ считывается с рисунка.

Система имеет ровно два решения при $a\{-\sqrt{2}\} \cup (-1; 1)$.

Ответ: $a = \{-\sqrt{2}\} \cup (-1; 1)$.

Пример 3. Найти наименьшее значение параметра a, при котором система неравенств

$\begin{cases}(x+4+2a)^2+(y+1+a)^2 \le \frac{(a+1)^2}{80} \\ x-2y \ge -1\end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение: $(x+4+2a)^2+(y+1+a)^2 \le \frac{(a+1)^2}{80}$ - круг с центром в точке

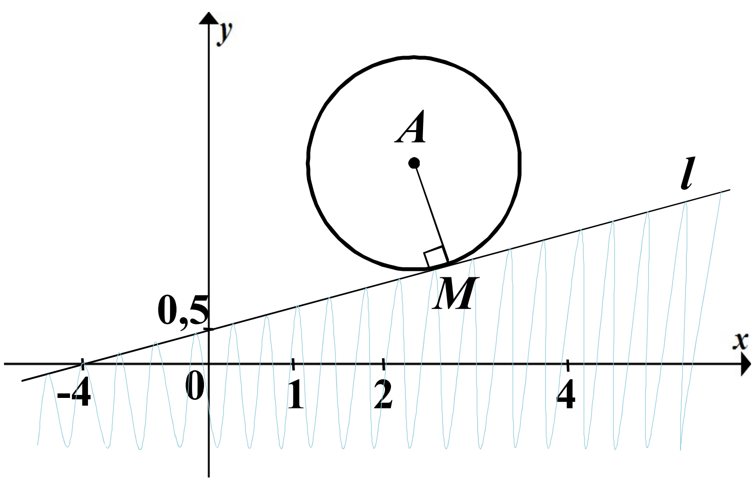
А$(-4-2a; -1-a)$ и радиусом $\frac{|a+1|}{4\sqrt{5}}$.

$x-2y \ge -1$, $y \le 0{,}5x + 0{,}5$ - полуплоскость с границей $y = 0{,}5x + 0{,}5$

Уравнение прямой l: $y = 0{,}5x + 0{,}5$

$k_l = 0{,}5 \Rightarrow k_{AM} = -2$, т.к. АМ перпендикулярна l.

Система неравенств имеет единственное решение, если круг и прямая имеют единственную общую точку, точку касания М.



Это возможно при условии:

$$\begin{cases} y - y_A = k_{AM}(x - x_A) \\ AM = \sqrt{(x+4+2a)^2 + (y+1+a)^2} = \frac{|a+1|}{4\sqrt{5}} \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 4 + 2a = -2(x + 1 + 2) \\ (x+4+2a)^2 + (y+1+a)^2 = \frac{(a+1)^2}{80} \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 9 + 5a = 0 \\ x - 2y = -1 \\ (x+4+2a)^2 + (y+1+a)^2 = \frac{(a+1)^2}{80} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2a - 3.8 \\ y = -a - 1.4 \\ (-2a - 3.8 + 4 + 2a)^2 + (-a - 1.4 + 1 + a)^2 = \frac{(a+1)^2}{80} \end{cases}$$

$0{,}2^2 + (-0{,}4)^2 = \frac{(a+1)^2}{80}$; $0{,}2 = \frac{(a+1)^2}{80}$; $(a+1)^2 = 16$; $|a+1| = 4$,

$a = 3; a = -5$

Меньшее значение $a = -5$.

Ответ: $a = -5$.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

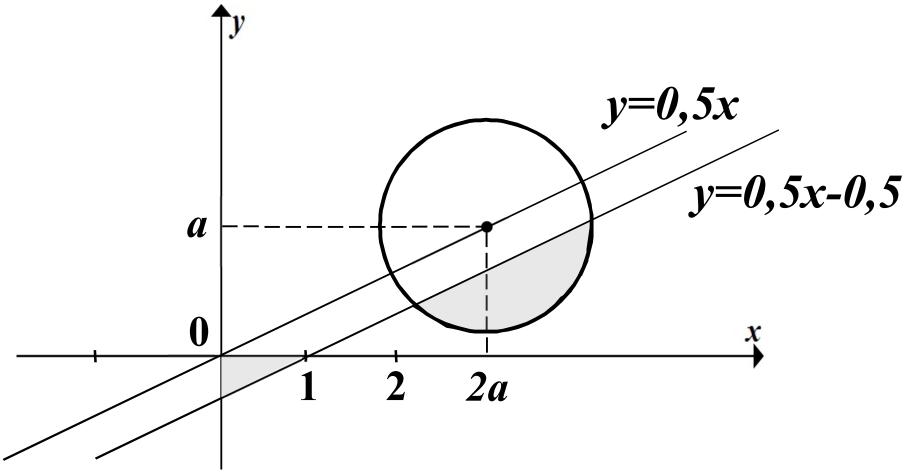
$$\begin{cases} \sqrt{(x-2a)^2 + (y-a)^2} \le \frac{|a|}{6\sqrt{5}} \\ x - 2y \ge 1 \end{cases}$$

имеет решения.

Решение: $(x-2a)^2 + (y-a)^2 \le \frac{a^2}{180}$ - круг с центром в точке $(2a; a)$ и радиусом $\frac{|a|}{6\sqrt{5}}$

$y \le 0.5x - 0.5$ - полуплоскость с границей $y = 0.5x - 0.5$;

Система имеет решения, если круг и полуплоскость имеют общие точки: для этого расстояние от центра круга до прямой $y = 0.5x - 0.5$ должно быть не больше радиуса круга. Это расстояние между параллельными прямыми $y = 0.5x$ и $y = 0.5x - 0.5$



$$\rho = \frac{0.5}{\sqrt{0.5^2 + 1^2}} = \frac{0.5}{0.5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Система имеет решения пи условии : $\frac{1}{\sqrt{5}} \le \frac{|a|}{6\sqrt{5}}$, $|a| \ge 6$, $\begin{cases} a \ge 6 \\ a \le -6 \end{cases}$

Ответ: $a \le -6$; $a \ge 6$.

Пример 5. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + y^2 - 12y + 40} = 5 \\ y = x^2 + a \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение: $\sqrt{(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4)} + \sqrt{(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 12y + 36)} = 5$

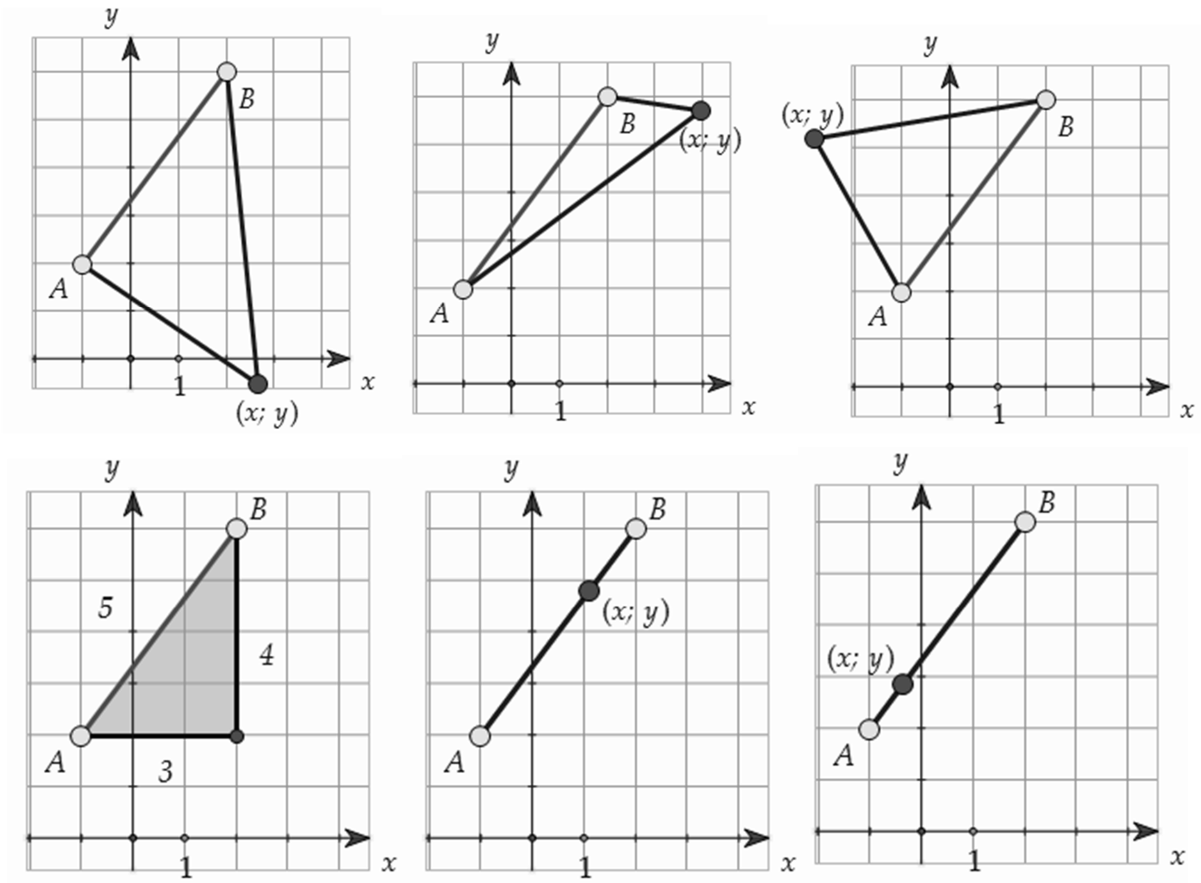
$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2} = 5$$

$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$ – расстояние между точками $\mathrm{M}(x; y)$и $\mathrm{A}(-1; 2)$.

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2}$ – расстояние между точками $\mathrm{M}(x; y)$и $\mathrm{B}(2; 6)$.

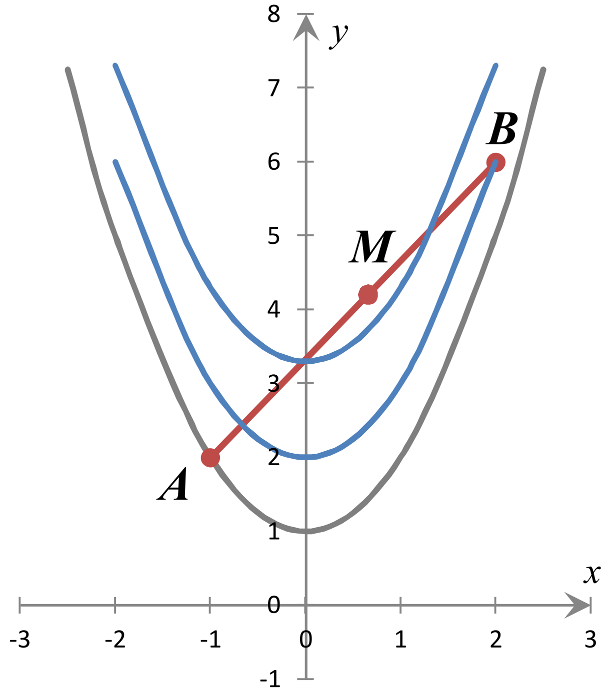
Сумма расстояний от точки $\mathrm{M}(x; y)$ до двух других точек А и В должна быть равна 5,т.е $A\mathrm{M} + \mathrm{MB} = 5$.

Возможны варианты:



Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон (неравенство треугольника), поэтому первые четыре варианта не устраивают. Это значит, что точка М$(x; y)$ лежит на отрезке АВ. Первое уравнение системы задаёт отрезок АВ . Второе уравнение системы задаёт параболу.

Она должна пересекать отрезок в двух точках.



1) Первое пересечение возникнет в тот момент, когда парабола пройдёт через точку A (-1;2). Пересечение одно при $a = 1$.
2) Если парабола пройдёт через точку B (2;6), то пересечений будет ровно два. Два пересечения при $a = 2$ будет до тех пор, пока парабола не коснётся отрезка.

3) Парабола $y = x^2 + a$ коснется отрезка BC:

$y = kx + b$, A$(-1; 2)$ и B$(2; 6)$

$$\begin{cases} 2 = -k + b \\ 6 = 2k + b \end{cases}; \begin{cases} b = 2 + k \\ b = 6 - 2k \end{cases}; \ 2 + k = 6 - 2k; \ \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}; b = \frac{10}{3}.$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}.$$

$$y = x^2 + a \ ; y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$

$$x^2 - \frac{4}{3}x + a - \frac{10}{3} = 0$$

$$D = 0; \ b^2 - 4ac = 0$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(a - \frac{10}{3}\right) = 0$$

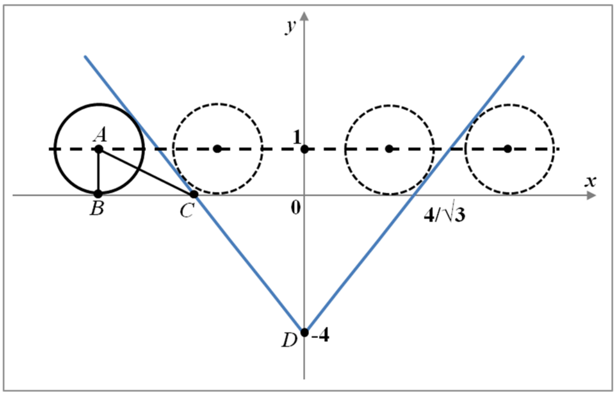
$a = \frac{34}{9} -$ парабола коснется АВ. Одно пересечение.

При $a > \frac{34}{9}$ пересечений у параболы с отрезком нет.

Ответ: $a \in \left[2; \frac{34}{9}\right)$.

Пример 6. Найти наименьшее значение параметра c, при котором система $\begin{cases} \left(x - c\sqrt{3}\right)^2 + y^2 - 2y = 0 \\ \sqrt{3}|x| - y = 4 \end{cases}$ имеет одно решение.

Решение:



1) $\left(x - c\sqrt{3}\right)^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$

$\left(x - c\sqrt{3}\right)^2 + (y - 1)^2 = 1 -$ это семейство окружностей единичного радиуса с центром($c\sqrt{3}$; 1). Центры лежат на прямой y=1.

2) y=$\sqrt{3}|x| - 4$; $y = 0$ при $x = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$; $tg\angle OCD = k = \sqrt{3} \Rightarrow \angle OCD = 60°$.

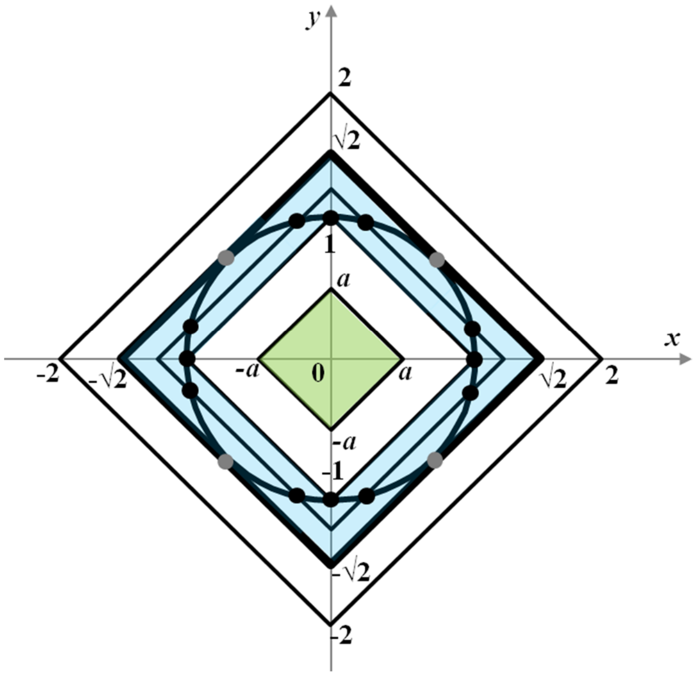
$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle OCD = 30°$;

3)$\Delta\, BCA$: $\mathrm{AB} = 1, \angle C = 30°, \mathrm{AC} = 2,$ тогда $\mathrm{BC} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$;

$BO = BC + CO = \frac{4}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{7}{\sqrt{3}}$; А$\left(-\frac{7}{\sqrt{3}}; 0\right)$; $c\sqrt{3} = -\frac{7}{\sqrt{3}}$; $c = -\frac{7}{3}$;

Ответ: $c = -\frac{7}{3}$.

Пример 7. Сколько решений имеет система $\begin{cases} |x| + |y| = a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ в зависимости от параметра a?



Ответ считывается с рисунка:
Решений нет при $a < 1$
4 решения при $a = 1$
8 решений при $1 < a < \sqrt{2}$
4 решения при $a = \sqrt{2}$
Решений нет при $a > \sqrt{2}$

Ответ: решений нет, если $a < 1$ или $a > \sqrt{2}$
4 решения, если $a = 1$ или $a = \sqrt{2}$,
8 решений, если $1 < a < \sqrt{2}$.

Геометрический метод является эффективным и при решении задач с параметрами. Он основан на наглядно–геометрических интерпретациях, связанных с геометрическим смыслом модуля, формулой расстояния между двумя точками на плоскости, неравенством треугольника.

Вывод: Геометрический метод нагляден, позволяет сэкономить время, увидеть и рассмотреть все возможные варианты решений, способствует не только выработке умений и закреплению навыков решения задач, но и формированию устойчивого интереса к предмету.

Алгоритм решения алгебраических задач геометрическим методом

1. Построить геометрическую модель алгебраической задачи и перевести её на язык геометрии.
2. Решить получившуюся геометрическую задачу.
3. Перевести полученный ответ с геометрического языка на естественный.

Заключение

В работе представлен геометрический метод решения негеометрических задач. Рассмотрены различные подходы к решениям, составлены алгоритмы. Ключ к решению таких задач содержится в геометрических интерпретациях. Рисунок не просто облегчает решение, а является существенным его этапом. Эффективность метода в наглядности и быстроте решения, в красоте математических выкладок, эстетике графического подхода к решению заданий.

Решение задач с параметрами требует догадки, «переноса знаний» в новую ситуацию, т.е. математического творчества.

Задачи с параметрами - эффективное упражнение для развития интеллекта, математического и логического мышления, умения анализировать, сравнивать, обобщать. Каждое из заданий с параметром представляет небольшую исследовательскую работу. Таким образом, цель работы достигнута, выдвинутая гипотеза подтвердилась.

Новизна работы: Познавательный материал способствует не только выработке умений и закреплению навыков решения задач геометрическим методом, но и формированию устойчивого интереса к математике.

Практическая значимость:

- Знание приёмов решения негеометрических задач геометрическим методом позволяют успешно решать задачи ЕГЭ, конкурсные и олимпиадные задачи. Существенно упрощается решение, становится более понятным и наглядным.
- Возможность использования материалов исследования, компьютерной презентации на уроках математики при подготовке к ЕГЭ.

Список использованной литературы

1. Быков А.А.Сборник задач по математике.–М.:Изд..дом ГУ ВШЭ,2008

2. Генкель Г.З. «Геометрические решения негеометрических задач», - Москва: Просвещение 2007.

3. Лысенко Ф.Ф. Учимся решать задачи с параметром. Ростов-на-Дону: Легион, 2012.

4. Окунев А.А. Графическое решение уравнений с параметрами. – М.: Школа-Пресс,1996.

5. Пирютко О Н «Графический метод решения текстовых задач» - Минск.: Новое знание,2010

6. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач-М. Просвещение, 1991.