Краевая научно-практическая конференция
учебно-исследовательских работ учащихся 6-11 классов
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Движение газа под поршнем при воздействии силы трения

Коньшин Николай Владимирович,
11 кл., МБОУ «Лицей №1», г. Пермь,
Анфёров Сергей Дмитриевич,
учитель физики.

Пермь. 2015.

Оглавление

Введение

Изопроцессы имеют немалое значение в нашей жизни, потому исследования в этой области весьма актуальны и интересны (пример изопроцессов – двигатель внутреннего сгорания, паровые двигатели, накачивание шины, накачивание футбольного мяча и т.д). Если же говорить конкретно о газе, то он широко применяется в промышленности и технике – различные пневматические инструменты приводятся в движение сжатым воздухом, реактивные двигатели, ориентирующие космический корабль так же работают на газе и т.д.

Цель работы

- Построение математической модели сосуда с поршнем и газом под ним, исследование расширения газа под поршнем в условиях действия силы трения.
- Применение уравнения Менделеева-Клапейрона и уравнения Ван-дер-Ваальса для решения данной задачи, анализ разницы в полученных результатах.
- Выполнение эксперимента, результаты которого проверят адекватность модели.

Теоретическая информация

Идеальный газ – это простейшая модель реального газа. Идеальный газ состоит из молекул, взаимодействие между которыми пренебрежимо мало.

Уравнение Менделеева-Клапейрона – уравнение состояния идеального газа. Формула записывается следующим образом:

$$PV = \nu RT$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса – уравнение состояния реального газа. В отличие от уравнения Менделеева-Клапейрона, в данном уравнении имеются две поправки, которые позволяют применять его только для реального газа – взаимодействие между молекулами газа и объем молекул газа.

$$(P + \frac{a\nu^2}{V^2})(V - b\nu) = \nu RT$$

Постановка задачи

Содержательная постановка

Газ находится под массивным поршнем, под действием силы тяжести поршень начинает медленно опускаться, это приводит к уменьшению объема газа и росту давления в сосуде, температура предполагается постоянной. Кроме этого, происходит трение поршня о стенки сосуда.

Необходимо рассчитать силу трения и оценить ее влияние на скорость перемещения поршня.

Концептуальная постановка

В этой модели рассматриваются поршень, сосуд, газ. Также учитывается атмосферное давление.

m(поршня)	5 кг	K(коэффициент трения)	0.1
(m/M) (моль)	1	F(сила трения)	7 Н
T(const)	300 К	R(универсальная газовая постоянная)	8.31
S(поверхн. поршня)	0.02 м.	P(атмосферное давление)	100 000 Па

Будет рассмотрено два варианта: в первом будет учитываться сила трения, во втором – нет.

Между решениями уравнений Менделеева-Клапейрона и Ван-дер-Ваальса возможны существенные различия в решениях, которые отразятся на графике различной частотой колебаний.

Математическая постановка

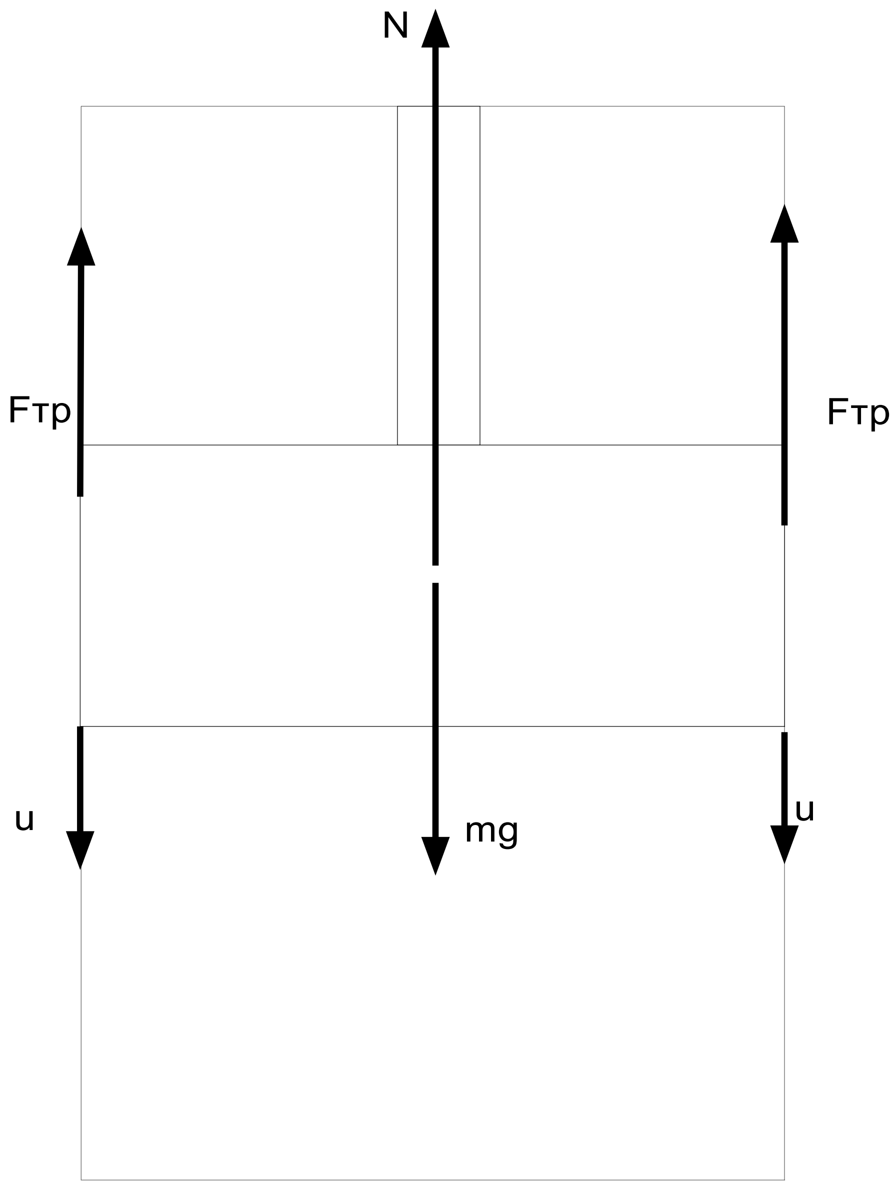

Рисунок 1. Схема поршня

По второму закону Ньютона получим следующее выражение:

$$m*a = P*s - m*g - P(атм)*S + F(тр) \tag{1}$$

Отсюда выражается ускорение:

$$a = \frac{P*s - m*g - P(атм)*S + Fтр}{m} \tag{2}$$

Ускорение можно представить как вторую производную координаты по времени:

$$a = x''(t) \tag{3}$$

Подставив выражение 3 в выражение 2, получим дифференциальное уравнение:

$$x''(t) = \frac{P*s - m*g - P(атм)*S + Fтр}{m}$$

Далее для нахождения давления используется уравнение Менделеева-Клапейрона, применяемое для идеального газа:

$$PV = \nu RT \tag{5}$$

в котором давление может быть выражено через координату поршня:

$$P = \frac{\nu * R * T}{s * x(t)} \tag{6}$$

Подставив выражение 6 в выражение 4, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$x''(t) = \frac{\frac{\nu RT}{sx(t)} - m*g - P(атм)*S + F(тр)}{m} \tag{7}$$

Вместо уравнения Менделеева-Клапейрона можно использовать уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$(P + \frac{a\nu^2}{V^2})(V - b\nu) = \nu RT \tag{8}$$

(Где a – сила притяжения между молекулами, b – объем молекул газа).

Так же выразим давление, в котором выражена координата поршня:

$$P = \frac{\nu RT}{(sx(t) - b\nu)} - \frac{a\nu^2}{(sx(t))^2} \tag{9}$$

Подставив выражение 9 в выражение 8, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$x''(t) = \frac{(\frac{\nu RT}{(sx(t) - b\nu)} - \frac{a\nu^2}{(sx(t))^2}) - mg - P(атм)*S + F(тр)}{m} \tag{10}$$

В обоих уравнениях в начальном положении поршень предполагается поднятым, начальная скорость равна нулю, температура и сила трения постоянны. Решение было выполнено при помощи численного метода в пакете Wolfram Mathematica.

Решение задачи

Решение задачи представлено в виде графиков. Всего было сделано четыре варианта: вычисление при помощи уравнений Ван-Дер-Ваальса и Менделеева-Клапейрона с учетом и без учета силы трения.

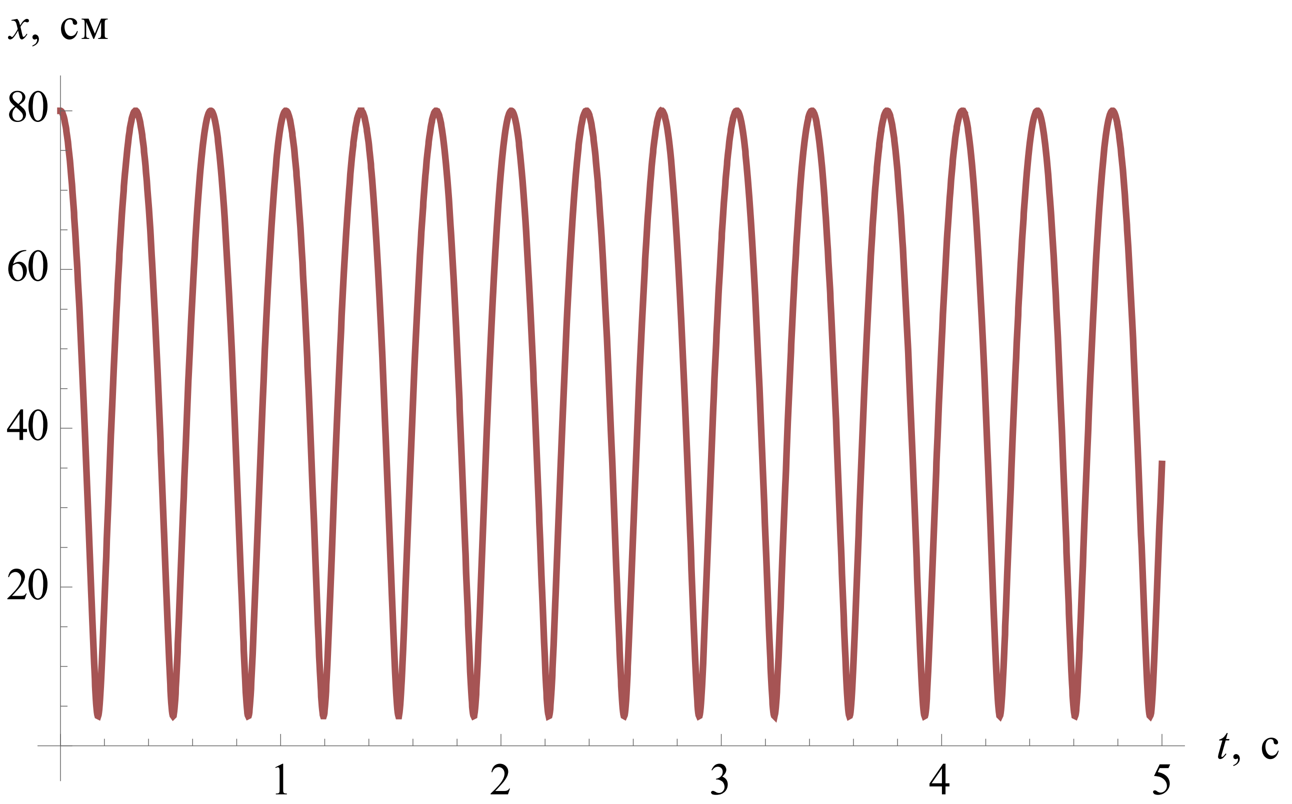

Рисунок 2. Зависимость координаты поршня от времени(Уравнение Менделеева-Клапейрона)

График без учета силы трения.

Видно, что поршень совершает колебания. Поскольку сила трения отсутствует, колебания не затухают.

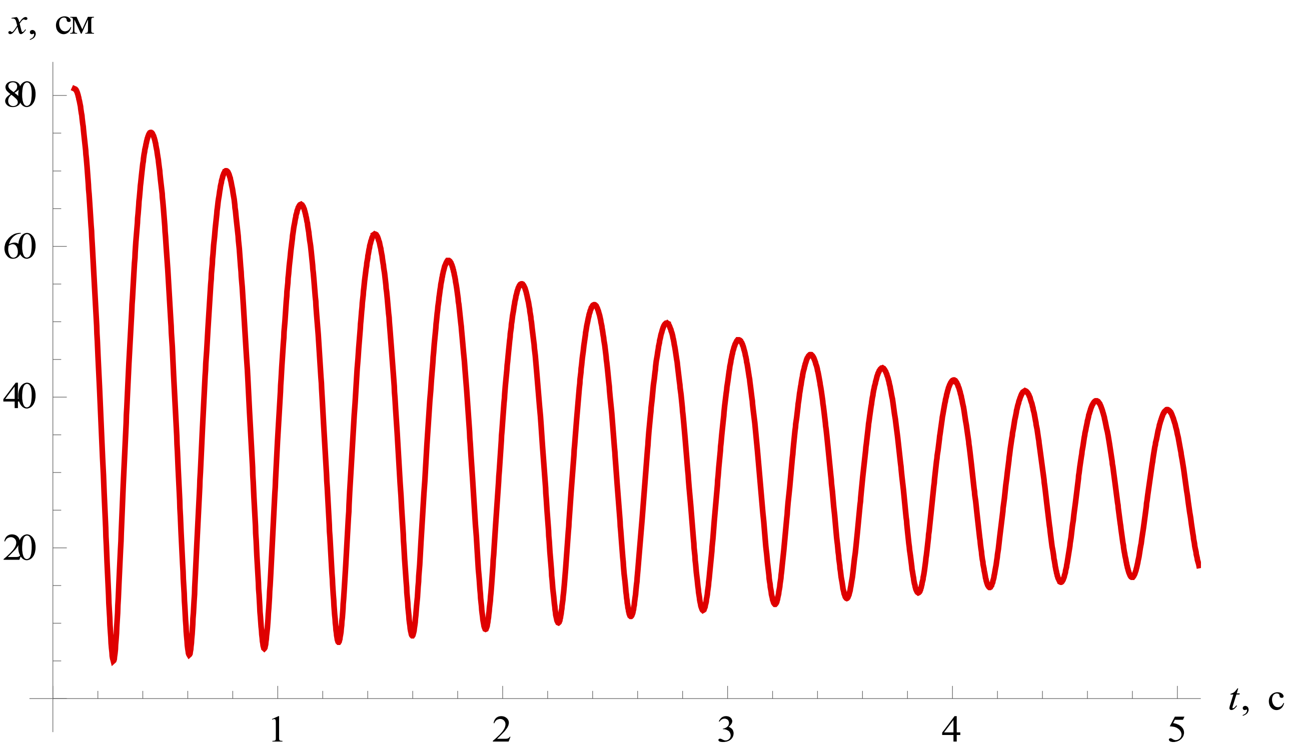

Рисунок 3. Зависимость координаты поршня от времени(уравнение Менделеева-Клапейрона)

График с учетом силы трения.

На графике заметно, что происходят затухающие колебания. К концу завершения колебаний поршень остановится на определенной высоте, а не останется на дне сосуда.

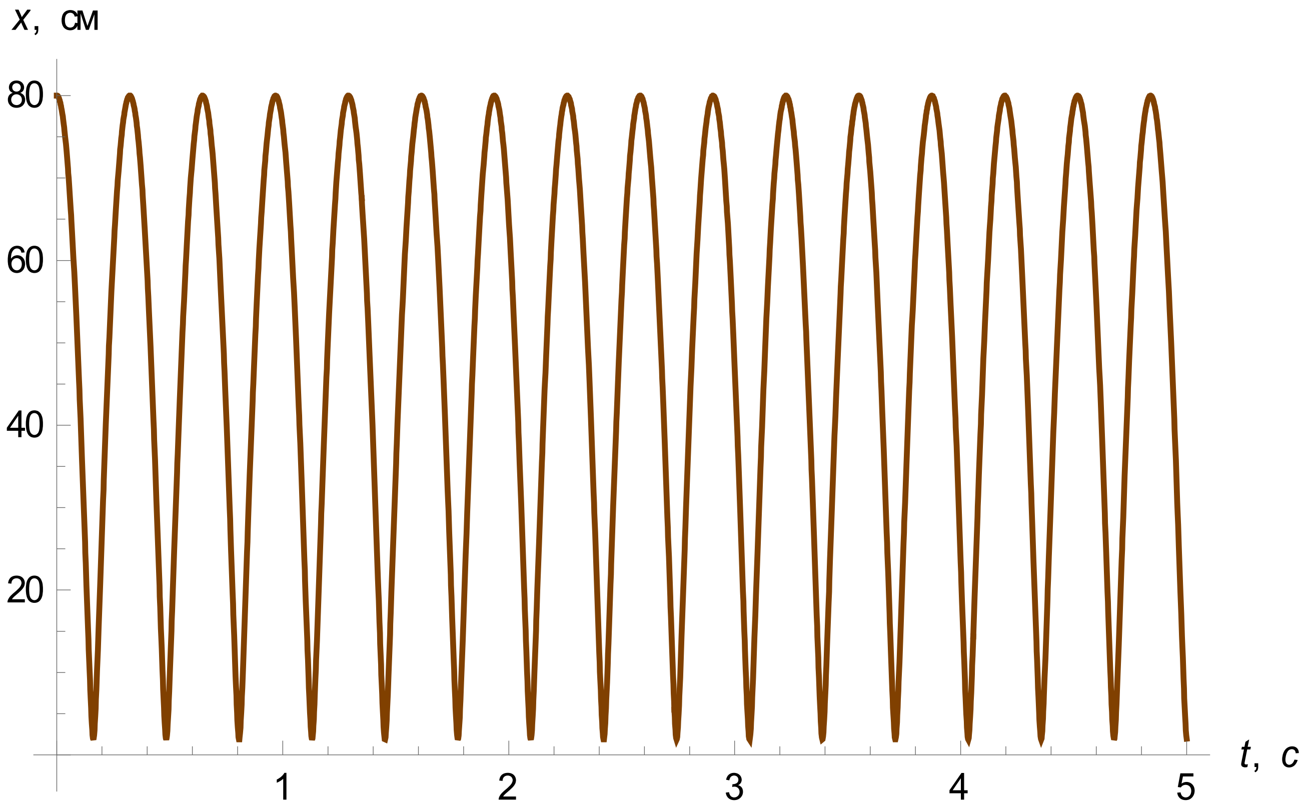

Рисунок 4. Зависимость координаты поршня от времени(уравнение Ван-Дер-Ваальса)

График без учета силы трения.

Если сравнить данный график с решением уравнения Менделеева-Клапейрона, то можно заметить, что частота колебаний слегка увеличилась.

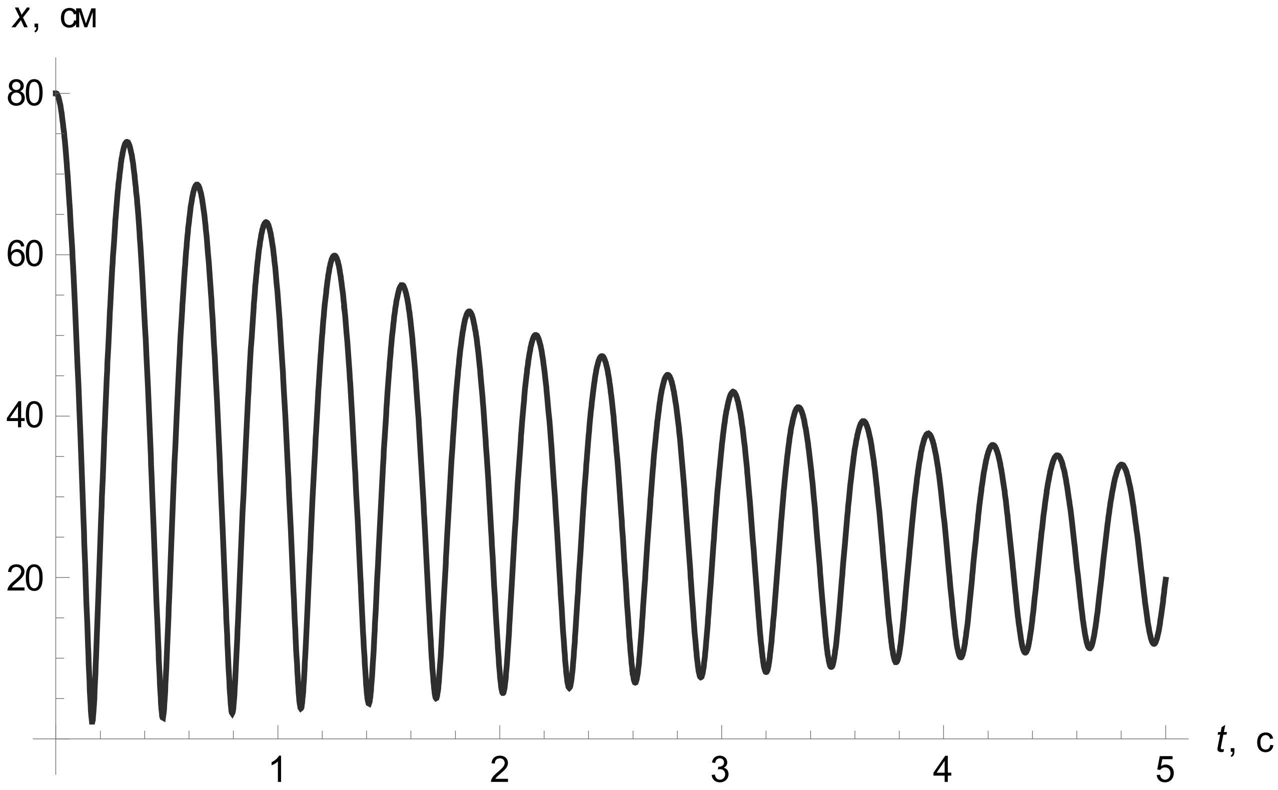

Рисунок 5. Зависимость координаты поршня от времени(уравнение Ван-дер-Ваальса)

График с учетом силы трения.

В данном случае колебания также проходят чуть с большей скоростью, чем в случае применения уравнения Менделеева-Клапейрона.

Эксперимент

Для эксперимента был взят медицинский шприц и груз массой 700 и 400 г. При помощи куска пластилина, шприц закрепили в вертикальном положении, поршень находился на максимальной высоте(6 см).

На поршень положили груз массой 700 г. Поршень медленно опустился на высоту, равную 4 см. После снятия груза он поднялся до 5.3 см, но не вернулся в первоначальное положение.

Во втором случае на поршень положили груз массой 400 г., поршень опустился на высоту, равную 5 см. После снятия груза положение поршня примет такое же значение, как и в первом случае.

Также были произведены измерения времени, за которое поршень возвращался в первоначальное положение после снятия с него груза.

Масса груза	400г	700г	1 кг

Время подъема поршня	9,2 с	6,5 с	4 с

Заметно, что чем больше масса груза, тем быстрее поршень возвращается на свое первоначальное положение.

Вывод

Цель работы достигнута, математическая модель построена. Вариант, построенный при помощи уравнения Ван-дер-Ваальса, вполне применим для реальных условий.

Список литературы

Г.Я.Мякишев. (2005). Молекулярная физика и термодинамика. Москва: Дрофа.

http://www.math24.ru/van-der-waals-equation.html